Table des matières

Remerciements

Tout d'abord nous rendons grâce à Dieu Tout-puissant qui nous a permis d'achever ce travail dans de bonnes conditions. J'adresse également mes remerciements au professeur Morsli Mohamed , pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de soutenance.

Ma reconnaissance va à madame Rahmani d'avoir encadré ce mémoire et aussi pour l'effort fourni, ses encouragements, et ses précieux conseils tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Je remercie Monsieur Menguelti et madame Taleb d'avoir accepté d'examiner mon travail.

Je tiens à remercier tous les enseignants de mathématiques de l'Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou et spécialement à madame Khellas et madame Daoui.

Je voudrais remercier toute ma famille, en particulier un grand merci à ma mère pour sa grande disponibilité, sa gentillesse et sa bonne humeur en toute circonstance.

Je souhaite aussi saluer en cette occasion mes amis, et spécialemet mon frère Mokhtari Yacine.

Je ne saurai leur témoigner suffisamment toute ma gratitude pour m'avoir toujours soutenu.

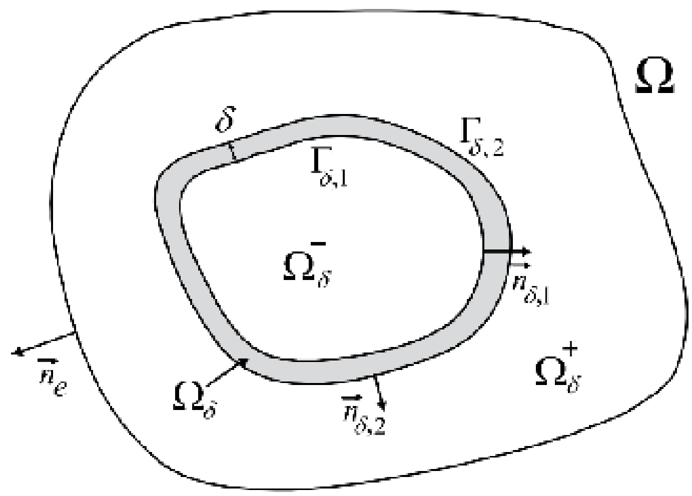
Introduction

Plusieurs phénomènes physiques sont modélisés par des problèmes aux limites qui font intervenir un ou plusieurs petits paramères. Ce petit paramètre est souvent de nature géométrique: structures minces, couches minces,...etc. C'est le cas par exemple des assemblages collés, la peinture recouvrant les avions militaires dans la furtivité radar...etc.

La résolution numérique de ce type de problèmes via les méthodes numériques (élément finis) peut-être trés couteuse car la discrétisation de la solution nécessite un maillage trés fin du domaine de la couche mince. L'alternative consiste alors à utiliser les méthodes asymptotiques afin de remplacer l'effet de la couche mince par des conditions aux limites approchées. Plus précisément, il s'agit de chercher un problème approché qui ne fait pas intervenir la couche mince géométriquement mais qui rend compte de son effet.

Plusieurs auteurs se sont interessés à la modélisation des couches minces en physique, en mécanique et principalement en électromagnétisme (voir par exemple [1], [2], [6]). Dans ce travail, nous nous intéressons à une étude fait par K.Boutarene (voir article [3]), et qui rentre dans le cadre cité plus haut.

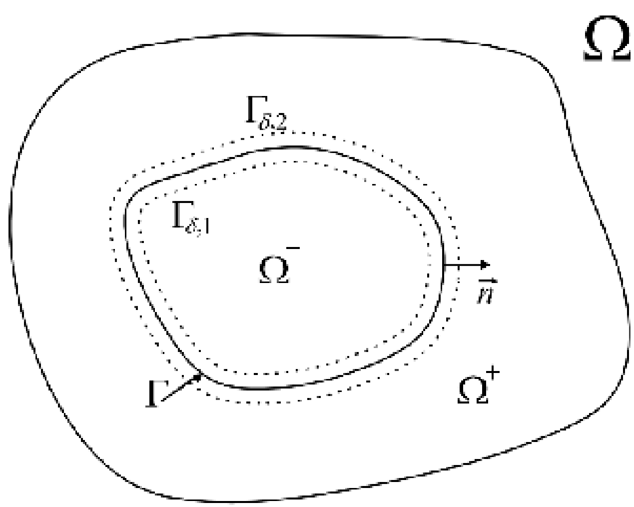
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^p$ ($p = 2$ *ou* 3) composé de deux domaines Ω_δ^+ et Ω_δ^- séparés par une troisième domaine (couche mince), d'épaisseur très petite (voire figure ci-dessous) :



Nous considérons le problème de poisson posé sur ce domaine:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha \nabla u_\delta) = f & dans\ \Omega \\ u = 0 & sur\ \partial\Omega \end{cases}$$

Avec la méthode des dévelopements asymptotiques, nous dérivons un problème de transmission approché posé sur un domaine qui ne fait pas intervenir la couche mince:



le problème approché

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\alpha^{-}\nabla u_{\delta}^{-,(ap)}\right) = f_{|\Omega^{-}} & \text{dans } \Omega^{-}, \\ -\operatorname{div}\left(\alpha^{+}\nabla u_{\delta}^{+,(ap)}\right) = f_{|\Omega^{+}} & \text{dans } \Omega^{+}, \\ u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} - u_{\delta|\Gamma}^{+,ap} = \delta\left[p_1\left(1-\alpha^{-}\alpha_{\delta}^{-1}\right) + p_2\left(\alpha^{-}\left(\alpha^{+}\right)^{-1} - \alpha^{-}\alpha_{\delta}^{-1}\right)\right]\left(\partial_n u_{\delta|\Gamma}^{-,ap}\right) & \text{sur } \Gamma, \\ \alpha^{-}\partial_n u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} - \alpha^{+}\partial_n u_{\delta|\Gamma}^{+,ap} = \delta\left[p_1\left(\alpha_{\delta}-\alpha^{-}\right) + p_2\left(\alpha_{\delta}-\alpha^{+}\right)\right]\Delta_{\Gamma} u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} & \text{sur } \Gamma, \\ u_{\delta|\partial\Omega}^{+,(ap)} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

L'effet de la couche mince se traduit par les conditions de transmission approchées posées sur l'interface Γ. Cette interface peut être choisie de sorte à garantir l'existence et l'unicité de la solution.

Le plan de ce mémoire est comme suit: dans le chapitre 1, nous rappelons quelques résultats d'analyse fonctionnelle et de géométrie differentielle nécessaires pour la suite. Dans le deuxiéme chapitre, nous introduisons le problème de Poisson posé sur le domaine avec couche mince et démontrons l'existence et l'unicité de la solution de la formulation variationnelle associée. Aprés une mise à échelle adéquate qui consiste à dilater la couche mince dans la direction de la normale, nous construisons un développement asymptotique de la solution et dérivons les conditions aux limites approchées qui modélisent l'effet de la couche mince.

Les résultats décrits dans ce mémoire sont ceux élaborés dans l'article [3]

Chapitre 1

Rappels

On rappelle dans ce chapitre quelques résultats d'analyse fonctionnelle et de géométrie différentielle (cf.[[5], [7]]) qui seront utilisés par la suite.

1.1 Eléments d'analyse fonctionnelle

1.1.1 L'espace $L^p(\Omega)$ $\quad (1 \leq p \leq +\infty)$

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.1.1

a) On désigne par $L^p(\Omega)$ l'espace des classes de fonctions définies et mesurables sur Ω (pour la mesure de Lebesgue dx) telles que:

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \leq +\infty.$$

On munit $L^p(\Omega)$ de la norme:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

b) $L^\infty(\Omega)$ désigne l'espace des classes de fonctions f définies, mesurables et bornées presque partout sur Ω . On note:

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} ess |f(x)|.$$

Proposition 1.1.1 *L^p est un espace de Banach, séparable si $1 \leq p < +\infty$ et réflexif si $1 < p < +\infty$.*

Proposition 1.1.2 (Inégalité de Hölder) *Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec: $1 \leq p \leq +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*
Alors $fg \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega |fg| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

1.1.2 L'espace de Soboleve $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 1.1.2 *soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Pour $m \in \mathbb{N}$ et $p \geq 1$, on pose:*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega);\ D^\alpha f \in L^p(\Omega),\ |\alpha| \leq m\}$$

$W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme:

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

si $p = 2$, $W^{m,p}(\Omega)$ est noté $H^m(\Omega)$. C'est un espace de hilbert pour le produit scalaire:

$$((f,g))_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha f, D^\alpha g)_{L^2(\Omega)}$$

Proposition 1.1.3 *On suppose Ω borné de classe C^1. On a:*

$$\begin{aligned} si\ p &< n,\ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),\ \forall q \in [1, p^*[\text{ où } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \\ si\ p &= n,\ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),\ \forall q \in [1, +\infty[\\ si\ p &> n,\ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega}) \end{aligned}$$

avec injections compactes.

En particulier, si $n = 2$, l'injection

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

est compacte $\forall p$, $1 \leq p < +\infty$.

Proposition 1.1.4 *On suppose $n = 2$. Soient $s_1 \geq 0$ et $s_2 \geq 0$. Alors si*

$$r = \min\{s_1, s_2, s_1 + s_2 - 2\} \geq 0,$$

l'application:

$$\begin{array}{ccc} H^{s_1}(\Omega) \times H^{s_2}(\Omega) & \to & H^r(\Omega) \\ (f, g) & \to & fg \end{array}$$

est continue.

Ce résultat joue un rôle primordial dans l'étude des produits de fonction dans les espaces de sobolev, rencontrés souvent dans les problèmes non linéaires.

1.1.3 Inégalité de Poincaré

Soit Ω est un ouvert borné dans une direction, alors il existe une constante C (dépendant de Ω et p) telle que :

$$||u||_{L^P(\Omega)} \leq C||\nabla u||_{(L^P(\Omega))^n} \quad , \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \;\; (1 \leq p < \infty)\,. \tag{1.1.1}$$

En particulier l'expression $||\nabla u||_{(L^P(\Omega))^n}$ est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ qui est équivalente à la norme $||u||_{W^{1,p}(\Omega)}$. Sur $H_0^1(\Omega)$ l'expression $\int_\Omega \nabla u.\nabla v$ est un produit scalaire qui induit la norme $||\nabla u||_{(L^2(\Omega))^n}$ équivalente à la norme $||u||_{H^1}$.

Théorème 1.1.1 (Trace) *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné régulier et $s > \frac{1}{2}$ un réel. L'opérateur*

γ: $H^s(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \to L^2(\partial\Omega)$ qui associe à chaque fonction $u \in H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ sa restriction à $\partial\Omega$, se prolonge dans $H^1(\Omega)$ en un opérateur linéaire continue qu'on note ici encore γ: $H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$,et qui a pour image $H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ et pour noyau $H_0^s(\Omega)$.

1.1.4 Formule de Green

Théorème 1.1.2 *Soit Ω un ouvert borné, régulier de classe $\mathcal{C}^1$, si u et v sont des fonctions de $H^1(\Omega)$, elles vérifient*

$$\int_\Omega u\frac{dv}{dx_i}\; dx = -\int_\Omega v\frac{du}{dx_i}\; dx + \int_{\partial\Omega} uvn_i\; ds$$

où $n = (n_i)_{1\leq i\leq N}$ est la normale unité exterieur à $\partial\Omega$.

Théorème 1.1.3 *Soit Ω un ouvert borné, régulier de classe $\mathcal{C}^1$:*

si $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$, on a:

$$\int_\Omega \Delta uv\ dx = -\int_\Omega \nabla u.\nabla v\ dx + \int_{\partial\Omega} \partial_n uv\ dx.$$

1.1.5 Théorème de Lax-Milgram

Définition 1.1.3 *On dit qu'une forme bilinéaire $a(u,v) : H \times H \to \mathbb{R}$ est*

*(i) **continue** s'il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$|a(u,v)| \leq c||u||_H.||v||_H \quad \forall u,v \in H,$$

*(ii) **coercive** s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que*

$$a(v,v) \geq \alpha||v||_H \quad \forall v \in H.$$

Théorème 1.1.4 (Lax-Milgram) *Soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire, continue et coercive sur un espace de Hilbert H, alors $\forall\ \varphi \in H', \exists!\ u \in H$ tel que:*

$$a(u,v) = \langle\varphi, v\rangle \quad \forall v \in H.$$

De plus, si a est symétrique, alors a est caractérisée par la propriété:

$$u \in H \quad et \quad \frac{1}{2}a(u,u) - \langle\varphi, u\rangle = \min_{v\in H}\{\frac{1}{2}a(v,v) - \langle\varphi, v\rangle\}.$$

1.2 Eléments de géométrie différentielle

Nous intoduisons une surface Γ plongée dans $\mathbb{R}^3$, et on considére une famille finie de cartes $\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$ recouvrant Γ, avec U_i un ouvert de Γ et qu'il existe Γ_i un ouvert de $\mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{aligned} \varphi_i : \Gamma_i &\to U_i \\ (\xi_1,\xi_2) &\to m = \varphi_i(\xi_1,\xi_2) \end{aligned}$$

est un système de coordonnées locales sur Γ, nous définissons les vecteurs

$$\tau_\alpha(m) = \frac{\partial\varphi_i(\xi_1,\xi_2)}{\partial\xi_\alpha},\ \alpha = 1,2\ ;\ \forall m = \varphi_i(\xi_1,\xi_2) \in \Gamma.$$

Les vecteurs $\tau_1(m)$ et $\tau_2(m)$ sont supposés linéairement indépendants en tout point m de Γ, ce qui permet de définir le plan tangent en m à Γ noté $T_m(\Gamma)$. Nous définissons la normale unitaire en chaque point m de Γ par

$$n(m) = \frac{\tau_1(m) \wedge \tau_2(m)}{|\tau_1(m) \wedge \tau_2(m)|},$$

où $\wedge$ et $|.|$ sont respectivement le produit vectoriel et la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^3$.

On définit le tenseur métrique t de la surface Γ associé au système de coordonnées locale (U_i, φ_i) par:

$$t_{\alpha\beta}(m) = \tau_1(m).\tau_2(m); \alpha, \beta = 1, 2.$$

On note $|t|$ le déterminant de ce tenseur.

L'élément d'aire est alors donné par

$$d\Gamma = |\tau_1(m) \wedge \tau_2(m)| d\xi_1 d\xi_2 = \sqrt{\det t} d\xi_1 d\xi_2$$

Nous définissons l'opérateur de courbure de la surface Γ au point m par

$$\Re\tau_\alpha = \frac{\partial n}{\partial \xi_\alpha}; \alpha = 1, 2;$$

Notons par c_1, c_2 ses valeurs propres, appelées courbures principales de Γ au point m, et on note par H et K la courbure moyenne et la courbure de Gauss de la surface Γ au point m respectivement, défnies par

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(c_1 + c_2), \\ K &= c_1 c_2. \end{aligned}$$

On désigne par Π_m l'opérateur de projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur le plant tangent $T_m(\Gamma)$ en m à Γ, nous avons la décomposition suivante, pour tout vecteur w de $\mathbb{R}^3$,

$$w = w_T + w_n n \tag{1.2.1}$$

où $w_T = \Pi_m w$ et $w_n = w.n$ sont la composante tangentielle et normale de vecteur w respectivement.

Chapitre 2

Conditions de transmission approchées pour un problème de Poisson

2.1 Position du problème

On considére le problème de Poisson posé sur un domaine Ω $\big(\Omega$ étant un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N = 2$ ou $3\big)$ et qui est composé de trois sous-domaines: un ouvert borné Ω_δ^- et Ω_δ^+, separés par une couche mince Ω_δ. on note par $\Gamma_{\delta,1}$ la frontière de Ω_δ^- et par $\Gamma_{\delta,2} \cup \partial\Omega$ celle de Ω_δ^+ (*voire Figure*.2.1).

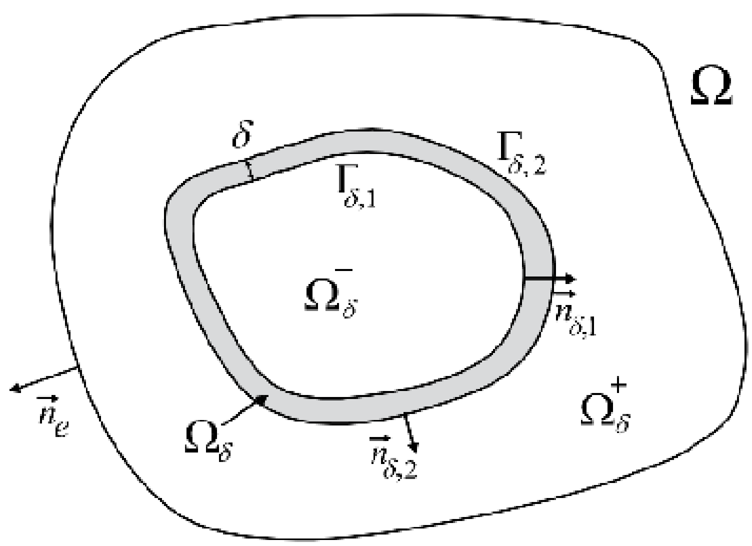


Figure.2.1 – *Un problème de transmission.*

Nous nous intéressons au problème de Poisson suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha\nabla u_\delta) = f & \textit{dans } \Omega \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1.1}$$

où $f \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ et α est une fonction régulière constante par morceaux, donnée par :

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha^+ & \text{si } x \in \Omega_\delta^+ \\ \alpha_\delta & \text{si } x \in \Omega_\delta \\ \alpha^- & \text{si } x \in \Omega_\delta^- \end{cases}$$

Les trois constantes α_δ, α^+ et α^- sont strictement positives telles que $\alpha^+ < \alpha_\delta < \alpha^-$ou $\alpha^- < \alpha_\delta < \alpha^+$.

Formulation variationnelle

Dans ce qui suit, nous allons écrire le problème aux limites (2.1.1) sous forme variationnelle et démontrer l'existence et l'unicité de la solution.

En multipliant la première équation de (2.1.1) par une fonction test $v \in H_0^1(\Omega)$ et en intégrant par parties, (en appliquant la formule de Green), Le membre à gauche nous donne:

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \operatorname{div}(\alpha\nabla u_\delta)\, v d\Omega &= \int_\Omega \alpha\nabla u_\delta \nabla v d\Omega - \int_{\partial\Omega} \alpha v \nabla u_\delta n_e d\Omega \\ &= \int_\Omega \alpha\nabla u_\delta \nabla v d\Omega \\ &= \alpha^- \int_{\Omega_\delta^-} \nabla u_\delta^- \nabla v_\delta^- d\Omega_\delta^- + \alpha_\delta \int_{\Omega_\delta} \nabla u_{int,\delta} v_{int,\delta} d\Omega_\delta + \alpha^+ \int_{\Omega_\delta^+} \nabla u_\delta^+ v_\delta^+ d\Omega_\delta^+ \end{aligned}$$

où $u_\delta^- = u_{\delta|\Omega_\delta^-}$ et $v_\delta^- = v_{|\Omega_\delta^-}$; $u_\delta^+ = u_{\delta|\Omega_\delta^+}$ et $v_\delta^+ = v_{|\Omega_\delta^+}$; $u_{int,\delta} = u_{\delta|\Omega_\delta}$ et $v_{int,\delta} = v_{|\Omega_\delta}$.
le problème (2.1.1) est équivalent au problème variationnel :

$$\begin{cases} \textit{Trouver } u_\delta \in H_0^1(\Omega) \textit{ tel que} \\ \forall v \in H_0^1(\Omega),\ a_\delta(u_\delta, v) = l_\delta(v), \end{cases} \tag{2.1.2}$$

avec

$$a_\delta(u_\delta, v) = \alpha^- \int_{\Omega_\delta^-} \nabla u_\delta^- \nabla v_\delta^- d\Omega_\delta^- + \alpha_\delta \int_{\Omega_\delta} \nabla u_{int,\delta} \nabla v_{int,\delta} d\Omega_\delta + \alpha^+ \int_{\Omega_\delta^-} \nabla u_\delta^+ \nabla v_\delta^+ d\Omega_\delta^+$$

et

$$l_\delta(v) = \int\limits_{\Omega} f v d\Omega.$$

Théorème 2.1.1 *si $f \in L^2(\Omega)$, alors le probleme (2.1.2) admet une unique solution $u_\delta \in H_0^1(\Omega)$. De plus, il existe une constante c, indépendante de δ, telle que*

$$||u_\delta||_{H^1(\Omega)} \leq c||f||_{L^2(\Omega)}.$$

Preuve. La démonstration de ce théorème est une application directe de théorème de Lax-Milgram, en effet:

1) La forme bilinéaire $a_\delta\,(.,.)$ est continue: pour tous u_δ,v appartenant à $H_0^1(\Omega)$, nous avons

$$\begin{aligned}
|a_\delta(u_\delta, v)| &\leq \alpha^- \int\limits_{\Omega_\delta^-} |\nabla u_\delta^- \nabla v_\delta^-| d\Omega_\delta^- + \alpha_\delta \int\limits_{\Omega_\delta} |\nabla u_{int,\delta} \nabla v_{int,\delta}| d\Omega_\delta + \alpha^+ \int\limits_{\Omega_\delta^-} |\nabla u_\delta^+ \nabla v_\delta^+| d\Omega_\delta^+ \\
&\leq \alpha^- ||\nabla u_\delta^-||_{L^2(\Omega_\delta^-)} ||\nabla v_\delta^-||_{L^2(\Omega_\delta^-)} + \alpha_\delta ||\nabla u_{int,\delta}||_{L^2(\Omega_\delta)} ||\nabla v_{int,\delta}||_{L^2(\Omega_\delta)} \\
&\quad + \alpha^+ ||\nabla u_\delta^+||_{L^2(\Omega_\delta^+)} ||\nabla v_\delta^+||_{L^2(\Omega_\delta^+)} \\
&\leq \max\{\alpha^-, \alpha^+\} ||u_\delta||_{H^1(\Omega)} ||v||_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

2) La forme bilinéaire $a_\delta\,(.,.)$ est coercive :

$$\begin{aligned}
a_\delta(v, v) &= \alpha^- \int\limits_{\Omega_\delta^-} |\nabla v_\delta^-|^2 d\Omega_\delta^- + \alpha_\delta \int\limits_{\Omega_\delta} |\nabla v_{int,\delta}|^2 d\Omega_\delta + \alpha^+ \int\limits_{\Omega_\delta^-} |\nabla v_\delta^+|^2 d\Omega_\delta^+ \\
&\geq \min\{\alpha^-, \alpha^+\} ||\nabla v_\delta||_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

D'aprés l'inégalité (1.1.1),

$$a_\delta(v, v) \geq C' ||v||^2_{H^1(\Omega)}$$

avec $C' = \frac{\min\{\alpha^-,\alpha^+\}}{1+C^2}$.

4) La forme linéaire $l_\delta\,(.)$ est continue: pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, nous avons

$$\begin{aligned}
|l_\delta(v)| &\leq \int\limits_{\Omega} |fv| d\Omega \\
&\leq ||f||_{L^2(\Omega)} ||v||_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

Le théorème de Lax-Milgram assure alors l'existence et l'unicité de la solution u_δ du preblème (2.1.2).

Pour démontrer l'estimation donnée par le théorème ci-dessus et qui représente la continuité par rapport à la donnée f, nous exploitons la coercivité de la forme bilinéaire $a_\delta\left(.,.\right)$. En effet, nous avons:

$$\begin{aligned} C'||u_\delta||^2_{H^1(\Omega)} &\leq a_\delta(u_\delta, u_\delta) \\ &\leq ||f||_{L^2(\Omega)}||u_\delta||_{H^1(\Omega)} \\ ||u_\delta||_{H^1(\Omega)} &\leq \tfrac{1}{C'}||f||_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

qui donne l'estimation énoncée, avec $c = \frac{1}{C'}$. ■

2.2 Problème de transmission. Introduction d'une interface Γ

L'objectif principal de cette étude est la modélisation de l'effet de la couche mince sur le multi-domaine Ω. Plus précisément, il s'agit d'identifier un modèle approché qui ne fait pas intervenir la couche mince Ω_δ mais qui rend compte de son effet à travers de nouvelles conditions de transmission approchées écrites sur une interface Γ, sui d'un point de vue géometrique, représente la "limite" de la couche Ω_δ quand δ tend vers 0.

Le choix de cette inerface peut être varié. Seulement, dans le souci d'obtenir un problème approchée bien posé, nous définissons Γ comme étant une surface parallèle à $\Gamma_{\delta,1}$ et $\Gamma_{\delta,2}$ divisant Ω_δ en deux couches minces $\Omega_{\delta,1}$ et $\Omega_{\delta,2}$ d'épaisseurs respectives $p_1\delta$ et $p_2\delta$ $\left(p_1\right.$ et p_2 sont deux nombres réels strictement positifs vérifiant $\left.p_1 + p_2 = 1\right)$. Les nombres p_1 et p_2 seront fixés par la suite, de sorte à assurer le caractère bien posé du problème approché.

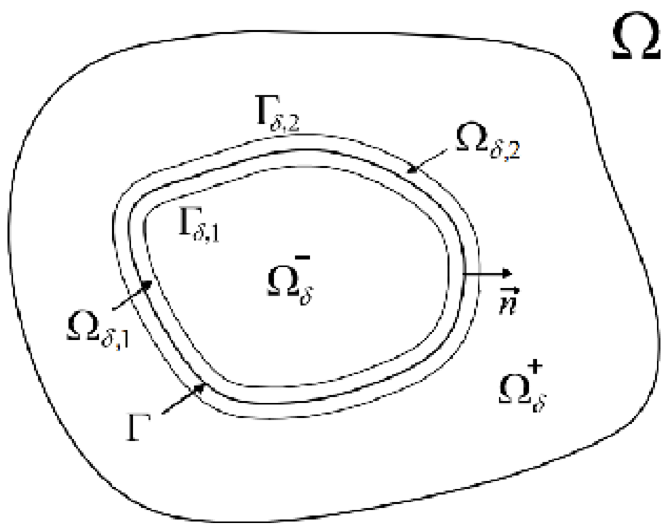


Figure.2.2 – *Le domaine*

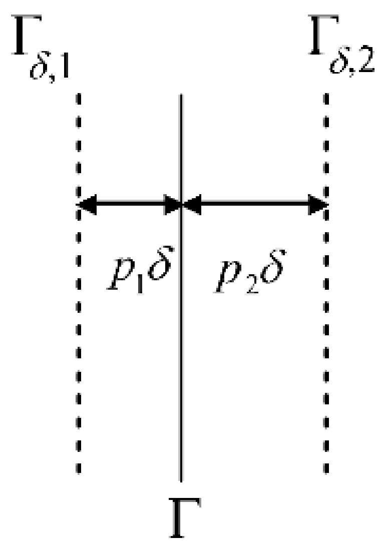


Figure 2.3 – *La couche mince* Ω_δ

ainsi, nous définissons les restrections de u_δ à ces differents sous-domaines comme suit

$$u_\delta = \begin{cases} u_\delta^- & \text{sur } \Omega_\delta^- \\ u_{int,\delta}^1 & \text{sur } \Omega_{\delta,1} \\ u_{int,\delta}^2 & \text{sur } \Omega_{\delta,2} \\ u_\delta^+ & \text{sur } \Omega_\delta^+ \end{cases}$$

et nous obtenons le problème équivalent:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\alpha^{+}\nabla u_\delta^{+}\right) & = f_{\Omega_\delta^{+}} \quad dans\ \Omega_\delta^{+}, & (a.1)\\ -\operatorname{div}\left(\alpha_\delta \nabla u_{int,\delta}^{2}\right) & = f_{|\Omega_{\delta,2}} \quad dans\ \Omega_{\delta,2}, & (a.2)\\ -\operatorname{div}\left(\alpha_\delta \nabla u_{int,\delta}^{1}\right) & = f_{|\Omega_{\delta,1}} \quad dans\ \Omega_{\delta,1}, & (a.3)\\ -\operatorname{div}\left(\alpha^{-}\nabla u_\delta^{-}\right) & = f_{\Omega_\delta^{-}} \quad dans\ \Omega_\delta^{-}, & (a.4)\\ u_{\delta|\partial\Omega}^{+} & = 0 \quad dans\ \partial\Omega, & (a.5) \end{cases}$$

Les conditions de transmission sur les differentes interfaces sont données par:

$$\begin{cases} u_{int,\delta|\Gamma_{\delta,2}}^{2} & = u_{\delta|\Gamma_{\delta,2}}^{+} & \text{sur } \Gamma_{\delta,2}, & (b.1)\\ \alpha_\delta \partial_{n_{\delta,2}} u_{int,\delta|\Gamma_{\delta,2}}^{2} & = \alpha^{+}\partial_{n_{\delta,2}} u_{\delta|\Gamma_{\delta,2}}^{+} & \text{sur } \Gamma_{\delta,2}, & (b.2)\\ u_{int,\delta|\Gamma}^{1} & = u_{int,\delta|\Gamma}^{2} & \text{sur } \Gamma, & (b.3)\\ \alpha_\delta \partial_n u_{int,\delta|\Gamma}^{1} & = \alpha_\delta \partial_n u_{int,\delta|\Gamma}^{2} & \text{sur } \Gamma, & (b.4)\\ u_{\delta|\Gamma_{\delta,1}}^{-} & = u_{int,\delta|\Gamma_{\delta,1}}^{1} & \text{sur } \Gamma_{\delta,1}, & (b.5)\\ \alpha^{-}\partial_{n_{\delta,1}} u_{\delta|\Gamma_{\delta,1}}^{-} & = \alpha_\delta \partial_{n_{\delta,1}} u_{int,\delta|\Gamma_{\delta,1}}^{1} & \text{sur } \Gamma_{\delta,1} & (b.6) \end{cases}$$

où ∂_n désigne la dérivée normale.

2.3 Coordonnées locales

Dans ce qui suit, nous supposons que la surface Γ est une varieté compacte de classe $\mathcal{C}^\infty$, sans bord et plongée dans $\mathbb{R}^3$. En notant par $n(m)$ la normale unitaire en m, on définit le domaine Ω_δ de la couche mince comme suit:

$$\Omega_\delta = \left\{x \in \mathbb{R}^3;\ x = m + \eta n(m)\ où\ -p_1\delta \le \eta \le p_2\delta\ et\ m \in \Gamma\right\}. \tag{2.3.1}$$

la couche mince Ω_δ étant séparée par Γ en deux parties $\Omega_{\delta,1}$ et $\Omega_{\delta,2}$, nous définissons $I_{\delta,1} = (-p_1\delta, 0)$ et $I_{\delta,2} = (0, p_2\delta)$ et les applications

$$\begin{cases} \Gamma \times I_{\delta,1} \overset{\psi_1}{\to} \Omega_{\delta,1}\\ (m, \eta_1) \to x = m + \eta_1 n(m). \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \Gamma \times I_{\delta,2} \overset{\psi_2}{\to} \Omega_{\delta,2}\\ (m, \eta_2) \to x = m + \eta_2 n(m). \end{cases}$$

Ces applications définisent un $\mathcal{C}^\infty-$difféomorphisme de variétés.

Nous noterons par $\tilde{v}_1$ (respectivement $\tilde{v}_2$) les images définies sur $\Gamma\times I_{\delta,1}$ (respectivement $\Gamma\times I_{\delta,2}$) associeés à v_1 (respectivement v_2).

Il en résulte les formules de dérivation en cordonnées locales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \xi_\alpha} &= \nabla v_1.(I+\eta_1\Re)\tau_\alpha; \alpha = 1,2, \\ \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial \xi_\alpha} &= \nabla v_2.(I+\eta_2\Re)\tau_\alpha; \alpha = 1,2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \eta_1} &= \nabla v_1.n, \\ \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial \eta_2} &= \nabla v_2.n, \end{aligned}$$

(ξ_1, ξ_2, η) étant le systéme de coordonneés locales et $\Re$ l'opérateur de courbure introduit au chapitre précédent.

Un simple calcul montre alors que:

$$\begin{aligned} \nabla v_1 &= (I+\eta_1\Re)^{-1}\nabla_\Gamma \tilde{v}_1 + \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \eta_1} n, \\ \nabla v_2 &= (I+\eta_2\Re)^{-1}\nabla_\Gamma \tilde{v}_2 + \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial \eta_2} n. \end{aligned}$$

et que:

$$\begin{aligned} d\Omega_{\delta,1} &= \det(I+\eta_1\Re) d\Gamma d\eta_1, \\ d\Omega_{\delta,2} &= \det(I+\eta_2\Re) d\Gamma d\eta_2. \end{aligned}$$

Toutes ces expressions permettent alors d'obtenir un problème équivalent au problème de transmission, écrit en coordonneés locales (ξ_1, ξ_2, η).

2.3.1 Changement d'échelle

Le problème de tansmission que nous étudions n'est pas bien adapté à une analyse asymptotique par rapport au petit paramèmtre δ, car le domaine sur lequel il est posé dépend de ce paramètre. Il convient alors de faire un changement d'échelle afin de ramener le domaine de la couche mince à un domaine fixe quand δ varie. Plus précisement, il s'agit de faire une dilatation dans Ω_δ d'un rapport $\frac{1}{\delta}$ dans la direction de la normale.

Nous introduisons alors les intrvalles $I_1 =]-1, 0[$ et $I_2 =]0, 1[$ et considérons le changement d'échelle suivant:

Dans $\boldsymbol{\Omega_{\delta,1}}$:

on définit un variable dilateé s_1 par:

$$s_1 = \frac{\eta_1}{p_1 \delta},$$

et on considère le $\mathcal{C}^\infty-$difféomorphisme Φ_1 donnée par:

$$\begin{cases} \Omega^1 = \Gamma \times I_1 \xrightarrow{\Phi_1} \Omega_{\delta,1} \\ \qquad (m, s_1) \to x = m + \delta p_1 s_1 n(m), \end{cases}$$

A toute fonction v_1 définie sur $\Omega_{\delta,1}$ on associe la fonction $v^{[1]}$ définie sur l'ouvert fixe Ω^1 par

$$v^{[1]}(m, s_1) = v_1(\Phi_1(m, s_1))$$

Après ce changement d'echelle, le gradient se transforme:

$$\nabla v_1 = (I + \delta p_1 s_1 \Re)^{-1} \nabla_\Gamma v^{[1]} + p_1^{-1} \delta^{-1} \frac{\partial v^{[1]}}{\partial s_1} n.$$

et nous avons

$$d\Omega_{\delta,1} = p_1 \delta \det J_{\delta,1} d\Gamma ds_1$$

où

$$J_{\delta,1} = I + \delta p_1 s_1 \Re,$$

et vérifie

$$\det J_{\delta,1} = 1 + 2 p_1 s_1 \delta H + (p_1 s_1 \delta)^2 K.$$

De même, nous avons la formule d'integration

$$\int_{\Omega_{\delta,1}} u_1 v_1 d\Omega_{\delta,1} = p_1 \delta \int_{\Omega^1} u^{[1]} v^{[1]} \det J_{\delta,1} d\Gamma ds_1.$$

Dans $\boldsymbol{\Omega_{\delta,2}}$:

De même, dans $\Omega_{\delta,2}$, on définit la variable dilatateé

$$s_2 = \frac{\eta_2}{p_2 \delta},$$

et on considère le $\mathcal{C}^{\infty}-$difféomorphisme Φ_2 donnée par:

$$\begin{cases} \Omega^2 = \Gamma \times I_2 \overset{\Phi_2}{\to} \Omega_{\delta,2} \\ \qquad (m, s_2) \to x = m + \delta p_2 s_2 n(m), \end{cases}$$

Nous associons à toute fonction v_2 définie sur $\Omega_{\delta,2}$ la fonction $v^{[1]}$ définie sur l'ouvert fixe Ω^2 par:

$$v^{[2]}(m, s_2) = v_2(\Phi_2(m, s_2))$$

De même, nous avons les expressions suivantes pour le gradient, l'élément de volume et la formule d'integration

$$\nabla v_2 = (I + \delta p_2 s_2 \Re)^{-1} \nabla_\Gamma v^{[2]} + p_2^{-1} \delta^{-1} \frac{\partial v^{[2]}}{\partial s_2} n.$$

$$d\Omega_{\delta,2} = p_2 \delta \det J_{\delta,2} d\Gamma ds_2$$

$$\int\limits_{\Omega_{\delta,2}} u_2 v_2 d\Omega_{\delta,2} = p_2 \delta \int\limits_{\Omega^2} u^{[2]} v^{[2]} \det J_{\delta,2} d\Gamma ds_2.$$

2.4 Equation variationnelle mise à l'échelle

Considérons l'équation suivante définie sur Ω_δ

$$-\operatorname{div}\left(\alpha_\alpha \nabla u_{int,\delta}\right) = f_{|\Omega_\delta} \quad dans\ \Omega_\delta.$$

En multipliant cette équation par une fonction test $v_{int} \in H_0^1(\Omega_\delta)$, en utilisant les conditions de transmission et en faisant une intégration par parties, il vient:

$$\alpha_\delta a_{\delta,1}\left(u_{int}^1, v_{int}^1\right) + \alpha_\delta a_{\delta,2}\left(u_{int}^2, v_{int}^2\right) + h_{\delta,1}\left(u_\delta^-, v_{int}^1\right) - h_{\delta,2}\left(u_\delta^+, v_{int}^2\right) = \int\limits_{\Omega} f_{|\Omega_\delta} v_{int} d\Omega_\delta \quad (2.4.1)$$

où

$$\begin{aligned}
a_{\delta,1}\left(u_{int}^1, v_{int}^1\right) &= \int\limits_{\Omega_{\delta,1}} \nabla u_{int,\delta}^1 \nabla v_{int}^1 d\Omega_{\delta,1} \\
a_{\delta,2}\left(u_{int}^2, v_{int}^2\right) &= \int\limits_{\Omega_{\delta,2}} \nabla u_{int,\delta}^2 \nabla v_{int}^2 d\Omega_{\delta,2} \\
h_{\delta,1}\left(u_\delta^-, v_{int}^1\right) &= \left\langle \alpha^- \partial_{n_{\delta,1}} u_\delta^-, v_{int}^1 \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_{\delta,1}) \times H^{1/2}(\Gamma_{\delta,1})} \\
h_{\delta,2}\left(u_\delta^+, v_{int}^2\right) &= \left\langle \alpha^+ \partial_{n_{\delta,2}} u_{int,\delta}^+, v_{int}^2 \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_{\delta,2}) \times H^{1/2}(\Gamma_{\delta,2})}
\end{aligned}$$

Notons que dans l'expression des formules ci-dessus, v_{int}^1 et v_{int}^2 désignent les restrictions de v_{int} à $\Omega_{\delta,1}$ et $\Omega_{\delta,2}$ respectivement.

En utilisant les conditions de transmission et le changement en coordonnées locales et le changement d'échelle définis dans les sections précedentes, l'équation (2.4.1) devient:

$$\alpha_\delta a_\delta^{[1]}\left(u_{int}^{[1]}, v_{int}^{[1]}\right)+\alpha_\delta a_\delta^{[2]}\left(u_{int}^{[2]}, v_{int}^{[2]}\right)+h_\delta^{[1]}\left(u_\delta^-, v_{int}^{[1]}\right)-h_\delta^{[2]}\left(u_\delta^+, v_{int}^{[2]}\right) = \int\limits_\Omega f_{|\Omega_\delta} v_{int} d\Omega_\delta \quad (2.4.2)$$

où

$$\begin{aligned}
a_\delta^{[1]}\left(u_{int}^{[1]}, v_{int}^{[1]}\right) &= p_1 \int\limits_{\Omega^1} J_{\delta,1}^{-2} \nabla_\Gamma u^{[1]}.\nabla_\Gamma v^{[1]} \det J_{\delta,1} d\Gamma ds_1 + p_1^{-1}\delta^{-2} \int\limits_{\Omega^1} \partial_{s_1} u^{[1]} \partial_{s_1} v^{[1]} \det J_{\delta,1} d\Gamma ds_1 \\
a_\delta^{[2]}\left(u_{int}^{[2]}, v_{int}^{[2]}\right) &= p_2 \int\limits_{\Omega^2} J_{\delta,2}^{-2} \nabla_\Gamma u^{[2]}.\nabla_\Gamma v^{[2]} \det J_{\delta,2} d\Gamma ds_2 + p_2^{-1}\delta^{-2} \int\limits_{\Omega^2} \partial_{s_2} u^{[2]} \partial_{s_2} v^{[2]} \det J_{\delta,2} d\Gamma ds_2 \\
h_\delta^{[1]}\left(u_\delta^-, v_{int}^{[1]}\right) &= \left\langle \alpha^- \partial_{n_{\delta,1}} u_{\delta|\Gamma_{\delta,1}}^- \circ \Phi_1(m,-1), v_{int}^{[1]}(m,-1) \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma\times\{-1\})\times H^{1/2}(\Gamma\times\{-1\})} \\
h_\delta^{[2]}\left(u_\delta^+, v_{int}^{[2]}\right) &= \left\langle \alpha^+ \partial_{n_{\delta,2}} u_{\delta|\Gamma_{\delta,2}}^+ \circ \Phi_2(m,1), v_{int}^{[2]}(m,1) \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma\times\{1\})\times H^{1/2}(\Gamma\times\{1\})}
\end{aligned}$$

2.5 Développement asymptotique

Dans le but de dériver les conditions aux limites approchées qui modéliseront l'effet de la couche mince, nous utiliserons la méthode des développement asymptotiques.

Nous allons construire deux développements asymptotiques [5, 6]:

• Un développement asymptotique loin de la couche mince (champ lointain) qu'on appelle aussi développement externe.

• Un développement asymptotique qui intervient au voisinage de la couch mince (champ proche) , qu'on appelle aussi développement interne.

2.5.1 Développement externe

Le développement asymptotique externe s'effectue au niveau des domaines exterieurs Ω_δ^+ et Ω_δ^-. Plus précisement, il s'agit de construire le développement asymptotique des restrictions de u_δ à Ω_δ^+ et Ω_δ^-, de la forme:

$$\begin{cases} u_\delta^- = u_0^- + \delta u_1^- + \cdots, \\ u_\delta^+ = u_0^+ + \delta u_1^+ + \cdots, \end{cases} \quad (2.5.1)$$

où les termes $u_n^{\pm}$ $(n \in \mathbb{N})$ sont indépendants de δ.

En injectant ces expressions dans les équations de notre problème et en identifiant les termes du même ordre par raport à δ, on aboutit au fait que les termes $u_n^{\pm}$ vérifient:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha^+ \nabla u_n^+) = \delta_{0,n} f_{|\Omega^+} & \textit{dans } \Omega^+, \\ -\operatorname{div}(\alpha^- \nabla u_n^-) = \delta_{0,n} f_{|\Omega^-} & \textit{dans } \Omega^-, \\ u_{n|\partial\Omega} = 0 & \textit{sur } \partial\Omega \ , \end{cases} \tag{2.5.2}$$

où nous avons noté par $\delta_{0,n}$ le symbole de Kronecker et Ω^+, Ω^- les domaines exterieurs limites:

$$\begin{aligned} \Omega^+ &= \lim_{\delta \to 0} \Omega_\delta^+ \cup \bar{\Omega}_{\delta,2} \cup \Gamma_{\delta,2} \\ \Omega^- &= \Omega \backslash \bar{\Omega}^+ \end{aligned}$$

2.5.2 Développement interne

Le développement interne correspond au développement de la solution au voisinage de la couche mince, dans les deux parties Ω^1 et Ω^2 :

$$u_{int,\delta}^{[1]} = u_{int,0}^{[1]} + \delta u_{int,1}^{[1]} + \cdots, \ \textit{dans } \Omega^1, \tag{2.5.3}$$

$$u_{int,\delta}^{[2]} = u_{int,0}^{[2]} + \delta u_{int,1}^{[2]} + \cdots, \ \textit{dans } \Omega^2, \tag{2.5.4}$$

les termes $u_{int,n}^{[1]}$ et $u_{int,n}^{[2]}$ $(n \in \mathbb{N})$ sont indépendants de δ.

En utilisant le développement de Taylor dans la variable normale, on obtient:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n \geq 0} \delta^n u_n^-\right) \circ \Phi_1(m, s_1) &= u_{0|\Gamma}^- + \delta \left(u_{1|\Gamma}^- + s_1 p_1 \partial_n u_{0|\Gamma}^-\right) + \cdots \\ &= U_{int,0}^- + \delta U_{int,1}^- + \delta^2 U_{int,2}^- + \cdots, \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n \geq 0} \delta^n u_n^+\right) \circ \Phi_2(m, s_2) &= u_{0|\Gamma}^+ + \delta \left(u_{1|\Gamma}^+ + s_2 p_2 \partial_n u_{0|\Gamma}^+\right) + \cdots \\ &= U_{int,0}^+ + \delta U_{int,1}^+ + \delta^2 U_{int,2}^+ + \cdots, \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

De plus, les conditions de transmission s'écrivent:

$$u_{0|\Gamma}^+ + \delta \left(u_{1|\Gamma}^+ + s_2 p_2 \partial_n u_{0|\Gamma}^+\right) + \cdots = u_{int,0|s_2=1}^{[2]} + \delta u_{int,1|s_2=1}^{[2]} + \cdots, \tag{2.5.7}$$

$$u^-_{0|\Gamma} + \delta\left(u^-_{1|\Gamma} + s_1 p_1 \partial_n u^-_{0|\Gamma}\right) + \cdots = u^{[1]}_{int,0|s_1=-1} + \delta u^{[1]}_{int,1|s_1=-1} + \cdots, \tag{2.5.8}$$

Ainsi, de (b.3), (2.5.3) et (2.5.4) nous obtenons

$$u^{[1]}_{int,0|s_1=0} + \delta u^{[1]}_{int,1|s_1=0} + \cdots = u^{[2]}_{int,0|s_2=0} + \delta u^{[2]}_{int,1|s2=0} + \cdots. \tag{2.5.9}$$

D'autre part, en insérant le développement externe (2.5.1) dans la première équation de (2.5.2) et en utilisant la formule de Green, on obtient

$$\int_{\Omega_{\delta,2}} f_{|\Omega_{\delta,2}} v^2_{int} d\Omega_{\delta,2} = \alpha^+ \int_{\Omega_{\delta,2}} \nabla\left(\sum_{n\geq 0}\delta^n u^+_n\right).\nabla v^2_{int} d\Omega_{\delta,2}$$

$$+\left\langle \alpha^+\partial_n\left(\sum_{n\geq 0}\delta^n u^+_{n|\Gamma}\right), v^2_{int|\Gamma}\right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)}$$

$$-\left\langle \alpha^+\partial_{n_{\delta,2}}\left(\sum_{n\geq 0}\delta^n u^+_{n|\Gamma_{\delta,2}}\right), v^2_{int|\Gamma_{\delta,2}}\right\rangle_{H^{-1/2}\left(\Gamma_{\delta,2}\right)\times H^{1/2}\left(\Gamma_{\delta,2}\right)},$$

En utilisant le changement d'échelle $s_2 = \eta_2/\delta$, il vient

$$\int_{\Omega_{\delta,2}} f_{|\Omega_{\delta,2}} v^2_{int} d\Omega_{\delta,2} = \int_{\Gamma} \alpha^+\partial_n\left(\sum_{n\geq 0}\delta^n u^+_{n|\Gamma}\right) v^{[2]}_{int}(m,0)d\Gamma + \alpha^+ a^{[2]}_\delta\left(\sum_{n\geq 0}\delta^n U^+_{int,n}, v^{[2]}_{int}\right)$$

$$-\left\langle \alpha^+\partial_{n_{\delta,2}}\left(\sum_{n\geq 0}\delta^n u^+_{n|\Gamma_{\delta,2}}\right)\circ\Phi_2(m,1), v^{[2]}_{int}(m,1)\right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma\times\{1\})\times H^{1/2}(\Gamma\times\{1\})}. \tag{2.5.10}$$

De même, en insérant le développement externe (2.5.1) dans la première équation de (2.5.2) et en utilisant le changement d'échelle $s_1 = \eta_1/\delta$, on obtient:

$$\int_{\Omega_{\delta,1}} f_{|\Omega_{\delta,2}} v^1_{int} d\Omega_{\delta,1} = \alpha^- a^{[1]}_\delta\left(\sum_{n\geq 0}\delta^n U^-_{int,n}, v^{[1]}_{int}\right) - \int_{\Gamma} \alpha^-\partial_n\left(\sum_{n\geq 0}\delta^n u^-_{n|\Gamma}\right) v^{[1]}_{int}(m,0)d\Gamma$$

$$+\left\langle \alpha^-\partial_{n_{\delta,1}}\left(\sum_{n\geq 0}\delta^n u^-_{n|\Gamma_{\delta,1}}\right)\circ\Phi_2(m,-1), v^{[1]}_{int}(m,-1)\right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma\times\{-1\})\times H^{1/2}(\Gamma\times\{-1\})}. \tag{2.5.11}$$

Reportant les expressions (2.5.1),(2.5.3) et (2.5.4) dans (2.4.2) et utilisant (2.5.5)-(2.5.6) et (2.5.10)-(2.5.11), nous obtenons

$$\int_{\Gamma} \alpha^-\partial_n\left(\sum_{n\geq 0}\delta^n u^-_{n|\Gamma}\right) v^{[1]}_{int}(m,0)d\Gamma - \alpha^- a^{[1]}_\delta\left(\sum_{n\geq 0}\delta^n U^-_{int,n}, v^{[1]}_{int}\right)$$

$$+\sum_{\beta=1}^{2}\left[\alpha_\delta \delta a_\delta^{[\beta]}\left(\sum_{n\geq 0}\delta^n u_{int,n}^{[\beta]}, v_{int}^{[\beta]}\right)\right] - \alpha^+ a_\delta^{[2]}\left(\sum_{n\geq 0}\delta^n U_{int,n}^{+}, v_{int}^{[2]}\right)$$

$$-\int_\Gamma \alpha^+ \partial_n \left(\sum_{n\geq 0}\delta^n u_{n|\Gamma}^{+}\right) v_{int}^{[2]}(m,0)d\Gamma = 0. \tag{2.5.12}$$

Afin de déterminer les termes du développement asymptotique, on développe d'abord les formes bilinéaires $a_\delta^{[1]}(.,.)$ et $a_\delta^{[2]}(.,.)$ en puissances de δ. Pour ce faire, nous avons besoin des développements de $J_{\delta,1}^{-2}$ et $J_{\delta,2}^{-2}$ qui s'écrivent:

$$\begin{aligned}
J_{\delta,1}^{-2} &= I - 2s_1p_1\delta\Re + 3\left(s_1p_1\delta\Re\right)^2 + \cdots + n\left(-s_1p_1\delta\Re\right)^{n-1} + \left(-s_1p_1\delta\Re\right)^n\left[nJ_{\delta,1}^{-1} + J_{\delta,1}^{-2}\right], \\
J_{\delta,2}^{-2} &= I - 2s_2p_2\delta\Re + 3\left(s_2p_2\delta\Re\right)^2 + \cdots + n\left(-s_2p_2\delta\Re\right)^{n-1} + \left(-s_2p_2\delta\Re\right)^n\left[nJ_{\delta,2}^{-1} + J_{\delta,2}^{-2}\right],
\end{aligned}$$

la forme bilinéaire $a_\delta^{[\beta]}(.,.)$ admet le développement suivant :

$$a_\delta^{[1]}(.,.) = \delta^{-2}a_{0,2}^{[1]} + \delta^{-1}a_{1,2}^{[1]} + \left(a_{2,2}^{[1]} + a_{0,2}^{[1]}\right) + \delta a_{1,1}^{[1]} + \cdots + \delta^{n-1}a_{n-1,1}^{[1]} + \delta^n r_\delta^{[1]}(\delta;.,.) \tag{2.5.13}$$

$$a_\delta^{[2]}(.,.) = \delta^{-2}a_{0,2}^{[2]} + \delta^{-1}a_{1,2}^{[2]} + \left(a_{2,2}^{[2]} + a_{0,2}^{[2]}\right) + \delta a_{1,1}^{[2]} + \cdots + \delta^{n-1}a_{n-1,1}^{[2]} + \delta^n r_\delta^{[2]}(\delta;.,.) \tag{2.5.14}$$

où les formes bilinéaires $a_{k,l}^{[1]}(.,.)$ et $a_{k,l}^{[2]}(.,.)$ sont indépendantes de δ et sont données par

$$\begin{aligned}
a_{0,2}^{[1]}(u^{[1]},v^{[1]}) &= \int_{\Omega^1} p_1^{-1}\partial_{s_1}u^{[1]}\partial_{s_1}v^{[1]}d\Gamma ds_1, \\
a_{0,2}^{[2]}(u^{[2]},v^{[2]}) &= \int_{\Omega^2} p_1^{-1}\partial_{s_2}u^{[2]}\partial_{s_2}v^{[2]}d\Gamma ds_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{1,2}^{[1]}(u^{[1]},v^{[1]}) &= \int_{\Omega^1} 2Hs_1\partial_{s_1}u^{[1]}\partial_{s_1}v^{[1]}d\Gamma ds_1, \\
a_{1,2}^{[2]}(u^{[2]},v^{[2]}) &= \int_{\Omega^2} 2Hs_2\partial_{s_2}u^{[2]}\partial_{s_2}v^{[2]}d\Gamma ds_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{2,2}^{[1]}(u^{[1]},v^{[1]}) &= \int_{\Omega^1} p_1Ks_1^2\partial_{s_1}u^{[1]}\partial_{s_1}v^{[1]}d\Gamma ds_1, \\
a_{2,2}^{[2]}(u^{[2]},v^{[2]}) &= \int_{\Omega^2} p_1Ks_2^2\partial_{s_2}u^{[2]}\partial_{s_2}v^{[2]}d\Gamma ds_2,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_{0,1}^{[1]}(u^{[1]}, v^{[1]}) &= \int\limits_{\Omega^1} p_1 \nabla_\Gamma u^{[1]}.\nabla_\Gamma v^{[1]} d\Gamma ds_1, \\
a_{0,1}^{[2]}(u^{[2]}, v^{[2]}) &= \int\limits_{\Omega^2} p_2 \nabla_\Gamma u^{[2]}.\nabla_\Gamma v^{[2]} d\Gamma ds_2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{1,1}^{[1]}(u^{[1]}, v^{[1]}) &= \int\limits_{\Omega^1} 2p_1^2 s_1 (HI - \Re) \nabla_\Gamma u^{[1]}.\nabla_\Gamma v^{[1]} d\Gamma ds_1, \\
a_{1,1}^{[2]}(u^{[2]}, v^{[2]}) &= \int\limits_{\Omega^2} 2p_2^2 s_2 (HI - \Re) \nabla_\Gamma u^{[2]}.\nabla_\Gamma v^{[2]} d\Gamma ds_2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{2,1}^{[1]}(u^{[1]}, v^{[1]}) &= \int\limits_{\Omega^1} p_1^3 (KI - 4H\Re + 3\Re^2) s_1^2 \nabla_\Gamma u^{[1]}.\nabla_\Gamma v^{[1]} d\Gamma ds_1, \\
a_{2,1}^{[2]}(u^{[2]}, v^{[2]}) &= \int\limits_{\Omega^2} p_1^3 (KI - 4H\Re + 3\Re^2) s_2^2 \nabla_\Gamma u^{[2]}.\nabla_\Gamma v^{[2]} d\Gamma ds_2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{n-1,1}^{[1]}(u^{[1]}, v^{[1]}) &= \int\limits_{\Omega^1} p_1^n \left[(n-2)K\Re^{n-3} - (n-1)2H\Re^{n-2} + n\Re^{n-1}\right] (-s_1)^{n-1} \nabla_\Gamma u^{[1]}.\nabla_\Gamma v^{[1]} d\Gamma ds_1, n > 3, \\
a_{n-1,1}^{[2]}(u^{[2]}, v^{[2]}) &= \int\limits_{\Omega^2} p_2^n \left[(n-2)K\Re^{n-3} - (n-1)2H\Re^{n-2} + n\Re^{n-1}\right] (-s_2)^{n-1} \nabla_\Gamma u^{[2]}.\nabla_\Gamma v^{[2]} d\Gamma ds_2, n > 3.
\end{aligned}
$$

Les formes bilinéaires $r_\delta^{[1]}(\delta; ., .)$ et $r_\delta^{[2]}(\delta; ., .)$ sont les restes du développements (2.5.13) et (2.5.14) et sont donnée par

$$
r_\delta^{[1]}(\delta; u^{[1]}, v^{[1]}) = \int\limits_{\Omega^1} \left(B_{n,\delta} + 2HB_{n-1,\delta} + KB_{n-2,\delta}\right) s_1^n \nabla_\Gamma u^{[1]}.\nabla_\Gamma v^{[1]} d\Gamma ds_1,
$$

avec

$$
\begin{aligned}
B_{n,\delta} &= \begin{cases} (-\Re)^n \left(nJ_{\delta,1}^{-1} + J_{\delta,1}^{-2}\right) & si\ n \geq 0 \\ J_{\delta,1}^{-2} & sinon \end{cases} \\
B_{n,\delta} &= \begin{cases} (-\Re)^n \left(nJ_{\delta,2}^{-1} + J_{\delta,2}^{-2}\right) & si\ n \geq 0 \\ J_{\delta,2}^{-2} & sinon \end{cases}
\end{aligned}
$$

De (2.5.13), (2.5.14) et (2.5.12), on obtient, par identification des termes de même puissance en δ, une hiérarchie d'équations:

$$a_{0,2}^{[1]}(\alpha_\delta u_{int,0}^{[1]} - \alpha^- U_{int,0}^-, v_{int}^{[1]}) + a_{0,2}^{[2]}(\alpha_\delta u_{int,0}^{[2]} - \alpha^+ U_{int,0}^+, v_{int}^{[2]}) = 0, \tag{2.5.15}$$

$$\begin{aligned}
&a_{1,2}^{[1]}(\alpha_\delta u_{int,0}^{[1]} - \alpha^- U_{int,0}^-, v_{int}^{[1]}) + a_{0,2}^{[1]}(\alpha_\delta u_{int,1}^{[1]} - \alpha^- U_{int,1}^-, v_{int}^{[1]}) \\
&+a_{1,2}^{[1]}(\alpha_\delta u_{int,0}^{[2]} - \alpha^+ U_{int,0}^+, v_{int}^{[2]}) + a_{0,2}^{[2]}(\alpha_\delta u_{int,1}^{[2]} - \alpha^+ U_{int,1}^+, v_{int}^{[2]}) \\
&= \alpha^+ \int_\Gamma \partial_n u_{0|\Gamma}^+ v_{int}^{[2]}(m,0) d\Gamma - \alpha^- \int_\Gamma \partial_n u_{0|\Gamma}^- v_{int}^{[1]}(m,0) d\Gamma,
\end{aligned} \tag{2.5.16}$$

$\forall\ v_{int}^{[1]} \in H^1(I_1; L^2(\Gamma))$ et $v_{int}^{[2]} \in H^1(I_2; L^2(\Gamma))$ telle que $v_{int}^{[1]}(.,0) = v_{int}^{[2]}(.,0)$, et

$$\begin{aligned}
&a_{0,2}^{[1]}(\alpha_\delta u_{int,2}^{[1]} - \alpha^- U_{int,2}^-, v_{int}^{[1]}) + a_{1,2}^{[1]}(\alpha_\delta u_{int,1}^{[1]} - \alpha^- U_{int,1}^-, v_{int}^{[1]}), \\
&+ \left(a_{2,2}^{[1]} + a_{0,2}^{[1]}\right)\left(\alpha_\delta u_{int,0}^{[1]} - \alpha^- U_{int,0}^-, v_{int}^{[1]}\right) \\
&+a_{0,2}^{[2]}(\alpha_\delta u_{int,2}^{[2]} - \alpha^+ U_{int,2}^+, v_{int}^{[2]}) + a_{1,2}^{[2]}(\alpha_\delta u_{int,1}^{[2]} - \alpha^+ U_{int,1}^+, v_{int}^{[2]}) \\
&+ \left(a_{2,2}^{[2]} + a_{0,2}^{[2]}\right)\left(\alpha_\delta u_{int,0}^{[2]} - \alpha^+ U_{int,0}^+, v_{int}^{[2]}\right) \\
&= \alpha^+ \int_\Gamma \partial_n u_{1|\Gamma}^+ v_{int}^{[2]}(m,0) d\Gamma - \alpha^- \int_\Gamma \partial_n u_{1|\Gamma}^- v_{int}^{[1]}(m,0) d\Gamma,
\end{aligned} \tag{2.5.17}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}
&a_{0,2}^{[1]}(\alpha_\delta u_{int,n+1}^{[1]} - \alpha^- U_{int,n+1}^-, v_{int}^{[1]}) + a_{1,2}^{[1]}(\alpha_\delta u_{int,n}^{[1]} - \alpha^- U_{int,n}^-, v_{int}^{[1]}) \\
&+a_{2,2}^{[1]}(\alpha_\delta u_{int,n-1}^{[1]} - \alpha^- U_{int,n-1}^-, v_{int}^{[1]}) + a_{0,1}^{[1]}(\alpha_\delta u_{int,n-1}^{[1]} - \alpha^- U_{int,n-1}^-, v_{int}^{[1]}) \\
&+a_{1,1}^{[1]}(\alpha_\delta u_{int,n-2}^{[1]} - \alpha^- U_{int,n-2}^-, v_{int}^{[1]}) + a_{2,1}^{[1]}(\alpha_\delta u_{int,n-3}^{[1]} - \alpha^- U_{int,n-3}^-, v_{int}^{[1]}) \\
&+\sum_{l=4}^{n} a_{l-1,1}^{[1]}(\alpha_\delta u_{int,n-l}^{[1]} - \alpha^- U_{int,n-l}^-, v_{int}^{[1]}) + a_{0,2}^{[1]}(\alpha_\delta u_{int,n+1}^{[2]} - \alpha^+ U_{int,n+1}^+, v_{int}^{[2]}) \\
&+a_{1,2}^{[2]}(\alpha_\delta u_{int,n}^{[2]} - \alpha^+ U_{int,n}^+, v_{int}^{[2]}) + a_{2,2}^{[2]}(\alpha_\delta u_{int,n-1}^{[2]} - \alpha^+ U_{int,n-1}^+, v_{int}^{[2]}) \\
&+a_{0,1}^{[2]}(\alpha_\delta u_{int,n-1}^{[2]} - \alpha^+ U_{int,n-1}^+, v_{int}^{[2]}) + a_{1,1}^{[2]}(\alpha_\delta u_{int,n-2}^{[2]} - \alpha^+ U_{int,n-2}^+, v_{int}^{[2]}) \\
&+a_{2,1}^{[2]}(\alpha_\delta u_{int,n-3}^{[2]} - \alpha^+ U_{int,n-3}^+, v_{int}^{[2]}) + \sum_{l=4}^{n} a_{l-1,1}^{[2]}(\alpha_\delta u_{int,n-l}^{[2]} - \alpha^+ U_{int,n-l}^-, v_{int}^{[2]}) \\
&= \alpha^+ \int_\Gamma \partial_n u_{n|\Gamma}^+ v_{int}^{[2]}(m,0) d\Gamma - \alpha^- \int_\Gamma \partial_n u_{n|\Gamma}^- v_{int}^{[1]}(m,0) d\Gamma, n \geq 4,
\end{aligned} \tag{2.5.18}$$

$\forall\ v_{int}^{[1]} \in H^1(\Gamma \times I_1)$ et $v_{int}^{[2]} \in H^1(\Gamma \times I_2)$ telle que $v_{int}^{[1]}(.,0) = v_{int}^{[2]}(.,0)$.

2.5.3 Calcul des premiers termes du développement asymptotique

Afin d'identifier les premiers termes du développement asymptotique, nous introduisons le théorème ci-desous:

Théorème 2.5.1 *si* $F^- \in L^2(\Omega^-)$, $F^+ \in L^2(\Omega^+)$, $h \in H^{1/2}(\Gamma)$ *et* $\zeta \in H^{-1/2}(\Gamma)$, *alors le problème*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha^-\nabla U^-) = F^- & \textit{dans } \Omega^-, \\ -\operatorname{div}(\alpha^+\nabla U^+) = F^+ & \textit{dans } \Omega^+, \\ U^-_{|\Gamma} - U^+_{|\Gamma} = h & \textit{sur } \Gamma, \\ \alpha^-\partial_n U^-_{|\Gamma} - \alpha^+\partial_n U^+_{|\Gamma} = \zeta & \textit{sur } \Gamma, \\ U^+_{|\partial\Omega} = 0 & \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.5.19}$$

admet une solution unique (U^-, U^+) dans $H^1(\Omega^-) \times H^1(\Omega^+)$. De plus, pour tout k_0 dans $\mathbb{N}$ tel que $F^- \in H^{k_0-2}(\Omega^-)$, $F^+ \in H^{k_0-2}(\Omega^+)$, $h \in H^{k_0-1/2}(\Gamma)$, $\zeta \in H^{k_0-3/2}(\Gamma)$ et $\Gamma \cup \partial\Omega$ est $\mathcal{C}^{k_0}$-continue. si $(U^-, U^+) \in H^1(\Omega^-) \times H^1(\Omega^+)$ est solution de (2.5.19). Alors pour tout entier strictement positif $k \leq k_0$, il existe une constante c_k telle que

$$||U^-||_{H^k(\Omega^-)} + ||U^+||_{H^k(\Omega^+)} \leq c_k \left(||F^-||_{H^{k_0-2}(\Omega^-)} + ||F^+||_{H^{k_0-2}(\Omega^+)} + ||h||_{H^{k_0-1/2}(\Gamma)} + ||\zeta||_{H^{k_0-3/2}(\Gamma)} \right). \tag{2.5.20}$$

Preuve. [4]Considérons une fonction V^- définie sur l'ouvert Ω^- et vérifiant le problème:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha^-\nabla V^-) = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ V^-_{|\Gamma} = h & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{2.5.21}$$

Il s'agit d'un problème de Dirichlet non homogène.

Si $h \in H^{1/2}(\Gamma)$, il existe un relèvement de h que l'on notera Rh qui appartient à l'espace fonctionnel $H^1(\Omega^-)$ et tel que:

$$Rh_{|\Gamma} = h$$

Poson $V_h = V^- - Rh$, V_h vérifie le problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha^-\nabla V_h) = \operatorname{div}(\alpha^-\nabla(Rh)) & \text{dans } \Omega^- \\ V_h = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

qui n'est rien d'autre que le problème de Dirichlet homogène (2.1.1), avec $f = \operatorname{div}\left(\alpha^- \nabla (Rh)\right)$. Le théorème 2.1.1 assure alors l'existence et l'unicité de la solution V_h dans $H^1(\Omega^-)$. Par conséquent, V^- existe et est unique. De plus, en se referant à l'estimation donnée par le théorème 2.1.1, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|V_h\|_{H^1(\Omega^-)} &\leq c\|f\|_{L^2(\Omega^-)} \\ &\leq c\|Rh\|_{H^1(\Omega^-)} \leq c\|h\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \end{aligned}$$

et comme $V^- = V_h + Rh$, alors on déduit

$$\|V^-\|_{H^1(\Omega^-)} \leq c\|h\|_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

posons maintenant:

$$\tilde{U}^- = U^- - V^-. \tag{2.5.22}$$

en remplaçant U^- par $\tilde{U}^- + V^-$ dans le problème (2.5.19), on obtient:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\alpha^- \nabla \tilde{U}^-\right) = F^- & \text{dans } \Omega^-, \\ -\operatorname{div}\left(\alpha^+ \nabla U^+\right) = F^+ & \text{dans } \Omega^+, \\ \tilde{U}^-_{|\Gamma} - U^+_{|\Gamma} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \alpha^- \partial_n \tilde{U}^-_{|\Gamma} - \alpha^+ \partial_n U^+_{|\Gamma} = \zeta - \alpha^- \partial_n V^-_{|\Gamma} & \text{sur } \Gamma, \\ U^+_{|\partial\Omega} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

La formulation variationnelle associée à ce problème s'écrit:

$$\begin{cases} \textit{trouver } U \in H_0^1(\Omega), \ \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ a(U, v) = l(v), \end{cases} \tag{2.5.23}$$

$$a(u, v) = \alpha^- \int_{\Omega^-} \nabla u_{|\Omega^-} . \nabla v_{|\Omega^-} d\Omega^- + \alpha^+ \int_{\Omega^+} \nabla u_{|\Omega^+} . \nabla v_{|\Omega^+} d\Omega^+,$$

et

$$l(v) = \int_{\Omega^-} F^- v_{|\Omega^-} d\Omega^- + \int_{\Omega^+} F^+ v_{|\Omega^+} d\Omega^+ + \left\langle \zeta - \alpha^- \partial_n V^-_{|\Gamma}, v_{|\Gamma} \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)}.$$

Nous avons déja démontré la continuité et la coercivité de la forme bilinéaire $a(.,.)$ (voir la preuve du théorème 2.1.1). Nous allons maintenant montrer la continuité de la forme $l(.)$.

Nous avons

$$|l(v)| \leq \int_{\Omega^-} \left|F^- v_{|\Omega^-}\right| d\Omega^- + \int_{\Omega^+} |F^+ v_{|\Omega^+}| d\Omega^+ + \left|\left\langle \zeta, v_{|\Gamma}\right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)}\right| + \left|\left\langle \alpha^- \partial_n V^-_{|\Gamma}, v_{|\Gamma}\right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)}\right|$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-shwartz et à la continuité des opérateurs trace, on obtient

$$|l(v)| \leq \left[||F^-||_{L^2(\Omega^-)} + ||F^+||_{L^2(\Omega^+)} + ||\xi||_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \alpha^- \left\|\partial_n V^-_{|\Gamma}\right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}\right] \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

D'ou la continuité de $l(.)$.

Le théorème de Lax-Milgram asure alors l'existence et l'unicité de (U^-, U^+).

D'autre part, la coercivité de la forme $a(.,.)$ permet de déduire l'estimation annoncée le théorème.

La régularité de la solution se démontre par recurrence par rapport à k_0 et en utilisant une partition de l'unité de l'ouvert Ω. ■

Pour identifier les problèmes résolus par les premiers termes du développement asymptotique, nous utiliserons le lemme technique énoncé ci-dessous:

Lemme 2.5.1 *soient $q^{[1]}$, $q^{[2]}$ dans $L^2(\Gamma)$, $\theta^{[1]}$, $\theta^{[2]}$ dans $L^2(\Omega^1)$ et $L^2(\Omega^2)$ respectivement et $k^{[1]}$, $k^{[2]}$ dans $L^2(\Omega^1, \mathbb{C}^3)$ et $L^2(\Omega^2, \mathbb{C}^3)$. on suppose que les applications $s_1 \to k^{[1]}(., s_1)$ $\big($resp, $s_2 \to k^{[2]}(., s_2)\big)$ définie presque partout dans $]0,1[$ sont à valeurs dans l'espace des champs de vecteurs tangents à Γ. On suppose aussi que* $\operatorname{div}_\Gamma k^{[1]} \in L^2(\Omega^1)$ *et que* $\operatorname{div}_\Gamma k^{[2]} \in L^2(\Omega^2)$. *Alors, la solution des équations variationnelles:*

$$\mathcal{L}^{[1]} v^{[1]} = \int_{\Omega^1} h^{[1]} \partial_{s_1} v^{[1]} d\Gamma ds_1 + \int_{\Omega^1} \left(k^{[1]}.\nabla_\Gamma v^{[1]} + \theta^{[1]} v^{[1]}\right) d\Gamma ds_1$$

$$+ \int_\Gamma q^{[1]}(m) v^{[1]}\left(m, (-1)^1\right) d\Gamma = 0; \forall v^{[1]} \in H^1(\Omega^1), v^{[1]}(m,0) = 0,$$

et

$$\mathcal{L}^{[2]} v^{[2]} = \int_{\Omega^2} h^{[2]} \partial_{s_2} v^{[2]} d\Gamma ds_2 + \int_{\Omega^2} \left(k^{[2]}.\nabla_\Gamma v^{[2]} + \theta^{[2]} v^{[2]}\right) d\Gamma ds_2$$

$$+ \int_\Gamma q^{[2]}(m) v^{[2]}(m, -1)\, d\Gamma = 0; \forall v^{[2]} \in H^1(\Omega^2), v^{[2]}(m,0) = 0,$$

sont donnée par:

$$\begin{aligned} h^{[1]}(m,s_1) &= q^{[1]}(m) + \int\limits_{-1}^{s_1} \left(\operatorname{div}_\Gamma k^{[1]} - \theta^{[1]}\right)(m,\lambda)d\lambda, \\ h^{[2]}(m,s_2) &= -q^{[2]}(m) + \int\limits_{s_2}^{1} \left(\operatorname{div}_\Gamma k^{[2]} - \theta^{[2]}\right)(m,\lambda)d\lambda, \end{aligned}$$

De plus, si $v^{[1]}(m,0) \neq 0$ *et* $v^{[2]}(m,0) \neq 0$*, alors:*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{[1]}v^{[1]} &= \int\limits_\Gamma \left[q^{[1]}(m) + \int\limits_{-1}^{0} \left(\operatorname{div}_\Gamma k^{[1]} - \theta^{[1]}\right)(m,s_1)ds_1\right] v^{[1]}(m,0)d\Gamma. \\ \mathcal{L}^{[2]}v^{[2]} &= \int\limits_\Gamma \left[q^{[2]}(m) - \int\limits_{0}^{1} \left(\operatorname{div}_\Gamma k^{[2]} - \theta^{[2]}\right)(m,s_2)ds_2\right] v^{[2]}(m,0)d\Gamma. \end{aligned}$$

Identification des termes d'ordre 0

Considérons l'équation variationnelle (2.5.15) et choisissons la fonction test $v_{int}^{[2]} = 0$. Ceci annulle la partie $a_{0,2}^{[2]}(.,.)$ de cette équation et on obtient:

$$a_{0,2}^{[1]}\left(\alpha_\delta u_{int,0}^{[1]} - \alpha^- U_{int,0}^-, v_{int}^{[1]}\right) = 0.$$

On applique alors le Lemme (2.5.1), en considérant l'équation variationnelle $\mathcal{L}^{[1]}v^{[1]}$ avec:

$$\begin{aligned} h^{[1]} &= p_1^{-1}\alpha_\delta \partial s_1 u_{int,0}^{[1]} - \alpha^- \partial s_1 U_{int,0}^- = p_1^{-1}\alpha_\delta \partial s_1 u_{int,0}^{[1]} \\ k^{[1]} &= 0 \\ \theta^{[1]} &= 0 \\ q^{[1]} &= 0 \end{aligned}$$

Ceci donne alors $h^{[1]} = 0$, ce qui implique $\partial s_1 u_{int,0}^{[1]} = 0$. La fonction $u_{int,0}^{[1]}$ est alors indépendante de la variable s_1 $\left(u_{int,0}^{[1]}\text{ est constante par rapport à } s_1\right)$. En utilisant les condition de transmission, on déduit que:

$$u_{int,0}^{[1]}(m,s_1) = u_{0|\Gamma}^-. \tag{2.5.24}$$

De même, en considérant toujours l'équation (2.5.15) et en choisissant cette fois-ci la fonction $v_{int}^{[1]} = 0$, on obtient:

$$a_{0,2}^{[2]}(\alpha_\delta u_{int,0}^{[2]} - \alpha^+ U_{int,0}^+, v_{int}^{[2]}) = 0.$$

En appliquant le lemme (2.5.1) avec:

$$\begin{aligned}
h^{[2]} &= p_2^{-1}\alpha_\delta \partial s_2 u_{int,0}^{[2]} - \alpha^+ \partial s_2 U_{int,0}^+ = p_2^{-1}\alpha_\delta \partial s_2 u_{int,0}^{[2]} \\
k^{[2]} &= 0 \\
\theta^{[2]} &= 0 \\
q^{[2]} &= 0
\end{aligned}$$

on obtient $h^{[2]} = 0$, ce qui implique $\partial s_2 u_{int,0}^{[2]} = 0$.

Les condition de transmission montre alors que:

$$u_{int,0}^{[2]}(m, s_2) = u_{0|\Gamma}^+. \tag{2.5.25}$$

Mais comme sur Γ, on a:

$$u_{int}^{[2]} = u_{int}^{[1]} \tag{2.5.26}$$

alors on déduit de (2.5.24), (2.5.25) et (2.5.26) la premiére condition de transmission:

$$u_{0|\Gamma}^+ = u_{0|\Gamma}^- \tag{2.5.27}$$

par alleur, l'utilisation du lemme (2.5.1) permet aussi d'identifier la condition de transmission portant sur les dérivées normales. En effet son application nous donne:

$$\alpha^- \partial_n u_{0|\Gamma}^- = p_1^{-1}\alpha_\delta \partial s_1 u_{int,1}^{[1]} \tag{2.5.28}$$

$$\alpha^+ \partial_n u_{0|\Gamma}^+ = p_2^{-1}\alpha_\delta \partial s_2 u_{int,1}^{[2]} \tag{2.5.29}$$

et comme :

$$\alpha^- \int_\Gamma \partial_n u_{0|\Gamma}^- v_{int}^{[1]}(m,0)d\Gamma = \alpha^+ \int_\Gamma \partial_n u_{0|\Gamma}^+ v_{int}^{[2]}(m,0)d\Gamma$$

et $v_{int}^{[1]}(m,0) = v_{int}^{[2]}(m,0)$ (transmission) pour tout $v_{int}^{[1]}$ dans $H^1(\Omega^1)$ et tout $v_{int}^{[2]}$ dans $H^1(\Omega^2)$, alors

$$\alpha^- \partial_n u_{0|\Gamma}^- = \alpha^+ \partial_n u_{0|\Gamma}^+. \tag{2.5.30}$$

En tenant compte des résultas précédents , et en posant $u_n = u_n^-$, si $x \in \Omega^-$ et $u_n = u_n^+$, si $x \in \Omega^+$, et en utilisant le théorème précédent, on déduit que u_0 est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha_0 \nabla u_0) = f & \text{dans } \Omega \text{ ,} \\ u_{0|\partial\Omega} = 0 & \text{dans } \partial\Omega \text{ .} \end{cases}$$

où $\alpha_0 = \alpha^-$ si $x \in \Omega^-$ et $\alpha_0 = \alpha^+$ si $x \in \Omega^+$

Termes d'ordre 1

Les termes intérieurs d'ordre 1 s'obtiennent en intégrant les relation (2.5.28) et (2.5.29) par rapport à s. Ainsi, nous avons:

$$\begin{aligned} u^{[1]}_{int,1}(m,s_1) &= u^{[1]}_{int,1}(m,-1) + (s_1+1)p_1\alpha^-\alpha_\delta^{-1}\partial_n u^-_{0|\Gamma} \\ &= u^-_{1|\Gamma} + p_1\left[(s_1+1)\alpha^-\alpha_\delta^{-1} - 1\right]\partial_n u^-_{0|\Gamma},\ \forall (m,s_1)\in\Omega^1, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u^{[2]}_{int,1}(m,s_2) &= u^{[2]}_{int,1}(m,1) + (s_2-1)p_2\alpha^+\alpha_\delta^{-1}\partial_n u^+_{0|\Gamma} \\ &= u^+_{1|\Gamma} + p_2\left[(s_1-1)\alpha^+\alpha_\delta^{-1} + 1\right]\partial_n u^+_{0|\Gamma},\ \forall (m,s_2)\in\Omega^2, \end{aligned}$$

L'identification des termes d'ordre 1 dans (2.5.9) donne alors:

$$u^-_{1|\Gamma} - u^+_{1|\Gamma} = p_1\left(1-\alpha^-\alpha_\delta^{-1}\right)\partial_n u^-_{0|\Gamma} + p_2\left(1-\alpha^+\alpha_\delta^{-1}\right)\partial_n u^+_{0|\Gamma}. \tag{2.5.31}$$

par ailleur, on choisit $v^{[2]}_{int} = 0$ dans (2.5.17) il vient

$$a^{[1]}_{0,2}\left(\alpha_\delta u^{[1]}_{int,2} - \alpha^- U^-_{int,2}, v^{[1]}_{int}\right) + a^{[1]}_{0,1}\left(\alpha_\delta u^{[1]}_{int,0} - \alpha^- U^-_{int,0}, v^{[1]}_{int}\right) = 0$$

L'application du Lemme (2.5.1) avec

$$\begin{aligned} h^{[1]} &= \frac{\alpha_\delta}{p_1}\partial s_1 u^{[1]}_{int,2} - \frac{\alpha^-}{p_1}\partial s_1 U^-_{int} = \frac{\alpha_\delta}{p_1}\partial s_1 u^{[1]}_{int,2} - \alpha^-\partial_n u^-_{1|\Gamma} - s_1 p_1\alpha^-\partial_n^2 u^-_{0|\Gamma}, \\ k^{[1]} &= p_1\nabla_\Gamma\left(\alpha_\delta u^{[1]}_{int,0} - \alpha^- U^-_{int,0}\right) = p_1\left(\alpha_\delta - \alpha^-\right)\nabla_\Gamma u^-_{0|\Gamma},\ \theta^{[1]} = 0,\ q^{[1]} = 0. \end{aligned}$$

donne

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha_\delta}{p_1}\partial s_1 u^{[1]}_{int,2}(m,s_1) - \alpha^-\partial_n u^-_{1|\Gamma} - s_1 p_1\alpha^-\partial_n^2 u^-_{0|\Gamma} \\ =\ &-(s_1+1)p_1\left(\alpha_\delta - \alpha^-\right)\Delta_\Gamma u^-_{0|\Gamma}. \end{aligned}$$

De plus, pour toute fonction $v^{[1]}_{int}$ dans $H^1(\Omega^1)$ nous avons

$$\begin{aligned} &a^{[1]}_{0,2}\left(\alpha_\delta u^{[1]}_{int,2} - \alpha^- U^-_{int,2}, v^{[1]}_{int}\right) + a^{[1]}_{0,1}\left(\alpha_\delta u^{[1]}_{int,0} - \alpha^- U^-_{int,0}, v^{[1]}_{int}\right) \\ =\ &-\int_\Gamma p_1\left(\alpha_\delta - \alpha^-\right)\Delta_\Gamma u^-_{0|\Gamma} v^{[1]}_{int}(m,0)d\Gamma. \end{aligned}$$

et de la même manière:

$$\begin{aligned} & a_{0,2}^{[2]}\left(\alpha_\delta u_{int,2}^{[2]}-\alpha^+U_{int,2}^+,v_{int}^{[2]}\right)+a_{0,1}^{[2]}\left(\alpha_\delta u_{int,0}^{[2]}-\alpha^+U_{int,0}^+,v_{int}^{[2]}\right) \\ = & -\int_\Gamma p_2\left(\alpha_\delta-\alpha^+\right)\Delta_\Gamma u_{0|\Gamma}^+ v_{int}^{[2]}(m,0)d\Gamma. \end{aligned}$$

Pour tout $v_{int}^{[2]}$ dans $H^1\left(\Omega^2\right)$. Ceci donne alors

$$\alpha^-\partial_n u_{1|\Gamma}^- - \alpha^+\partial_n u_{1|\Gamma}^+ = p_1\left(\alpha_\delta-\alpha^-\right)\Delta_\Gamma u_{0|\Gamma}^- + p_2\left(\alpha_\delta-\alpha^+\right)\Delta_\Gamma u_{0|\Gamma}^+ \tag{2.5.32}$$

Rassemblant tous ces résultats et en utilisant le théorème (2.5.1), nous déduisons que u_1 est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\alpha^-\nabla u_1^-\right)=0 & \text{dans } \Omega^- \\ -\operatorname{div}\left(\alpha^+\nabla u_1^+\right)=0 & \text{dans } \Omega^+ \\ u_{1|\partial\Omega}^+=0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u_{1|\Gamma}^- - u_{1|\Gamma}^+ = p_1\left(1-\frac{\alpha^-}{\alpha_\delta}\right)\partial_n u_{0|\Gamma}^- + p_2\left(1-\frac{\alpha^+}{\alpha_\delta}\right)\partial_n u_{0|\Gamma}^+ & \text{sur } \Gamma \\ \alpha^-\partial_n u_{1|\Gamma}^- - \alpha^+\partial_n u_{1|\Gamma}^+ = p_1\left(\alpha_\delta-\alpha^-\right)\Delta_\Gamma u_{0|\Gamma}^- + p_2\left(\alpha_\delta-\alpha^+\right)\Delta_\Gamma u_{0|\Gamma}^+ & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Remarque 2.5.1 *Il résulte de (2.5.25), (2.5.26), (2.5.27) et (2.5.30) que les conditions de transmission sur Γ s'écrivent:*

$$\begin{aligned} u_{1|\Gamma}^- - u_{1|\Gamma}^+ &= \left[p_1\left(1-\frac{\alpha^-}{\alpha_\delta}\right)+p_2\left(\frac{\alpha^-}{\alpha^+}-\frac{\alpha^-}{\alpha_\delta}\right)\right]\partial_n u_{0|\Gamma}^-, \\ \alpha^-\partial_n u_{1|\Gamma}^- - \alpha^+\partial_n u_{1|\Gamma}^+ &= \left[p_1\left(\alpha_\delta-\alpha^-\right)+p_2\left(\alpha_\delta-\alpha^+\right)\right]\Delta_\Gamma u_{0|\Gamma}^-. \end{aligned}$$

2.6 Conditions de transmission approchées

Pour déterminer un modéle approché qui rend compte de l'ffet de la couche mince, nous tronquons la série donnant le développement asymptotique de la solution à un ordre donné. Les conditions de transmission ainsi obtenues sur Γ fourniront les conditions approchées recherchées.

2.6.1 Condition de transmission d'ordre 0

On garde un seul terme dans le développement asymptotique:

$$\begin{array}{rcl} u_\delta^- & \simeq & u_\delta^{-,(0)} = u_0^- \\ u_\delta^+ & \simeq & u_\delta^{+,(0)} = u_0^+ \\ u_{int,\delta} & \simeq & u_{int,\delta}^{(0)} = u_{int,0} \end{array}$$

En exploitant les problèmes résolus par ces differents termes, on déduit le problème approché d'ordre 0

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\alpha^- \nabla u_\delta^{-,(0)}\right) = f_{|\Omega^-} & \text{dans } \Omega^-, \\ -\operatorname{div}\left(\alpha^+ \nabla u_\delta^{+,(0)}\right) = f_{|\Omega^+} & \text{dans } \Omega^+, \\ u_{\delta|\Gamma}^{-,(0)} = u_{\delta|\Gamma}^{+,(1)} & \text{sur } \Gamma, \\ \alpha^- \partial_n u_{\delta|\Gamma}^{-,(0)} = \alpha^+ \partial_n u_{\delta|\Gamma}^{+,(1)} & \text{sur } \Gamma, \\ u_{\delta|\partial\Omega}^{+,(0)} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Remarque 2.6.1 *Le problème approché d'ordre* 0 *ci-dessus ne rend pas compte de l'effet de la couche mince. Il s'agit d'un problème de transmission entre* Ω^- *et* Ω^+ *qui correspond au modèle limite* (*quand* $\delta \to 0$)*. Pour obtenir un modèle approché qui rend compte de l'effet de* Ω_δ*, on pausse le développent à l'ordre* 1.

2.6.2 Condition de transmission d'ordre 1

Nous tronquons les séries définissant les développements asymptotiques de la solution conservant les deux premiers termes:

$$\begin{array}{rcll} u_\delta^- & \simeq & u_\delta^{-,(1)} = u_0^- + \delta u_1^- & \text{dans } \Omega_\delta^- \\ u_\delta^+ & \simeq & u_\delta^{+,(1)} = u_0^+ + \delta u_1^+ & \text{dans } \Omega_\delta^+ \\ u_{int,\delta} & \simeq & u_{int,\delta}^{(01)} = u_{int,0} + \delta u_{int,1} & \text{dans } \Omega_\delta \end{array}$$

où

$$\begin{array}{rcl} u_{int,\delta|\Omega_{\delta,1}}^{(1)}(x) & = & u_{int,\delta}^{1,(1)}(x) = u_{int,\delta}^{1,(1)}(m, \delta s_1) = u_{int,\delta}^{[1],(1)}(m, s_1) \\ & = & u_{0|\Gamma}^- + \delta\left(u_{1|\Gamma}^- + p_1\left[(s_1+1)\dfrac{\alpha^-}{\alpha_\delta} - 1\right]\partial_n u_{0|\Gamma}^-\right), \\ \forall x & = & \Phi_1(m, s_1) \in \Omega_{\delta,1}, \end{array} \tag{2.6.1}$$

$$\begin{aligned}
u^{(1)}_{int,\delta|\Omega_{\delta,2}}(x) &= u^{2,(1)}_{int,\delta}(x) = u^{2,(1)}_{int,\delta}(m,\delta s_2) = u^{[2],(1)}_{int,\delta}(m,s_2) \\
&= u^+_{0|\Gamma} + \delta\left(u^+_{1|\Gamma} + p_2\left[(s_2-1)\frac{\alpha^+}{\alpha_\delta}+1\right]\partial_n u^+_{0|\Gamma}\right), \\
\forall x &= \Phi_2(m,s_2) \in \Omega_{\delta,2}, \qquad (2.6.2)
\end{aligned}$$

En exploitant les problèmes résolus par les termes d'ordre 1, on obtient:

$$\begin{cases}
-\operatorname{div}\left(\alpha^-\nabla u^{-,(1)}_\delta\right) = f_{|\Omega^-} & \text{dans } \Omega^-, \\
-\operatorname{div}\left(\alpha^+\nabla u^{+,(1)}_\delta\right) = f_{|\Omega^+} & \text{dans } \Omega^+, \\
u^{-,(1)}_{\delta|\Gamma} - u^{+,(1)}_{\delta|\Gamma} = \delta A\left(u^{-,(1)}_\delta\right) - \delta^2\xi_\delta & \text{sur } \Gamma, \\
\alpha^-\partial_n u^{-,(1)}_{\delta|\Gamma} - \alpha^+\partial_n u^{+,(1)}_{\delta|\Gamma} = \delta B\left(u^{-,(1)}_\delta\right) - \delta^2\rho_\delta & \text{sur } \Gamma, \\
u^{+,(1)}_{\delta|\partial\Omega} = 0 & \text{sur } \partial\Omega,
\end{cases} \qquad (2.6.3)$$

avec

$$\begin{aligned}
A(u) &= \left[p_1\left(1-\alpha^-\alpha_\delta^{-1}\right) + p_2\left(\alpha^-\left(\alpha^+\right)^{-1} - \alpha^-\alpha_\delta^{-1}\right)\right]\left(\partial_n u_{|\Gamma}\right), \\
B(u) &= \left[p_1\left(\alpha_\delta-\alpha^-\right) + p_2\left(\alpha_\delta-\alpha^+\right)\right]\Delta_\Gamma u_{|\Gamma}, \\
\xi_\delta &= \left[p_1\left(1-\alpha^-\alpha_\delta^{-1}\right) + p_2\left(\alpha^-\left(\alpha^+\right)^{-1} - \alpha^-\alpha_\delta^{-1}\right)\right]\left(\partial_n u^-_{1|\Gamma}\right), \\
\rho_\delta &= \left[p_1\left(\alpha_\delta-\alpha^-\right) + p_2\left(\alpha_\delta-\alpha^+\right)\right]\Delta_\Gamma u^-_{1|\Gamma}.
\end{aligned}$$

Le problème ainsi obtenu suggère l'idée de négliger les termes en δ^2 et de définir $\left(u^{-,ap}_\delta, u^{+,ap}_\delta\right)$ solution du problème (2.6.3) avec $\rho_\delta = 0$ et $\xi_\delta = 0$.

$$\begin{cases}
-\operatorname{div}\left(\alpha^-\nabla u^{-,(ap)}_\delta\right) = f_{|\Omega^-} & \text{dans } \Omega^-, \\
-\operatorname{div}\left(\alpha^+\nabla u^{+,(ap)}_\delta\right) = f_{|\Omega^+} & \text{dans } \Omega^+, \\
u^{-,ap}_{\delta|\Gamma} - u^{+,ap}_{\delta|\Gamma} = \delta\left[p_1\left(1-\alpha^-\alpha_\delta^{-1}\right) + p_2\left(\alpha^-\left(\alpha^+\right)^{-1} - \alpha^-\alpha_\delta^{-1}\right)\right]\left(\partial_n u^{-,ap}_{\delta|\Gamma}\right) & \text{sur } \Gamma, \\
\alpha^-\partial_n u^{-,ap}_{\delta|\Gamma} - \alpha^+\partial_n u^{+,ap}_{\delta|\Gamma} = \delta\left[p_1\left(\alpha_\delta-\alpha^-\right) + p_2\left(\alpha_\delta-\alpha^+\right)\right]\Delta_\Gamma u^{-,ap}_{\delta|\Gamma} & \text{sur } \Gamma, \\
u^{+,(ap)}_{\delta|\partial\Omega} = 0 & \text{sur } \partial\Omega,
\end{cases} \qquad (2.6.4)$$

Remarque 2.6.2 *Le problème approché d'ordre* 1 *(2.6.4) rend compte de l'effet de la couche mince à travers les nouveaux termes apparus dans les membres de droite des conditions de transmission approchées sur* Γ.

2.6.3 Remarques sur la convergence, l'existence et unicité de la solution du problème approché

• Dans la section (3.5), nous avons determiné les problèmes résolus par les deux premiers termes des développements asymptotiques internes et externes. En supposant que le second terme f est de classe C^{∞}, nous pouvons déterminer d'une manière récurrente tous les termes des développement asymptotique $(2.5.1)$, $(2.5.3)$ et $(2.5.4)$, jusqu'à l'ordre n, où $n \in \mathbb{N}$.

En posant:

$$u_{\delta}^{-,(n)} = \sum_{j=0}^{n} \delta^j u_j^-,\ u_{\delta}^{+,(n)} = \sum_{j=0}^{n} \delta^j u_j^+ \ et\ u_{\delta,int}^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \delta^j u_{int,j},$$

Nous pouvons déterminer une estimation d'erreur qui permettra de justifier les développements asymptotiques ainsi construits. Cette estimation s'écrit:

$$\left\| u_{\delta}^{-} - u_{\delta}^{-,(n)} \right\|_{H^1\left(\Omega_{\delta}^{-}\right)} + \delta^{1/2} \left\| u_{int,\delta} - u_{int,\delta}^{(n)} \right\|_{H^1(\Omega_{\delta})} + \left\| u_{\delta}^{+} - u_{\delta}^{+,(n)} \right\|_{H^1\left(\Omega_{\delta}^{+}\right)} \leq c\delta^{n+1}.$$

• En définissant u_{δ}^{ap} sur l'ouvert Ω par:

$$u_{\delta}^{ap} = \begin{cases} u_{\delta}^{-,ap} & \text{dans } \Omega_{\delta}^{-}, \\ u_{\delta}^{+,ap} & \text{dans } \Omega_{\delta}^{+}, \\ u_{int,\delta}^{ap} & \text{dans } \Omega_{\delta}, \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} u_{int,\delta|\Omega_{\delta,1}}^{ap}(x) &= u_{int,\delta}^{1,ap}(x) = u_{int,\delta}^{[1],ap}(m, s_1) \\ &= u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} + \delta \tfrac{\alpha^-\left(\alpha^+ - \alpha_\delta\right)}{\alpha_\delta(\alpha^+ - \alpha^-)} \left[(s_1 + 1) \tfrac{\alpha^-}{\alpha_\delta} - 1 \right] \partial_n u_{\delta|\Gamma}^{-,ap},\ \forall x = \Phi_1(m, s_1) \in \Omega_{\delta,1}, \\ u_{int,\delta|\Omega_{\delta,2}}^{ap}(x) &= u_{int,\delta}^{2,ap}(x) = u_{int,\delta}^{[2],ap}(m, s_2) \\ &= u_{\delta|\Gamma}^{+,ap} + \delta \tfrac{\alpha^+\left(\alpha_\delta - \alpha^-\right)}{\alpha_\delta(\alpha^+ - \alpha^-)} \left[(s_2 - 1) \tfrac{\alpha^+}{\alpha_\delta} + 1 \right] \partial_n u_{\delta|\Gamma}^{+,ap},\ \forall x = \Phi_2(m, s_2) \in \Omega_{\delta,2}, \end{aligned}$$

nous pouvons justifier l'erreur d'approximation suivante entre la solution exacte et la solution approchée:

$$\left\| u_{\delta}^{-} - u_{\delta}^{-,ap} \right\|_{H^1\left(\Omega_{\delta}^{-}\right)} + \delta^{1/2} \sum_{\beta=1}^{2} \left\| u_{int,\delta}^{\beta} - u_{int,\delta}^{\beta,ap} \right\|_{H^1\left(\Omega_{\delta,\beta}\right)} + \left\| u_{\delta}^{+} - u_{\delta}^{+,ap} \right\|_{H^1\left(\Omega_{\delta}^{+}\right)} \leq c\delta^2.$$

• Nous avons dérivé dans la section précédente un modèle approché d'ordre 1 qui rend compte de l'effet de la couche mince Ω_{δ}. L'existence et l'unicité de la solution de ce problème ne peut être démontrée en utilisant la théorie de Lax-Milgram car la forme bilinéaire correspondante n'est pas coercive. L'alternative consiste alors à utiliser la théorie des opérateurs pseudo-differentiels. celle-ci ne peut s'appliquer que si l'opérateur correspondant est auto-adjoint. Pour y remédier, il faut que le saut de la solution à travers Γ soit nul.

Il suffit alors d'écrire:

$$p_1\left(1-\alpha^-\alpha_\delta^{-1}\right)+p_2\left(\alpha^-\left(\alpha^+\right)^{-1}-\alpha^-\alpha_\delta^{-1}\right)=0.$$

ce qui donne

$$p_1=\frac{\alpha^-\left(\alpha^+-\alpha_\delta\right)}{\alpha_\delta\left(\alpha^+-\alpha^-\right)}\ et\ p_2=\frac{\alpha^+\left(\alpha_\delta-\alpha^-\right)}{\alpha_\delta\left(\alpha^+-\alpha^-\right)}$$

En d'autres termes, l'existence et l'unicité de la solution du problème approché $(2.6.4)$, dépend de la position de l'interface Γ.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons montré comment utiliser les méthodes asymptotiques pour modéliser l'effet d'une couche mince sur la solution d'un problème de transmission. Nous avons approché un probléme posé sur un domaine comportant une inclusion mince par un autre problème qui rend compte de son effet par des conditions de transmission approchées sur une interface Γ. Cette étude peut se généraliser à d'autres problèmes issus de la physique ou de la mécanique tels que les équations d'élasticité ou des plaques.

Bibliographie

[1] **A. Bendali and K. Lemrabet**, Asymptotic analysis of the scattering of a timeharmonic electromagnetic wave by a perfectly conducting metal coated with a thin dielectric shell. Asymptot. Anal., 57(3-4):199-227, 2008.

[2] **B. Engquist and J.C. Nédélec**, Effective boundary conditions for acoustic and electromagnetic scattering in thin layers. Research Report CMAP 278, Ecole Polytechnique, France, 1993.

[3] **Boutarene, Khaled El-Ghaouti**, "Approximate transmission conditions for a Poisson problem at mid-diffusion". Mathematical Modelling and Analysis 20.1 (2015): 53-75

[4] **Boutarene, Khaled El Ghaouti**, Approximation de l'impédance d'une inclusion mince contrastée pour un problème de transmission en diffraction des ondes. Diss. 2015.

[5] **Brezis, Haim**, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Springer Science and Business Media, 2010.

[6] **K. Schmidt and S. Tordeux**, Asymptotic modelling of conductive thin sheets. Z. Angew. Math. Phys., 61(4):603-626, 2010.

[7] **M.P. Do Carmo**, Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1976.