**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE.**
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

# Mémoire de Magister

SPECIALITE : **Mathématiques**

Option : **Probabilités et Statistique**

Présenté par

**M. LARBI Ahmed**

Thème

**Contribution à l'étude de modèles autorégressifs AR(1) à coefficients périodiques et presque périodiques.**

Devant le jury d'examen composé de :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| M. Hamadouche | Djamel | Professeur | UMMTO | Président |
| Mme Bedouhene | Fazia | Professeur | UMMTO | Rapporteur |
| Mme Rahmani | Leila | M.C. A | UMMTO | Examinatrice |
| Mme Smaali | Mannal | M.C. B | UMMTO | Examinatrice |
| M. Hamaz | Abdelghani | M.C. B | UMMTO | Examinateur |
| M. Mellah | Omar | Chargé de recherche | UMMTO | Invité |

Soutenue le 06/11/2012.

# *Remerciements*

*En premier lieu, je tiens à témoigner ma reconnaissance à dieu tout puissant, de m'avoir donné la possibilité de terminer ce travail.*

*Je tiens à exprimer mon profond respect et de reconnaissance à la directrice de mon mémoire, Professeur madame Khallas, pour ses conseils et son encouragement durant la période de rédaction de ce mémoire.*

*Je remercie sincèrement mon enseignant, le professeur monsieur Hamadouche Djamel, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de ce mémoire.*
*Je remercie vivement les docteurs, mesdames et messieurs Hamaz Abdelghani, Mellah Omar, Rahmani Leila et Smaali Mannal, qui me font l'honneur de participer à mon jury. Je les remercie énormément pour l'attention qu'ils ont accordé à ce travail.*

*Il est important pour moi de remercier ma famille : mes parents, Mme Larbi, Amir, mes frères et mes soeurs, qui ont toujours été une source inépuisable d'encouragements.*

*Il est important pour moi de remercier mes enseignants : Pr Fellag, Pr Yousfate, Pr Aliou Diop, Pr Fabrizio, Dr Atil.*
*Un grand merci à mes amis et mes collègues de Magister, Habib, Abderrahmene, Younès, Ait Yaala, Boularbeh, avec qui j'ai partagé des instants inoubliables.*

*Un grand merci à mes collègues de travail pour le soutien qui m'ont donné : Yacine, Mme Kesraoui, Ammar, Taher, Abdelkader, Saïd.*

*Merci à tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à l'aboutissement de ce travail.*

# Table des matières

# Introduction générale

Dans plusieurs domaines de la statistique fonctionnelle et opératorielle, les outils de modélisation souvent utilisés sont placés dans un contexte stationnaire. Néanmoins, de nombreux phénomènes présentent des propriétés de périodicité dues souvent à leur mode de production (machines rotatives, oscillateurs ...) ou des causes naturelles connues ou inconnues (rotation de la terre, etc. ...), et les hypothèses simplificatrices permettant de travailler dans un contexte stationnaire ne sont plus valables.

Cette périodicité, temporelle ou spatiale, peut être détectée à partir de l'observation directe de la série des données, ou elle peut être cachée dans sa structure (par exemple dans la corrélation temporelle ou spatiale). Les processus périodiquement corrélés ou presque-périodiquement corrélés (aussi nommés cyclostationnaires) peuvent servir à modéliser ce type de données dans des domaines très variés, [38] et [47], parmi lesquels la météorologie [44], l'économétrie [18], les communications, les radars, la génétique [69] ...

Mathématiquement, un processus est dit périodiquement corrélé (resp. presque périodiquement corrélé) si l'on retrouve des périodicités (resp. de presque périodicité) dans certains de ses paramètres statistiques. Dans la littérature, la notion de périodicité corrélée est connue sous plusieurs vocables : processus cyclostationnaire, processus périodiquement stationnaire ou encore processus corrélé cyclique.

Les premières études sur ces processus “périodiques” datent des années 1950 avec notamment les travaux pionniers de Bennett, [4], et de Gladyshev, [40, 41]. En effet, Bennett était le premier à introduire les processus cyclostationnaires dans le contexte de la théorie des communications. Quelques années plus tard, Gladyshev a publié les premières analyses sur les séquences périodiquement corrélées. Depuis, cette notion de cyclostationnarité a suscité un intérêt croissant à partir surtout des années 1980 avec l'explosion du domaine des télécommunications. À titre d'exemples, on peut citer, entre autres, les travaux de Gardner, [32, 33, 35], qui a développé plusieurs représentations des processus cyclostationnaires à temps continu (voir Gardner, [31]) et les a utilisées dans la résolution des problèmes d'estimation (voir Gardner, [34, 37]), Yaglom [74], Makagon et al. [53], et de nombreux travaux publiés en russe. Notons aussi que des problèmes relatifs à l'analyse et à l'estimation spectrale de processus cyclostationnaires sont traités dans Dehay [23, 24], Dehay et Hurd [26], et Dehay et Monsan [25, 27]. On peut également citer l'investissement de Serpedin et al. [68] portant sur une revue bibliographique de la cyclostationnarité avec plus de 1500 travaux cités en référence dans ce domaine. On peut retrouver de nombreuses autres applications : dans Benterzi [5], Boshnakov [15] ou encore Serpedin et al. [68].

La théorie des fonctions presque périodiques se développe avec vigueur depuis quatre-vingts ans environ ; très exactement, les premiers résultats de celle-ci ont été publiés dans les trois articles du pionnier de cette classe de fonctions H. Bohr [12, 13, 14], parus dans la revue "Acta Mathematica", en 1925-1926.

Elle a été développée par d'autres, notamment Bochner [10], vers 1933, qui a donné deux autres versions de la définition des fonctions presque périodiques équivalente à celle donnée par Bohr, mais plus maniable.

En 1926, cette étude a été reprise par Stépanov [70], qui a définit la notion de fonction presque périodique en moyenne $L^p_{loc}$. Dans les années soixante, Bertrandias a présenté un travail dans le prolongement de celui de Stépanov en définissant les fonctions presque périodiques continues seulement en moyenne [6].

Il faut aussi mentionner les noms de Wiener, Besicovitch [7], Weyl, Delsarte, Maak [52], Bogolioboff, Levitan [50],..., dont les travaux consistent en l'étude de la régularité des fonctions presque périodiques.

Avant que Bohr eût donné la définition générale, il y a eu des études de fonctions presque périodiques d'un type spécial : somme de Fourier de fonctions presque périodiques par Bohl et Esclangon en 1923. Cette idée a été déjà soulevée vers la fin du XIXème siècle par H. Poincaré. Les premières publications dans ce domaine ne concernaient que les fonctions presque périodiques à valeurs réelles ou complexes. C'est Bochner [9] qui a étendu cette notion au cas des fonctions à valeur dans un espace de Banach quelconque de dimension finie ou infinie.

La presque périodicité des solutions des équations différentielles a été longuement étudiée depuis le tout début du vingtième siècle, en connexion, la théorie des fonctions presque périodiques qui a été développée avec les problèmes d'équations différentielles, des systèmes dynamiques, la théorie de la stabilité et ses applications à la théorie de contrôle et les différents domaines des mathématiques.

Les ouvrages classiques de C. Corduneanu [20, 21], Fink [29] , Yoshizawa [75], Amério et Prouse [2], Levitan et Zhikov [50], Zaidman [78], etc... donnent une belle présentation des méthodes et des résultats sur ce sujet. La notion de fonctions presque automorphes a été aussi très tôt introduite, mais récemment entreprise au niveau de l'étude qualitative des systèmes dynamiques. Depuis, un grand intérêt a été donné pour l'extension de certains résultats classiques au cas des équations différentielles dans des espaces de Banach.

Le cas des fonctions presque périodiques à valeur dans l'espace polonais $Pr\left(\mathbb{R}^d\right)$ de toutes les mesures de probabilités sur $\mathbb{R}^d$ a été étudié par Morozan et Tudor dans [56].

Il existe moult notions de presque périodicité pour un processus stochastique. En plus de la presque périodicité corrélée et la presque périodicité unitaire, citons entre autre : la presque périodicité en loi, la presque périodicité en moyenne quadratique et celle en probabilité [43, 61]. On notera aussi que pour la presque périodicité en loi, plusieurs concepts ont été introduits, notamment, la presque périodicité en loi (APD), la presque périodicité unidimensionnelle (APOD) et la presque périodicité fini-dimensionnelle (APFD) (voir [71]). Une étude comparative entre ces différents concepts est consignée dans la référence [3].

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'étude des processus stochastiques à temps discret $X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ périodiquement corrélés et presque périodiquement corrélés ainsi que à leurs représentations spectrales.

Une attention particulière est accordée au problème d'existence de solutions périodiquement et presque périodiquement corrélées du modèle $AR(1)$ suivant :

$$X_n = a_n X_{n-1} + \xi_n \ ; n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

où $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires non corrélées de moyenne nulle et de variance constante ($\sigma_\xi = 1$).

Un processus $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, à valeur dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ muni du produit scalaire $\langle X, Y\rangle = Cov(X, Y)$ (covariance de $X$ et $Y$), est dit périodiquement corrélé (PC) de période $\tau$ si pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la suite $(\langle X_n, Y_{n+k}\rangle)_n$ est $\tau$-périodique par rapport à $n$. Il est dit presque périodiquement corrélé (PPC) si pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la suite $(\langle X_n, Y_{n+k}\rangle)_n$ est presque périodique par rapport $n$. Ce processus est dit presque périodiquement unitaire (PPU) s'il existe un opérateur unitaire $U$ dans $\mathcal{H}$ et un processus $(Y_n)_n$ dans $\mathcal{H}$ tel que $X_n = U^n Y_n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Nous avons les implications suivantes : $PC \Rightarrow PPU \Rightarrow PPC$. Tout processus stochastique PC de période $\tau = 1$ est stationnaire (au sens faible, c'est dire que $\langle X_n, Y_{n+k}\rangle$ ne dépend que de $k$) et tout processus stationnaire est PC.

Dans la suite de cette introduction, nous faisons une présentation succincte des différentes parties de ce travail.

**Organisation et contenu du mémoire :**
Le mémoire est composé de quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, nous présenterons les espaces de Hilbert et quelques opérateurs linéaires particuliers, notamment, les opérateurs projecteurs et les opérateurs unitaires. Une attention particulière sera accordée à la présentation spectrale des opérateurs unitaires.

Le deuxième chapitre sera dédié à la théorie des fonctions et suites presque périodiques.

Nous exposerons les différentes définitions et propriétés essentielles de la presque périodicité.

Dans le troisième chapitre, nous aborderons des processus stochastiques particuliers : les processus stationnaires, périodiquement corrélés, et presque périodiquement corrélés et unitaires. Des théorèmes montrant le lien entre ces différentes notions seront exposés. Nous présenterons également différentes représentations spectrales des processus stationnaires et périodiquement corrélés en se basant sur celle des opérateurs unitaires.

Le dernier chapitre constitue une application à l'étude des solutions périodiques et presque périodiques du modèle (1) lorsque les coefficients $a_n$ sont périodiques et presque périodiques. Les résultats présentés dans ce chapitre sont axés sur l'article de H. Hurd, A. Makagon et A.G. Miamee, *On AR(1) models with periodic and almost periodic coeffcients*, Stochastic Processes and their applications 100, 167-185, (2002).

Nous achèverons ce mémoire par une conclusion et quelques perspectives.

# Chapitre 1

# Espace de Hilbert

Le cadre adapté à l'étude des séries chronologiques est celui d'un espace vectoriel de variables aléatoires de variance finie, offrant une interprétation simple de la corrélation (et/ou la non corrélation ).

Nous exposons dans ce chapitre les éléments de la théorie des espaces de Hilbert qui correspond à ce cadre, notamment, les notions d'orthogonalité et de projection. Notre présentation est essentiellement inspirée des références [30], [42] et [47].

On terminera ce chapitre par une présentation sommaire de quelques opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert.

## 1.1 Définitions et propriétés géométriques

**Définition 1.1.** *Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}\,(\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Un produit scalaire sur $E$ est une application, notée $\langle\cdot,\cdot\rangle$, de $E\times E$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que pour tout $x,y,z\in E$ et $\alpha\in\mathbb{K}$, on ait :*

1. $\langle x,\, x\rangle \geq 0$ *et si* $\langle x,\, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=0$ *;*
2. $\langle x,\, y\rangle = \overline{\langle y,\, x\rangle}$ *;*
3. $\langle x+y,\, z\rangle = \langle x,\, z\rangle + \langle y,\, z\rangle$ *et* $\langle \alpha x,\, y\rangle = \alpha\langle x,\, y\rangle$.

Dans le deuxième point, $\overline{\langle y,\, x\rangle}$ est le conjugué dans $\mathbb{C}$ de $\langle y,\, x\rangle$. Les deux derniers points nous donnent $\langle x,\, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x,\, y\rangle$.
Lorsque $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, ces barres du conjugaison sont inutiles.

Dans la suite de ce chapitre, on considérera le cas où $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

**Définition 1.2.** *On appelle espace hermitien un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.*

On pose $\|x\| = \sqrt{\langle x,\, x\rangle}$.
Nous verrons que cette quantité est une norme sur un espace hermitien $\mathcal{H}$ lorsque nous

aurons énoncé les propriétés :

- Inégalité de Schwarz : pour tout $x, x \in \mathcal{H}$, on a
$$|\langle x,\, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \,;$$
- Identité du parallélogramme :
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

**Proposition 1.3.** *Un espace hermitien $\mathcal{H}$ est un espace vectoriel normé avec la norme $\|x\| = \sqrt{\langle x,\, x\rangle}$ induite par le produit scalaire.*

*Démonstration.* Le seul axiome non évident à obtenir est l'inégalité triangulaire.
On a
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2Re\langle x,\, y\rangle.$$
De l'inégalité de Schwarz, on déduit que
$$2Re\langle x,\, y\rangle \leq 2\,\|x\| \cdot \|y\|\,,$$
d'où
$$\|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2\,.$$
□

**Définition 1.4.** *Lorsqu'un espace hermitien $\mathcal{H}$ muni de la norme induite par le produit scalaire est complet, on dit que $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert.*

**Exemple 1.5.** *1. L'espace euclidien*
$$\mathbb{C}^k = \{x = (x_1, \cdots, x_k)\,;\, x_i \in \mathbb{C}\,,\, i = 1, 2, \cdots, k\}\,,$$
*muni du produit scalaire*
$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{k} x_i \overline{y}_i,$$
*est un espace de Hilbert ;*

*2. L'espace*
$$\ell^2 = \left\{x = (x_j)_{j>0}\,;\, x_j \in \mathbb{C}\,,\, \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty\right\},$$
*muni du produit scalaire*
$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y}_j,$$
*est un espace de Hilbert ;*

3. *L'espace* $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *de toutes les variables aléatoires complexes* $X$ *définies sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *telles que*

$$E\left(|X|^2\right) < \infty,$$

*muni du produit scalaire*

$$\langle X, Y\rangle = E\left(X\overline{Y}\right) = \int_\Omega X(\omega)\overline{Y}(\omega)d\mathbb{P}(\omega),$$

*est un espace de Hilbert.*

## 1.2 Opérateurs linéaires sur un espace de Hilbert

Soient $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ et $(\mathcal{B}', \|\cdot\|_{\mathcal{B}'})$ deux espaces de Hilbert. Un opérateur $A$ de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ est dit linéaire si on a :

$$A(ax + by) = aA(x) + bA(y), \;\; \forall x,\, y \in \mathcal{B} \text{ et } \forall a,\, b \in \mathbb{K}.$$

$A$ est borné s'il existe un réel positif $M$ tel que

$$\|A(x)\|_{\mathcal{B}'} \leq M\,\|x\|_{\mathcal{B}}\,,\;\forall\, x \in \mathcal{B}. \tag{1.1}$$

Dans ce cas, la norme de l'opérateur $A$ est le plus petit $M$ qui assure (1.1), et on écrit aussi

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|A(x)\|_{\mathcal{B}'}}{\|x\|_{\mathcal{B}}} = \sup_{\|x\|_{\mathcal{B}}=1}\|A(x)\|_{\mathcal{B}'}\,.$$

Un opérateur linéaire $A : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ vérifie les propriétés équivalentes suivantes :

**a-** $A$ est borné ;

**b-** $A$ est continue sur $\mathcal{B}$ ;

**c-** $A$ est continue en $0$ ;

**d-** $A$ est uniformément continue sur $\mathcal{B}$.

Soit $B(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Alors $B(\mathcal{H})$ a une structure d'algèbre, i.e., Si $A,\, B \in B(\mathcal{H})$ et $\alpha,\, \beta \in \mathbb{C}$, on a

$$\alpha A + \beta B \in B(\mathcal{H}) \text{ et } \;AB \in B(\mathcal{H}).$$

De plus

$$\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|\,,$$

où $\|\cdot\|$ est la norme induite par le produit scalaire dans $\mathcal{H}$.

**Exemple 1.6.** *L'opérateur différentiel*

$$(Df)(x) = \frac{df(x)}{dx} = f'(x),$$

*défini sur l'espace de toutes les fonctions dérivables sur un intervalle* $[a, b] \in \mathbb{R}$, *qui est un sous-espace de* $L^2([a, b])$, *est un opérateur linéaire non borné.*
*En effet, considérons la suite de fonctions*

$$f_n(x) = \sin(nx), \; n \geq 1, \; x \in [-\pi, \pi].$$

*On a*

$$\|f_n\|_{L^2} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(nx))^2 \, dx} = \sqrt{\pi},$$

*et*

$$\|Df_n\|_{L^2} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (n\cos(nx))^2 \, dx} = n\sqrt{\pi}.$$

*Il vient que*

$$\|Df_n\|_{L^2} = n \|f_n\|_{L^2},$$

*d'où*

$$\|D\| \geq \frac{\|Df_n\|_{L^2}}{\|f_n\|_{L^2}} \underset{n}{\longrightarrow} \infty.$$

### 1.2.1 Opérateurs adjoints et auto-adjoints

Soit $A$ un opérateur borné sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Pour tout $x_0 \in \mathcal{H}$, la fonctionnelle $f$ définie sur $\mathcal{H}$ par :

$$f(x) = \langle Ax, x_0 \rangle,$$

est une forme linéaire bornée sur $\mathcal{H}$. Par le théorème de représentation de Riesz, (voir [42], page 38), il existe un unique $y_0 \in \mathcal{H}$ tel que

$$f(x) = \langle x, y_0 \rangle, \; \forall\, x \in \mathcal{H},$$

ou de façon équivalente

$$\langle Ax, x_0 \rangle = \langle x, y_0 \rangle, \; \forall\, x \in \mathcal{H}. \tag{1.2}$$

**Définition 1.7.** *Soit* $A$ *un opérateur borné sur un espace de Hilbert* $\mathcal{H}$. *L'opérateur* $A^* : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ *défini par*

$$\langle x, A^*y \rangle = \langle Ax, y \rangle, \; \forall\, x, y \in \mathcal{H},$$

*est dit opérateur adjoint de* $A$.

Les propriétés suivantes sont des conséquences directes de cette définition.
Soient $A$ et $B$ deux opérateurs de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, alors on a :

1. $(A+B)^* = A^* + B^*$ ;
2. $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$ ;
3. $(A^*)^* = A$ ;
4. $(I)^* = I$ ;
5. $(AB)^* = B^* A^*$.

**Théorème 1.8.** *L'opérateur adjoint $A^*$, d'un opérateur borné $A$, est borné, de plus, nous avons*

$$\|A\| = \|A^*\| \;\; et \;\; \|AA^*\| = \|A\|^2 .$$

*Démonstration.* 1. En premier lieu, on montre que la norme d'un opérateur est égale à la norme de son adjoint.
On a

$$\begin{aligned} \|A^*(x)\|_{\mathcal{H}}^2 &= \langle A^*(x), A^*(x)\rangle = \langle AA^*(x), x\rangle; \\ &\leq \|AA^*(x)\|_{\mathcal{H}} \cdot \|x\|_{\mathcal{H}} ; \\ &\leq \|A\| \cdot \|A^*(x)\|_{\mathcal{H}} \cdot \|x\|_{\mathcal{H}} . \end{aligned}$$

Et par conséquence $\|A^*(x)\|_{\mathcal{H}} \leq \|A\| \, \|x\|_{\mathcal{H}}$.

Comme $\|A^*\| = sup_{x\neq 0} \frac{\|A^*(x)\|_{\mathcal{H}}}{\|x\|_{\mathcal{H}}}$, donc on a $\|A^*\| \leq \|A\|$.

On a aussi $(A^*)^* = A$, donc $\|A\| = \|(A^*)^*\| \leq \|A^*\|$.

D'où l'égalité : $\|A\| = \|A^*\|$.

2. Reste à monter que $\|AA^*\| = \|A\|^2$.
D'une part, nous avons
$$\|AA^*\| \leq \|A^*\| \, \|A\| = \|A\|^2 .$$
et d'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} \|A(x)\|_{\mathcal{H}}^2 &= \langle A(x), A(x)\rangle = \langle A^*A(x), x\rangle; \\ &\leq \|A^*A(x)\|_{\mathcal{H}} \cdot \|x\|_{\mathcal{H}} ; \\ &\leq \|AA^*\| \cdot \|x\|_{\mathcal{H}}^2 . \end{aligned}$$

Ce qui donne
$$\|AA^*\| = \|A\|^2 .$$

□

**Remarque 1.9.** *Nous n'avons pas, en général, $A = A^*$.*
*Par exemple, si $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ et $A$ un opérateur défini par*

$$A(z_1, z_2) = (0, z_1).$$

*Alors*

$$\langle A(z_1, z_2), (y_1, y_2)\rangle = z_1\overline{y_2},$$

*et*

$$\langle (z_1, z_2), A(y_1, y_2)\rangle = z_2\overline{y_1}.$$

**Définition 1.10.** *Un opérateur $A$ est dit auto-adjoint (ou hermitien) si $A = A^*$, i.e.,*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle, \ \ \forall \ x, y \in \mathcal{H}.$$

**Exemple 1.11.** *Considérons l'opérateur $A$ défini sur $L^2(\mathbb{R})$ par*

$$(Ax)(t) = e^{-|t|}x(t).$$

*$A$ est un opérateur borné auto-adjoint. En effet,*

$$\begin{aligned}
\langle Ax, y\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}x(t)\overline{y(t)}dt,\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\left[\overline{e^{-|t|}y(t)}\right]dt,\\
&= \langle x, Ay\rangle.
\end{aligned}$$

**Remarque 1.12.**

1. *Tout opérateur borné $T$ sur un espace de Hilbert a la représentation*

$$T = A + iB,$$

*où $A$ et $B$ sont deux opérateurs auto-adjoints, de plus*

$$T^* = A - iB.$$

*En effet, il suffit de prendre*

$$A = \frac{1}{2}(T^* + T) \ \ et \ \ B = \frac{i}{2}(T^* - T).$$

2. *Un opérateur $A$ tel que $A = -A^*$ est dit anti-hermitien.*

### 1.2.2 Opérateurs inversibles, normaux et unitaires

Soit $A$ un opérateur défini sur un sous-ensemble $\mathfrak{D}(A)$ d'un espace vectoriel $E$. On notera par $\mathfrak{R}(A)$ le rang de $A$, i.e., $\mathfrak{R}(A) = \{Ax,\ x \in \mathfrak{D}(A)\}$.

**Définition 1.13.** *(Opérateur inverse)*
*Un opérateur $B$ défini sur $\mathfrak{R}(A)$ est dit inverse de $A$ si*

$$(AB)y = y, \quad \forall\, y \in \mathfrak{R}(A),$$

*et*

$$(BA)x = x, \quad \forall\, x \in \mathfrak{D}(A).$$

Un opérateur $A$ qui possède un inverse est dit inversible, et on notera son inverse par $A^{-1}$. L'opérateur inverse $A^{-1}$ est toujours unique, de plus

$$\mathfrak{D}(A^{-1}) = \mathfrak{R}(A) \ \text{ et } \ \mathfrak{R}(A^{-1}) = \mathfrak{D}(A).$$

Si un opérateur linéaire $A$ est inversible, alors son inverse $A^{-1}$ est aussi linéaire, de plus $A^{-1}$ existe si, et seulement si, $Ax = 0$ implique $x = 0$.

**Exemple 1.14.** *Soit $E = \ell^2$, où*

$$\ell^2 = \left\{ (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots);\ \ x_i \in \mathbb{C},\ \sum_{i \geq 1} |x_i|^2 < \infty \right\}.$$

*L'opérateur $A$ défini par*

$$A(x_1, x_2, \cdots) = (0, x_1, x_2, \cdots),$$

*est un opérateur linéaire inversible sur $\ell^2$, de rang $\mathfrak{R}(A) = \ell^2$.*

L'exemple suivant montre que l'inverse d'un opérateur borné n'est pas forcement borné.

**Exemple 1.15.** *Soit $E = \ell^2$. L'opérateur $A$ défini par*

$$A(x_1, x_2, \cdots) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \cdots, \frac{x_n}{n}, \cdots).$$

*$A$ est borné, car*

$$\|A(x_1, x_2, \cdots)\| = \sqrt{\sum_{i \geq 1} \frac{|x_i|^2}{i^2}} \leq \sqrt{\sum_{i \geq 1} |x_i|^2} = \|(x_1, x_2, \cdots)\|.$$

*$A$ est inversible, et son inverse est donné par*

$$A^{-1}(x_1, x_2, \cdots) = (x_1, 2x_2, \cdots, nx_n, \cdots).$$

*Cependant, $A^{-1}$ est non borné. En effet, si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par*

$$e_n = (x_1^n, x_2^n, \cdots) \quad avec \quad x_i^n = \begin{cases} 1, & si\ i = n\,; \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

*On a $\|e_n\| = 1$ et $\|A^{-1}e_n\| = n$. Donc $A^{-1}$ n'est pas borné.*

Notons que la somme de deux opérateurs inversibles n'est pas nécessairement inversible : $I + (-I)$.

D'autres propriétés des opérateurs inversibles sont :

1. Si $A$ et $B$ sont inversibles, alors $AB$ est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ;
2. Soit $A$ un opérateur borné sur un espace de Hilbert avec $\mathfrak{R}(A) = \mathcal{H}$. Si $A$ a un inverse borné, alors $A^*$ est inversible et $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ ;
3. Si un opérateur borné auto-adjoint $A$ est inversible, alors $A^{-1}$ est auto-adjoint ;
4. Si $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ avec $\|A\| < 1$, alors l'opérateur $(I - A)$ est inversible, de plus

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n\geq 0} A^n.$$

**Définition 1.16.** *(Opérateur normal)*
*Un opérateur borné $T$ est dit normal s'il commute avec sont adjoint, i.e., $TT^* = T^*T$.*

Évidemment, tout opérateur auto-adjoint est normal. Les opérateurs normaux sont caractérisés par la propriété suivante :

**Théorème 1.17.** *Un opérateur borné est normal si, et seulement si,*

$$\|Tx\| = \|T^*x\|\,, \ \ \forall\, x \in \mathcal{H}.$$

**Exemple 1.18.** *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $T$ un opérateur tel que*

$$Tx = ix, \ \ \forall\, x \in \mathcal{H}.$$

*On a*

$$T^*x = -ix = -Tx \ \ (T \text{ n'est pas hermitien}),$$

*d'où*

$$\|T^*x\| = \|Tx\|\,, \ \ \forall\, x \in \mathcal{H}.$$

*Ainsi, $T$ est normal.*

**Définition 1.19.** *(Opérateur unitaire)*
*Un opérateur borné $U$, défini sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, est dit unitaire si*

$$UU^* = U^*U = I.$$

Il est important de signaler, dans la définition précédente, que le domaine et le rang de $U$ coïncident avec l'espace $\mathcal{H}$ tout entier.

Il vient, de la définition ci-dessus, que tout opérateur unitaire est normal. L'inverse est faux ; en effet, tout opérateur $A$ tel que $\|A\| \neq 1$ est un opérateur normal mais pas unitaire.

Ci-après une caractérisation des opérateurs unitaires.

**Théorème 1.20.** *1. Un opérateur $U$ est unitaire si, et seulement si, il est inversible et $U^{-1} = U^*$ ;*

*2. Si $U$ est un opérateur unitaire, alors $U^{-1}$ et $U^*$ les sont aussi.*

**Exemple 1.21.** *1. Soit $\mathcal{H} = L^2[0,1]$. Définissons un opérateur $U$ sur $\mathcal{H}$ par*

$$(U)[x(t)] = x(1-t).$$

*On vérifie facilement que $U = U^* = U^{-1}$.*
*Donc $U$ est un opérateur unitaire.*

*2. Soit $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert de toutes les suites de nombres complexes $x = (\cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots)$ telles que*

$$\|x\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2 < \infty,$$

*muni du produit scalaire*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n\overline{y_n}, \quad \text{où } x = (\cdots, x_n, \cdots),\ y = (\cdots, y_n, \cdots) \text{ et } n \in \mathbb{Z}.$$

*Définissons l'opérateur $U$, appelé opérateur de décalage, par :*

$$U(x_n) = (x_{n-1}).$$

*Alors, $U$ est unitaire : $U$ est inversible et on a*

$$\langle Ux, y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_{n-1}\overline{y_n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n\overline{y_{n+1}} = \langle x, U^{-1}y\rangle,$$

*ce qui implique que $U^* = U^{-1}$.*

Les opérateurs unitaires possèdent les propriétés suivantes :
Soient $U$ et $V$ deux opérateurs unitaires, alors

- $\|U\| = 1$ ;
- $U^*$ et $U^{-1}$ sont aussi opérateurs unitaires ;
- $U$ est isométrique (i.e., $\|U(x)\| = \|x\|,\ \forall\, x \in \mathcal{H}$) ;
- L'opérateur $UV$ est unitaire.

### 1.2.3 Orthogonalité

**Définition 1.22.** *Soit $\mathcal{H}$ un espace hermitien, on dit que $x$ et $y$ deux éléments de $\mathcal{H}$ sont orthogonaux, et on écrit $x \perp y$, si $\langle x, y\rangle = 0$.*
*Plus généralement, on dit que deux sous-ensembles $E_1$ et $E_2$ de $\mathcal{H}$ sont orthogonaux, et on écrit $E_1 \perp E_2$, si $\forall\, u \in E_1$, $\forall\, v \in E_2$, on a $u \perp v$.*

Evidemment, si $E_1 \perp E_2$, alors $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ ou bien $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

**Définition 1.23.** *Dans un espace hermitien, une famille $E = \{e_i;\ i \in T\}$ où $T \subset \mathbb{N}$, est dite orthonormée si*

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1, & i{=}j\,; \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

**Définition 1.24.** *Soit $S$ une partie d'un espace hermitien $\mathcal{H}$. On appelle orthogonal de $S$, noté $S^\perp$, l'ensemble défini par :*

$$S^\perp = \{y \in \mathcal{H},\ \langle x, y\rangle = 0, \forall\, x \in S\}.$$

Comme conséquence directe de la définition de l'orthogonalité, nous avons la relation suivante, dite relation de Pythagore : si $\mathcal{H}$ un espace hermitien et $x, y \in \mathcal{H}$, avec $x \perp y$, alors

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Plus généralement, si $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sont orthogonaux deux à deux, on a :

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \|x_k\|^2.$$

**Définition 1.25.** *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $E$ un sous-ensemble de $\mathcal{H}$, le sous-espace vectoriel engendré par $E$, noté span$(E)$ ou sp$(E)$, est le sous-espace qui contient toutes les combinaisons linéaires finies d'éléments de $E$.*

**Remarque 1.26.**

1. *Pour toute partie $S$ d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, l'ensemble $S^\perp$ est un sous espace fermé de $\mathcal{H}$ ;*
2. *Si $\mathcal{M}$ est un sous-espace de $\mathcal{H}$ et $S$ une partie de $\mathcal{H}$, alors*
   - $\overline{sp}(S) = S^{\perp\perp}$ ;
   - $S \subseteq S^{\perp\perp}$ *et* $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{\perp\perp}$ ;
   - $[\overline{sp}\,(\cup_n \mathcal{M}_n)]^\perp = \cap_n {\mathcal{M}_n}^\perp$,

   *où l'adhérence est prise au sens de la norme induite par le produit scalaire de $\mathcal{H}$.*

### 1.2.4 Opérateurs de projection

Etant donné $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $V$ une partie de $\mathcal{H}$ et $f \in \mathcal{H}$. On se pose les questions suivantes :

1. Existe-t-il $f^* \in V$ tel que
$$\|f - f^*\| = \inf\{\|f - v\|\,,\, v \in V\}?$$
Si $f^*$ existe, on l'appelle meilleure approximation de $f$ sur $V$.
2. Peut-on obtenir une caractérisation de $f^*$ ?

La réponse à ces deux questions est donnée par le théorème suivant, dit projection orthogonale.

**Théorème 1.27.** *(Projection orthogonale)*
*Soit $\mathcal{M}$ un sous espace d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Etant donné $x \in \mathcal{H}$, alors :*

**a-** *Il existe un unique vecteur $\widehat{x} \in \mathcal{M}$, dit projection orthogonale de $x$ sur $\mathcal{M}$ tel que*
$$\|x - \widehat{x}\| = \inf_{y \in \mathcal{M}} \|x - y\|\,;$$

**b-** *Un vecteur $\widehat{x}$ est une projection orthogonale de $x$ sur $\mathcal{M}$ si, et seulement si, $(x - \widehat{x}) \in \mathcal{M}^\perp$, c'est à dire que pour tout $y \in \mathcal{M}$, nous avons*
$$\langle x - \widehat{x}, y\rangle = 0. \tag{1.3}$$

Le théorème de projection orthogonale permet de définir un opérateur
$$\begin{aligned} P_{\mathcal{M}} : \mathcal{H} &\to \mathcal{M} \\ x &\mapsto P_{\mathcal{M}}(x) = \widehat{x}, \end{aligned}$$
où $\widehat{x}$ est la meilleure approximation de $x$ sur $\mathcal{M}$,
$$\|x - \widehat{x}\| = \inf_{y \in \mathcal{M}} \|x - y\|\,.$$
L'opérateur $P_{\mathcal{M}}$ est dit projection orthogonale sur $\mathcal{M}$.

**Exemple 1.28.** *Soit $(x_i)_{i=1,\ldots,n}$ $n$-éléments d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et $\mathcal{M} = sp\{x_i,\, i = 1, \ldots, n\}$, soit $x \in \mathcal{H}$.*
*L'élément le plus proche de $x$ dans $\mathcal{M}$, noté $\widehat{x}$, a la forme*
$$\widehat{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i.$$

*Comme* $x - \widehat{x} \in \mathcal{M}^\perp$*, alors pour tout* $j = 1, \ldots, n$

$$\langle x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, x_j \rangle = 0.$$

*Pour trouver les valeurs de* $\alpha_i$*, on peut résoudre le système d'équations*

$$\sum_{i=1}^{n} \langle x_i, x_j \rangle \alpha_i = \langle x, x_j \rangle, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{1.4}$$

*Dans le cas particulier où* $\mathcal{M} = sp\{e_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ *avec*

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & si\ i = j\,; \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

*La projection orthogonale de* $x$ *dans* $\mathcal{M}$ *est donnée par*

$$\widehat{x} = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i,$$

*car, d'après (1.4),* $\alpha_j = \langle x, e_j \rangle$ *pour tout* $j = 1, \ldots, n$*.*

Les propriétés essentielles de la projection orthogonale, sur un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$, sont résumées dans la proposition suivante.

**Proposition 1.29.** *Soit* $\mathcal{M}$ *et* $\mathcal{N}$ *deux sous-espace d'un espace de Hilbert. Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *L'opérateur* $P_{\mathcal{M}}$ *est linéaire ;*
2. $(I - P_{\mathcal{M}})$ *est une projection de* $\mathcal{H}$ *dans* $\mathcal{M}^\perp$ *;*
3. *Tout élément* $x \in \mathcal{H}$ *a une décomposition unique de la forme*

   $$x = P_{\mathcal{M}}(x) + (I - P_{\mathcal{M}})(x).$$

   *Autrement dit,* $\mathcal{H}$ *est une somme directe de* $\mathcal{M}$ *et* $\mathcal{M}^\perp$*, i.e.,* $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$ *;*
4. $\|x\|^2 = \|P_{\mathcal{M}}(x)\|^2 + \|P_{\mathcal{M}^\perp}(x)\|^2$ *;*
5. $P_{\mathcal{M}}$ *est un opérateur borné, de plus* $\|P_{\mathcal{M}}\| = 1$ *;*
6. $x \in \mathcal{M}$ *ssi* $P_{\mathcal{M}}(x) = x$ *et* $x \in \mathcal{M}^\perp$ *ssi* $P_{\mathcal{M}}(x) = 0$ *;*
7. $P_{\mathcal{M}}$ *est idempotent, i.e.,* $P_{\mathcal{M}}^2 = P_{\mathcal{M}}$ *;*
8. $P_{\mathcal{M}}$ *est auto-adjoint ;*
9. $P_{\mathcal{M}}$ *est défini positif, i.e.,* $\langle P_{\mathcal{M}}(x), x \rangle \geq 0,\ \forall\, x \in \mathcal{H}$ *;*
10. $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ *ssi* $P_{\mathcal{M}} P_{\mathcal{N}} = P_{\mathcal{M}}$ *;*

11. *Si $P$ est un opérateur auto-adjoint et idempotent sur un espace de Hilbert, alors $P$ est un opérateur de projection sur un sous-espace fermé $\mathcal{M}$ de $\mathcal{H}$ (i.e., $P = P_{\mathcal{M}}$ pour un certain sous-espace fermé de $\mathcal{H}$) ;*
12. *L'opérateur $(P_{\mathcal{M}_1} - P_{\mathcal{M}_2})$ est une projection ssi $\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_1$, dans ce cas $P_{\mathcal{M}_1} - P_{\mathcal{M}_2} = P_{\mathcal{M}}$, où*
$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \ominus \mathcal{M}_2 = \{x \in \mathcal{M}_1 \, ; \, x \perp \mathcal{M}_2\} \, ;$$
13. *La composition $P_{\mathcal{M}} P_{\mathcal{N}}$ est une projection ssi $P_{\mathcal{M}} P_{\mathcal{N}} = P_{\mathcal{N}} P_{\mathcal{M}}$, et dans ce cas, nous avons $P_{\mathcal{M}} P_{\mathcal{N}} = P_{\mathcal{M} \cap \mathcal{N}}$ ;*
14. *Si $\mathcal{M}_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$ sont des sous-espaces de $\mathcal{H}$, alors l'opérateur*
$$Q = P_{\mathcal{M}_1} + P_{\mathcal{M}_2} + \cdots + P_{\mathcal{M}_n},$$
*est une projection ssi $P_{\mathcal{M}_j} P_{\mathcal{M}_k} = 0$ pour tout $j \neq k$, et dans ce cas $Q = P_{\mathcal{M}}$, où*
$$\mathcal{M} = \oplus_{i=1}^{n} \mathcal{M}_i.$$

L'exemple ci-après illustre l'intérêt de la projection orthogonale dans la régression linéaire.

**Exemple 1.30.** *Dans cet exemple, on s'intéresse de trouver une relation linéaire entre deux vecteurs $x$ et $y$ tels que $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n)$. Cela nous conduit à chercher un autre vecteur $z = (z_1, \cdots, z_n)$ tel que $z_i = a + bx_i$, $i = 1, \cdots, n$, qui s'approche quadratiquement au vecteur $y$.*

*Alors, suite au théorème de la projection, le vecteur $z$ ne serai que la projection du vecteur $y$ sur le sous-espace engendré par les deux vecteur $(x, \mathbf{1})$, $\mathbf{1} = (1, 1, \cdots, 1)$ de longueur $n$.*

*Ce qui donne que $a$ et $b$ sont les solutions du système suivant :*
$$\begin{cases} \langle y - (a + bx), 1 \rangle = 0 \, ; \\ \\ \langle y - (a + bx), x \rangle = 0. \end{cases}$$

*D'une forme matricielle, on écrit le système précédent par*
$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{bmatrix}.$$

Le calcul de la meilleure approximation est facile lorsqu'on travaille avec une norme induite par un produit scalaire. C'est ce qui fait le succès des méthodes de moindres carrés. Ceci résulte de la caractérisation de la meilleure approximation (voir le point (b) du théorème 1.27)

**Remarque 1.31.** *La condition (b) du théorème 1.27 permet de calculer $\widehat{x}$ lorsque $\mathcal{M}$ est un sous-espace de dimension $n$. En effet, si $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ forme une base de $\mathcal{M}$, on écrit*

$$\widehat{x} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k.$$

*et l'équation (1.3) se traduit par le système linéaire*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle e_k, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle, \ j = 1, \cdots, n.$$

*La matrice $C$ de ce système, de terme général $a_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$, $i, j = 1, \cdots, n$, est appelée matrice de Gram associée à la base $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$.*
*Une des propriétés importantes de la matrice de Gram est qu'elle hermitienne.*

## 1.3 Théorie spectrale d'un opérateur unitaire

Dans cette section, on présentera un résultat classique de la théorie des opérateurs. Il s'agit de l'intégrale spectrale des opérateurs normaux. Pour ce faire, nous introduisons d'abord la notion de mesure spectrale. Ensuite, nous définissons l'intégrale spectrale d'une fonction mesurable bornée par rapport à une mesure spectrale. Nous achèverons cette section par l'énoncé du théorème spectrale d'un opérateur unitaire. Pour une présentation détaillée de cette section, le lecteur peut se référer à [1],[30] et [42].

Dans se qui suit, $(\Omega, \mathcal{A})$ désigne un espace mesurable, $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ l'ensembles de toutes les projections orthogonales dans $\mathcal{H}$.

**Définition 1.32.** *(Mesure spectrale) Une fonction d'ensemble $\nu : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ est dite mesure spectrale si*

1. *$\nu(\Omega) = I$ ($I$ : l'opérateur identité sur $\mathcal{H}$) ;*
2. *Pour toute suite $(A_i)_{i\geq 1}$ de sous-ensembles de $\mathcal{A}$, deux à deux disjoints, on a*

$$\nu\left(\cup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} \nu(A_n).$$

Enonçons quelques propriétés essentielles d'une mesures spectrale :

**Proposition 1.33.** *1.* $\nu(\emptyset) = 0$ *(l'opérateur nul) ;*

*2.* $\forall\, A,\, B \in \mathcal{A}$ *, on a* $\nu\,(A \cup B) = \nu\,(A) + \nu\,(B) - \nu\,(A \cap B)$ *;*

*3.* $\forall\, A,\, B \in \mathcal{A}$ *, on a* $\nu\,(A \cap B) = \nu(A)\nu(B)$ *;*

*4.* $\forall\, A,\, B \in \mathcal{A}$ *tel que* $B \subset A$ *, on a* $\nu\,(A \setminus B) \leq \nu(A) - \nu(B)$ *;*

*5.* $\nu$ *est monotone,* $\forall\, A, B \in \mathcal{A}$*, tels que* $A \subseteq B$*,* $\nu(A) \leq \nu(B)$ *;*

*6.* $\nu$ *est commutative,* $\forall\, A,\, B \in \mathcal{A}$*,* $\nu(A)\nu(B) = \nu(B)\nu(A)$ *;*

*7.* $\nu$ *est orthogonalement dispersée,* $\forall\, A,\, B \in \mathcal{A}$ *disjoint, alors* $\nu(A)$ *et* $\nu(B)$ *sont orthogonaux* $(\nu(A) \perp \nu(B))$*, i.e.,* $\nu(A)\nu(B) = 0$*.*

Le théorème suivant, caractérisant les mesures spectrales, montre que celles-ci sont étroitement liées aux mesures scalaires.

**Théorème 1.34.** *Une fonction d'ensemble* $\nu\,:\,(\Omega, \mathcal{A}) \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ *est une mesure spectrale si, et seulement si,* $\nu(\Omega) = I$ *et pour tout* $x, y \in \mathcal{H}$*, la fonction d'ensemble*

$$\begin{aligned} \mu_{x,y} : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ M &\mapsto \mu_{x,y}(M) = \langle \nu(M)x, y\rangle, \end{aligned}$$

*est une mesure.*

**Exemple 1.35.** *Soit* $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$*. Définissons la fonction d'ensemble*

$$\begin{aligned} \nu\,:\,(\Omega,\mathcal{A}) &\to \mathcal{P}(\mathcal{H}) \\ A &\mapsto \nu(A) : L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \\ &\qquad\qquad\qquad g \mapsto g\mathbf{1}_A, \end{aligned}$$

*i.e.,* $\nu(A)$ *est l'opérateur de multiplication par la fonction indicatrice de* $A$*.*
*Alors* $\nu$ *est une mesure spectrale. En effet,* $\forall\, f, g \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$*, la fonction d'ensemble*

$$\begin{aligned} \mu_{f,g} : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ M &\mapsto \mu_{f,g}(M) = \langle \nu(M)f, g\rangle = \int_\Omega f(t)\overline{g}(t)\mathbf{1}_M d\mu, \end{aligned}$$

*est une mesure.*

Avant de définir l'intégrale spectrale, rappelons qu'une fonction $\varphi : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ linéaire par rapport à chacune de ses variables est dite forme bilinéaire. Elle est bornée si

$$|\varphi(x,y)| \leq M \|x\| \|y\|, \forall\, x, y \in \mathcal{H}.$$

Rappelons aussi :

**Théorème 1.36.** *Pour toute forme bilinéaire $\varphi$ sur $\mathcal{H}$, il existe un unique opérateur $A$ sur $\mathcal{H}$ tel que*

$$\varphi(x,y) = \langle Ax, y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

### 1.3.1 Intégrale spectrale

Soit $f$ une fonction mesurable bornée sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et $\nu$ une mesure spectrale sur $\mathcal{A}$. Pour tout $x, y \in \mathcal{H}$, la famille d'intégrales $\int f(\lambda) d\mu_{x,y}(\lambda)$ est bien définie. C'est l'intégrale de $f$ par rapport à la mesure

$$\mu_{x,y}(M) = \langle \nu(M)x, y \rangle.$$

On définit ainsi une forme bilinéaire $\varphi$ sur $\mathcal{H}$ par

$$\varphi(x,y) = \int f(\lambda) d\mu_{x,y}(\lambda).$$

$\varphi$ est bornée car :

$$|\varphi(x,y)| \leq 2 \|f\|_\infty \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

Par le théorème 1.36, il existe un unique opérateur $A(f)$ sur $\mathcal{H}$ tel que

$$\langle A(f)x, y \rangle = \varphi(x,y) = \int f(\lambda) \langle \nu(d\lambda)x, y \rangle.$$

L'opérateur $A(f)$ défini par

$$A(f) = \int f(\lambda) \nu(d\lambda),$$

est dit l'intégrale spectrale de $f$ par rapport à la mesure spectrale $\nu$.

L'intégrale spectrale possède les propriétés remarquables suivantes :

**(a)** L'intégrale spectrale est linéaire ;

**(b)** $\int \overline{f(\lambda)} \nu(d\lambda) = \left[\int f(\lambda)\nu(d\lambda)\right]^*$ (opérateur adjoint) ;

**(c)** $\int f(\lambda) g(\lambda) \nu(d\lambda) = \int f(\lambda)\nu(d\lambda) \int g(\lambda)\nu(d\lambda)$.

### 1.3.2 Théorème spectral

Nous avons vu que la notion de la mesure spectrale permet de définir l'intégrale spectrale $\int f(\lambda)\nu(d\lambda)$ comme étant un opérateur $A(f) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tel que

$$\int f(\lambda)\langle\nu(d\lambda)x, y\rangle = \langle A(f)x, y\rangle, \quad \forall\, x, y \in \mathcal{H}.$$

Cependant, dans de nombreuses applications, nous disposons d'un opérateur $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, et nous aimerions le représenter comme une intégrale spectrale. La question naturel que l'on se pose : étant donné un opérateur $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, existe-t-il une mesure spectrale sur un certain espace mesuré $(\Omega, \mathfrak{F})$ et une fonction $f$ tels que

$$A = \int f(\lambda)\nu(d\lambda)?$$

La réponse à cette question est affirmative pour la classe des opérateurs normaux, plus précisément, tout opérateur $A$ normal et borné possède une mesure spectrale, définie sur les parties boréliennes de $\mathbb{C}$ telle que

$$A = \int_{\mathbb{C}} \lambda\nu(d\lambda).$$

Pour plus de détails, voir [42], [47] et [65].
Pour un opérateur unitaire $U$, il existe une <u>**unique mesure spectrale**</u> $\nu$ définie sur les parties boréliennes du cercle unité $T$ de $\mathbb{C}$ tel que

$$A = \int_{T} \lambda\nu(d\lambda).$$

En identifiant $T$ à $[0, 2\pi[$ grâce à l'application :

$$\begin{aligned} [0, 2\pi[ &\to T \\ \lambda &\mapsto e^{i\lambda}, \end{aligned}$$

le résultat précédent peut s'énoncer comme suit :

**Théorème 1.37.** *(Théorème spectrale des opérateurs unitaires, dit aussi théorème de Stone) Soit $U$ un opérateur unitaire sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, il existe une unique mesure spectrale $\nu$ sur les parties boréliennes de* $[0,\, 2\pi)$ *telle que*

$$U = \int_0^{2\pi} e^{it}\nu(dt).$$

En tenant compte de la propriété **(c)** de la page 24, on obtient pour tout $n$,

$$U^n = \int_0^{2\pi} e^{itn}\nu(dt).$$

Ce résultat est le point de départ de la représentation spectrale des processus stochastiques "périodiques".

# Chapitre 2

# Les fonctions presque périodiques

## 2.1 Introduction et définitions

La notion de périodicité est étroitement liée aux sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ :
Rappelons qu'un sous-groupe additif $G$ de $\mathbb{R}$ non réduit à zéro, est, soit dense dans $\mathbb{R}$, soit monogène, c'est-à-dire de la forme $T\mathbb{Z}$ avec $T$ réel strictement positif, (dans ce cas, nous appellerons $T$ le générateur de $G$). En particulier, un sous-groupe non réduit à zéro d'un groupe monogène est monogène, et un sous-groupe contenant un sous-groupe dense est dense.

Si $f$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexe, alors l'ensemble des réels $T$, noté $G(f)$, tels que, pour tout $x$ réel

$$f(x+T) = f(x),$$

est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.

**Définition 2.1.** *On dira qu'une fonction $f$ est périodique, si $G(f)$ n'est pas réduit à 0. Un élément $T$ non nul de $G(f)$ est une période de $f$, et l'on dira que $f$ est périodique de période $T$ ou encore qu'elle est $T$-périodique. L'ensemble $G(f)$ est alors appelé groupe des périodes de $f$.*

Pour une fonction périodique $f$, on a donc deux possibilités : ou bien $G(f)$ est dense dans $\mathbb{R}$, ou bien il est monogène et engendré par son plus petit élément strictement positif. Lorsque le groupe $G(f)$ est monogène, si $T$ est la plus petite période strictement positive de $G(f)$, on aura

$$G(f) = T\mathbb{Z},$$

et on dira que $T$ est la période de $f$.

**Remarque 2.2.** *1. Le groupe $G(f)$ est égal à $\mathbb{R}$ si, et seulement si, la fonction $f$ est constante ;*

2. *On peut ramener l'étude des fonctions périodiques à celle des fonctions périodiques de période* $2\pi$. *En effet, si* $f$ *est* $T$*-périodique, alors* $g : x \mapsto f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$ *est* $2\pi$*-périodique.*

On note $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Il est clair que l'ensemble des fonctions continues $2\pi$-périodiques est un sous espace de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. Une question naturelle est la suivante : qu'en est il de l'ensemble des fonctions continues périodiques sur $\mathbb{R}$. La réponse est négative. En effet, considérons la fonction $f$ définie par $f(x) = e^{i\,2\pi x} + e^{i\,2\pi\omega x}$, où $\omega$ est irrationnel. Elle s'écrit comme somme de deux fonctions périodiques. Supposons qu'il existe $\tau \neq 0$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $f(x+\tau) - f(x) = 0$. C'est à dire

$$e^{i\,2\pi(x+\tau)} + e^{i\,2\pi\omega(x+\tau)} - \left(e^{i\,2\pi x} + e^{i\,2\pi\omega x}\right) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ou de façon équivalente

$$e^{i\,2\pi x}\left(e^{i\,2\pi\tau} - 1\right) + e^{i\,2\pi\omega x}\left(e^{i\,2\pi\omega\tau} - 1\right) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

En posant $\alpha = e^{i\,2\pi\tau} - 1$ et $\beta = e^{i\,2\pi\omega\tau} - 1$, on peut aussi écrire :

$$\alpha e^{i\,2\pi x} + \beta e^{i\,2\pi\omega x} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La dernière équation a une solution si $\alpha = \beta = 0$. C'est-à-dire que

$$e^{i\,2\pi\tau} = e^{i\,2\pi\omega\tau} = 1.$$

On conclut que $\tau$ et $\omega\tau$ sont dans $\mathbb{Z}$, et comme $\omega$ est irrationnel, donc $\tau$ et $\omega\tau$ ne peuvent pas être simultanément dans $\mathbb{Z}$. Ce qui est absurde.

En plus du fait que l'ensemble des fonctions continues périodiques sur $\mathbb{R}$ n'est pas stable par rapport aux opérations usuelles, on peut aussi montrer que cet ensemble n'est pas stable par limite uniforme. Il suffit de considérer la suite de fonctions continues et $2^n$-périodiques

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\sin^2\left(\frac{\pi x}{2^k}\right).$$

La série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{2^k}\sin^2\left(\frac{\pi x}{2^k}\right)$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$. Mais sa limite $f$ n'est pas périodique.

Soit $(\mathcal{B}, \|.\|)$ un espace de Banach. Notons par $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ l'espace vectoriel des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans l'espace de Banach $(\mathcal{B}, \|.\|)$, que l'on munit de la norme uniforme. Dans ce qui suit, on verra comment relaxer la condition de périodicité de façon à combler les insuffisances citées précédemment.

## 2.2 Motivations et propriétés élémentaires

Les fonctions presque périodiques sont, intuitivement, des fonctions $f$ (continues) pour lesquelles, en choisissant des "périodes" $T$ de plus en plus grandes, on a une périodicité approximative de plus en plus précise, c'est-à-dire que (pour tout $x$) l'écart $f(x+T)-f(x)$ peut être rendu arbitrairement petit. Mais la définition formelle correspondante, à savoir : quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel non nul $T$ tel que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+T) - f(x)| < \varepsilon,$$

est en fait insuffisante à capturer cette idée, puisque cette propriété est vérifiée par toutes les fonctions uniformément continues.

Dans cette section, nous nous chargerons d'étudier les fonctions presque périodiques introduites pour la première fois par H. Bohr (1923). Il s'agit ici de présenter quelques résultats sur ces fonctions lorsqu'elles sont à valeurs dans un espace de Banach $(\mathcal{B}, \|.\|)$. Cette section est largement inspiré des références [16], [20],[21], [39] et [78]. Commençons par introduire un concept qui traduit l'idée intuitive selon laquelle les points d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ "sont bien dispersés".

**Définition 2.3.** *On dit qu'une partie $A$ de $\mathbb{R}$ est relativement dense s'il existe un réel $l$ tel que tout intervalle de longueur $l$ rencontre $A$, i.e.,*

$$\exists\, l > 0, \quad \forall a \in \mathbb{R} : ]a, a+l[ \cap A \neq \emptyset.$$

**Exemple 2.4.**
1. *L'ensemble $\mathbb{Z}$ est relativement dense puisque tout intervalle de longueur 2 contient un élément de $\mathbb{Z}$ ;*
2. *L'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas relativement dense puisque pour tout $l > 0$, l'intervalle*

$$[-l-1, -1] \cap \mathbb{N} = \emptyset \ ;$$

3. *Tout sous groupe additif non trivial est relativement dense ;*
4. *L'ensemble $\{\pm\sqrt{n},\ n \in \mathbb{N}\}$ est relativement dense. En effet, pour $l = 2$, un intervalle de longueur $l$ est de la forme $[a, a+2]$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$. Si $a \leq 0 \leq a+2$, le problème est résolu. Si $0 \leq a \leq a+2$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^2 \leq n \leq (a+2)^2$ et donc $a \leq \sqrt{n} \leq a+2$. Le cas où $a \leq a+2 \leq 0$ se traite de façon similaire que précédemment ;*
5. *L'ensemble $\{\pm n^2,\ n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas relativement dense. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $2n > l$. L'intervalle $[n^2+1, n^2+l+1]$ est de longueur $l$ et est strictement contenu dans $[n^2, (n+1)^2]$.*

A présent, nous pouvons énoncer la définition de la presque périodicité de Bohr :

**Définition 2.5.** *Une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathcal{B}$ est dite presque périodique au sens de Bohr si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble*

$$T(f, \varepsilon) = \left\{ \tau \in \mathbb{R},\ \sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x+\tau) - f(x)\| < \varepsilon \right\},$$

*est relativement dense dans* $\mathbb{R}$*. Autrement dit, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $l = l_\varepsilon > 0$*, tel que*

$$T\,(f,\varepsilon) \cap [a, a+l] \neq \emptyset, \;\; \forall\, a \in \mathbb{R}.$$

*Un nombre réel* $\tau \in T\,(f,\varepsilon)$ *est dit* $\varepsilon$*-presque période ou* $\varepsilon$*-translation. Le réel positif* $l_\varepsilon$ *est dit longueur d'inclusion associé à* $\varepsilon$*.*

Une fonction $f$, presque périodique et continue, est dite uniformément presque périodique et on écrit $f \in PP(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ ou bien $f$ est $PP(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

Il a y lieu de mentionner que toute fonction continue $\tau$-périodique est presque périodique. En effet, c'est une conséquence directe du fait que pour tout $\varepsilon > 0$, $\tau\mathbb{Z} \subset T\,(f,\varepsilon)$ .

Dans ce qui suit, on présentera certaines propriétés élémentaires des fonctions presque périodiques. Nous les retrouverons avec plus de détails dans les références [7, 20, 21, 78].

## 2.3 Propriétés des fonctions Bohr presque périodiques

Si $f$ et $g$ sont deux fonctions presque périodiques, alors les fonctions $f+g$ et $fg$ le sont aussi ; contrairement aux apparences, ce résultat n'est pas trivial, comme on peut le voir dans (Besicovitch par exemple) [7]. D'autres propriétés des fonctions Bohr-presque périodiques sont cités ci-dessous :

**Proposition 2.6.** *Si* $f$ *est une fonction continue presque périodique, alors* $f$ *est bornée et uniformément continue.*

*Démonstration.* Dans cette preuve, on a deux points à démontrer :

1. La bornitude de $f$ :
   Supposons que $f \in PP(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Pour $\varepsilon = 1$, on notera $l_1$ le réel positif correspond. Comme $f$ est continue sur le compact $[0, l_1]$, elle est bornée sur $[0, l_1]$, c'est à dire,

$$\exists M > 0, \; \sup_{x \in [0, l_1]} \|f(x)\| \leq M.$$

   Soit $\tau \in [-x, -x + l_1]$ un $\varepsilon$-presque période associé à $f$.
   On a donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \; \|f(x+\tau) - f(x)\| < 1.$$

   Il vient que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \|f(x)\| &= \|f(x) - f(x+\tau) + f(x+\tau)\|\,, \\ &\leq \|f(x) - f(x+\tau)\| + \|f(x+\tau)\|\,, \\ &\leq M + 1. \end{aligned}$$

   Donc $f$ est bornée.

2. La continuité uniforme de $f$ :
   Soit $\varepsilon > 0$ et $l = l_\varepsilon$ la longueur d'inclusion associée. Comme $f$ est uniformément continue sur $[-1, 1+l]$, alors il existe $0 < \delta(\varepsilon) < 1$ tel que,
   $$\forall\, x, y \in [-1, 1+l];\ |x-y| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$
   D'autre part, si $\tau \in [-x, -x+l]$ est un $\varepsilon$-presque période, on a
   $$\|f(x+\tau) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$
   D'où pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ avec $|x-y| < \delta(\varepsilon)$,
   $$\begin{aligned}\|f(x) - f(y)\| &= \|f(x) + f(x+\tau) - f(x+\tau) - f(y+\tau) + f(y+\tau) - f(y)\|\,,\\ &\leq \|f(x) - f(x+\tau)\| + \|f(x+\tau) - f(y+\tau)\| + \|f(y+\tau) - f(y)\|\,,\\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.\end{aligned}$$
   Donc $f$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

□

**Proposition 2.7.** *Si $f$ et $g$ sont deux fonctions presque périodiques et $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors $\lambda f$, $f+g$, $f_h = f(\cdot + h)$, $h \in \mathbb{R}$ et $\|f\| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ sont aussi des fonctions presque périodiques.*

*Démonstration.* La preuve est une conséquence directe de la définition de la presque périodicité. □

**Proposition 2.8.** *Soit $f$ une fonction continue presque périodique, l'ensemble $\{f(x);\ x \in \mathbb{R}\}$ est relativement compact dans $\mathcal{B}$.*

*Démonstration.* Un ensemble $E \subset \mathcal{B}$ est dit relativement compact, si pour toute suite dans $E$, on peut extraire une sous-suite convergente dans $E$.
Dans un espace de *Banach*, la compacité relative coïncide avec la précompacité. Il suffit de montrer que pour toute $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de boules de rayon $\varepsilon$ dans $\mathcal{B}$, telles que leur réunion couvre l'ensemble $\{f(x);\ x \in \mathbb{R}\}$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $l = l_\varepsilon$ le longueur d'inclusion associé à $f$. Comme $f$ est continue sur le compact $[0,\, l]$, on déduit alors que l'ensemble $\{f(x);\ x \in [0,\, l]\}$ est un compact dans $\mathcal{B}$.

On prend $x_1, x_2, \cdots, x_n$, les centres des boules qui couvrent $\{f(x);\ x \in [0,\, l]\}$. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $\tau$ ($\varepsilon$-translation) dans l'intervalle $[-t,\, -t+l]$.
Comme $t + \tau \in [0,\, l]$, il existe un entier $p$ dans $\{1, 2, \cdots, n\}$ tel que $f(x+\tau) \in \mathbf{b}(x_p,\, \varepsilon)$, $\mathbf{b}(x_p,\, \varepsilon)$ : boule de centre $x_p$ et de rayon $\varepsilon$, donc
$$\|f(x) - x_p\| \leq \|f(x) - f(x+\tau)\| + \|f(x+\tau) - x_p\| < 2\varepsilon = \varepsilon',$$
par conséquent
$$\{f(x);\ x \in \mathbb{R}\} = \bigcup_{p=1}^{n} \mathbf{b}(x_p,\, \varepsilon').$$

□

La définition des fonctions $PP(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ donnée ci-dessus est peu maniable dans l'étude de certaines propriétés, notamment, pour montrer que l'ensemble $PP(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ forme un sous espace de $C_b(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, l'ensemble des fonctions continues bornées, muni de la norme uniforme.

Dans ce qui suit, on donnera deux caractérisations de la presque périodicité de Bohr, la première est basée sur les fonctions translatées introduite par S. Bochner ; la deuxième est obtenue par Bohr au moyen des polynômes trigonométriques généralisés. Le second résultat, appelé aussi théorème fondamental d'approximation, affirme que l'ensemble $PP(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ s'identifie avec la fermeture uniforme de l'ensemble des polynômes trigonométriques généralisés.

**Définition 2.9.** *Une fonction $f : \mathbb{R} \to (\mathcal{B}, \|.\|)$ continue est dite normale, ou presque périodique au sens de Bochner, si l'ensemble des translatées*

$$H\left(f\right) = \left\{f_s\ ,\ f_s\left(t\right) = f\left(t+s\right)\ ,\ \forall t \in \mathbb{R}\right\}$$

*est relativement compact dans $C_b(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Autrementdit : pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, on peut extraire une sous-suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que, la suite $(f(x+u_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente.*

Le théorème suivant affirme que la presque périodicité de Bohr et celle de Bochner sont équivalentes :

**Théorème 2.10.** *Soit $f : \mathbb{R} \to (\mathcal{B}, \|.\|)$ une fonction continue. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$f$ est normale ;*
2. *$f$ est uniformément presque périodique.*

*Démonstration.* 1. (1) $\Rightarrow$ (2)

On raisonne par contraposition. On suppose que $f \notin PP(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.
Il existe donc $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall\, l > 0$, il existe un intervalle de longueur $l$ qui ne contient aucun $\varepsilon_0$-translation.
Dans ce qui suit, nous allons construire par récurrence une suite $(u_n)_n$ telle que

$$\forall\, i \neq j,\ |u_i - u_j| \notin T(f, \varepsilon_0);$$

où $T(f, \varepsilon_0)$ l'ensemble des $\varepsilon_0$-translation associé à la fonction $f$.
Pour une telle suite, on aura :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x+u_i-u_j) - f(x)\| > \varepsilon_0,$$

soit encore

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x+u_i) - f(x+u_j)\| > \varepsilon_0.$$

Ce qui montre que l'on peut pas extraire une sous-suite convergente de la suite $(f_{u_n})_n$.
Donc $f$ ne peut être normale.

Soit $u_1 \neq 0$, il existe un intervalle $[a_1,\, b_1]$, tel que $(b_1 - a_1) > 2\,|u_1|$, qui ne contient aucun $\tau$ ($\varepsilon$-translation).
On pose $u_2 = (1/2)(a_1 + b_1)$, comme $(u_2 - u_1) \in [a_1,\, b_1]$, donc $(u_2 - u_1)$ ne peut pas être un $\varepsilon$-translation, donc

$$\sup_x \|f(x + u_2 - u_1) - f(x)\| > \varepsilon.$$

Il existe un autre intervalle $[a_2,\, b_2]$, tel que $(b_2 - a_2) > 2(|u_1| + |u_2|)$, qui ne contient aucun $\varepsilon$-translation.
On pose $u_3 = (1/2)(a_2 + b_2)$, comme $(u_3 - u_1)$ et $(u_3 - u_2) \in [a_2,\, b_2]$, $(u_3 - u_1)$ et $(u_3 - u_2)$ ne peuvent pas être des $\varepsilon$-translation, donc nous avons

$$\sup_x \|f(x + u_3 - u_1) - f(x)\| > \varepsilon \text{ et } \sup_x \|f(x + u_3 - u_2) - f(x)\| > \varepsilon.$$

Avec la même procédure, à l'ordre $n$, il existe un autre intervalle $[a_n,\, b_n]$, tel que $(b_n - a_n) > 2(|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n|)$, qui ne contient aucun $\varepsilon$-translation.
On pose $u_{n+1} = (1/2)(a_n + b_n)$, on a $\forall\, i < n + 1$, $(u_{n+1} - u_i) \in [a_n,\, b_n]$, donc les $(u_{n+1} - u_i)$, pour $i < n + 1$, ne peuvent pas être des $\varepsilon$-translation.

2. (2) $\Rightarrow$ (1)
Soit $S = (S_n)_n$ une suite d'ensembles dense dans $\mathbb{R}$.
$(f_{u_n})_n$ une suite de translation, $f_{u_n}(t_i) = f(u_n + t_i)$. On procède au choix d'une sous-suite de $(f_{u_n})_n$ convergente.
$(f_{u_{1.n}})_n$ une sous-suite de $(f_{u_n})_n$ convergente dans $S_1$, $(f_{u_{2.n}})_n$ une sous-suite de $(f_{u_{1.n}})_n$ convergente dans $S_2$, ainsi de suite pour les autres termes, $(f_{u_{i.n}})_n$ une sous-suite de $(f_{u_{(i-1).n}})_n$ convergente dans $S_i$.
On forme la suite diagonale $(f_{u_{n.n}})_n$ qui converge dans $S$.

Maintenant, on s'intéresse à la convergence uniforme de la suite $(f_{u_{n.n}})_n$, qui sera notée $(f_{v_n})_n$.
Soit $\varepsilon > 0$, $l = l_\varepsilon > 0$ longueur d'intervalles qui contient $\varepsilon$-translation correspond à la presque périodicité, et $\delta$ correspond à la continuité uniforme de la fonction $f$ ; on décompose l'intervalle $[0,\, l]$ en des sous-intervalles de longueur inférieur à $\delta$ et dans chacun, on choisit un point de $S$. Soit $S_0$ l'ensemble des points choisis $S_0 = \{r_1, r_2, \cdots, r_p\}$.
La suite $(f_{v_n})_n$ est uniformément convergente, donc il existe $N_\varepsilon$, $\forall\, m, n \geq N_\varepsilon$ on a

$$\|f_{v_n}(r_i) - f_{v_m}(r_i)\| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \cdots, p.$$

$\forall\, t \in \mathbb{R}$, il existe un $\tau$ ($\varepsilon$-translation) dans l'intervalle $[-t,\, -t + l]$.
$\tau + t \in [0,\, l]$, et soit $r_i \in S_0$ tel que $|\tau + t - r_i| < \delta$.

Pour $m, n \geq N_\varepsilon$, on a

$$\begin{aligned}\|f_{v_n}(t) - f_{v_m}(t)\| &= \|f(v_n + t) - f(v_m + t)\|\,, \\ &\leq \|f(v_n + t) - f(v_n + \tau + t)\| + \|f(v_n + \tau + t) - f(r_i + v_n)\| \\ &+ \|f(r_i + v_n) - f(r_i + v_m)\| + \|f(r_i + v_m) - f(v_m + \tau + t)\| \\ &+ \|f(v_m + \tau + t) - f(v_m + t)\| < 5 \cdot \varepsilon = \varepsilon'.\end{aligned}$$

Donc la sous-suite $(f_{v_n})_n$ de $(f_{u_n})_n$ est uniformément convergente, ce qui nous confirme la normalité de la fonction $f$.

□

**Remarque 2.11.** *Dans le cas où $f$ est périodique, l'ensemble $H(f)$ est compact (voir [29]).*

En 1962, Bochner a donné, dans son article "A new approch to Almost periodicity", [11], une autre caractérisation, dite critère des doubles suites de Bochner des fonctions presque périodiques.

**Théorème 2.12.** *[11] $f$ est Bochner-presque périodique ssi $\forall \{\alpha'_n\}, \{\beta'_n\} \subset \mathbb{R}$, il existe deux sous suites $\{\alpha_n\} = \{\alpha'_{m_n}\}, \{\beta_n\} = \{\beta'_{m_n}\}$ de mêmes indices telles que*

$$\lim_{s\to\infty}\lim_{r\to\infty} f(\alpha_r + \beta_s + t) = \lim_{n\to\infty} f(\alpha_n + \beta_n + t), \tag{2.1}$$

*existent ponctuellement par rapport à $t$.*

Une propriété cruciale du critère des doubles suites de Bochner est que les limites de (2.1) existent par rapport aux trois modes de convergences : ponctuelle, uniforme sur intervalles compacts et uniformes sur $\mathbb{R}$. Ce critère remarquable permet donc d' établir la convergence uniforme en vérifiant la convergence simple (voir [11]).

Nous allons maintenant présenter la propriété d'approximation des fonctions Bohr presque périodiques par des polynômes trigonométriques généralisés. Notons d'abord que les fonctions de la formes $x \longmapsto \exp(i\lambda x)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, sont périodiques donc presque périodiques. Donc toute combinaison linéaire finie de telles fonctions est presque périodique.

**Définition 2.13.** *On appelle polynôme trigonométrique généralisé, toute combinaison de la forme*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \exp(ir_k t)\,, \;\; \alpha_k \in \mathcal{B}, \;\; r_k \in \mathbb{R}, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble de tels polynômes.

**Définition 2.14.** *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathcal{B}$, continue possède la propriété d'approximation polynômiale, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique $P_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tel que*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x) - P_\varepsilon(x)\| < \varepsilon.$$

Une autre caractérisation élégante et pratique de l'algèbre $PP(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, lorsque $\mathcal{B}$ est muni d'une norme équivalente à un produit scalaire, est obtenue au moyen des polynômes trigonométriques. Ce résultat, appelé aussi théorème fondamental d'approximation, affirme que l'algèbre $PP(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ s'identifie avec la fermeture uniforme de l'ensemble $\mathcal{A}$ (cf.[2], [20], [78])

$$PP(\mathbb{R}, \mathcal{B}) = \overline{\mathcal{A}}^{\|\cdot\|_\infty}.$$

En d'autres termes,

**Théorème 2.15.** *Une fonction $f$ est $PP(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ si, et seulement si, elle possède la propriété d'approximation polynômiale.*

La démonstration de ce théorème est longue et technique, le lecteur intéressé pourra se rapporter par exemple aux références [20] ou [39].

Les deux caractérisations précédentes peuvent permettre de démonter, assez facilement, les propriétés cités ci-avant et d'autres (voir proposition ci-après).

**Proposition 2.16.** *Soient $f$, $g \in PP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors*

1. *$|f|$ est presque périodique ;*
2. *Les fonctions : $x \mapsto \overline{f(x)}$, $x \mapsto f(\alpha x)$, $x \mapsto \alpha f(x)$ et $x \mapsto f(\alpha+x)$ sont aussi presque périodiques ;*
3. *$f + g$ et $f \cdot g$ sont presque périodiques ;*
4. *La limite uniforme de fonctions presque périodiques est presque périodique ;*
5. *Les parties réelles et imaginaires d'une fonction presque périodique sont presque périodiques.*

*Démonstration.*

1. Ce point découle du fait que $\forall\, x,\, y \in \mathbb{C}$, on a $|\,|x| - |y|\,| \leq |x - y|$.
2. Vu la préservation du module par la conjugaison, on déduit que $\overline{f}$ est presque périodique.
   Soit $P(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \exp\{i\lambda x\}$ le polynôme trigonométrique correspond à la fonction presque périodique $f$. Alors le polynôme $P_1(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \exp\{i\alpha\lambda x\}$ est le polynôme trigonométrique correspond à la fonction $x \mapsto f(\alpha x)$, donc cette dernière est presque périodique.
   Pour les autres fonctions, il est facile de vérifier, et grâce au critère de Bochner, que les translations d'une fonction presque périodique sont aussi presque périodiques.

3. Soit $\varepsilon > 0$, il existe deux polynômes trigonométriques $P$ et $Q$ tels que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x) - P(x)\| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} \|g(x) - Q(x)\| < \varepsilon.$$

Avec l'inégalité triangulaire, nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\|(f+g) - (P+Q)\| \leq \|f - P)\| + \|g - Q\| < 2\,\varepsilon,$$

qui nous confirme la presque périodicité de la fonction $(f+g)$.
Pour $f \cdot g$, nous posons

$$A = \max\left\{\sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x)\|, \sup_{x\in\mathbb{R}} \|g(x)\|\right\} + 1,$$

il existe deux polynômes trigonométriques $P$ et $Q$ tels que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x) - P(x)\| < \frac{\varepsilon}{A} \quad \text{et} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} \|g(x) - Q(x)\| < \frac{\varepsilon}{A}.$$

Le produit $P \cdot Q$ reste toujours polynôme trigonométrique. On a donc

$$\begin{aligned} \|(f \cdot g) - (P \cdot Q)\| &\leq \|(f \cdot g) - (f \cdot Q)\| + \|(f \cdot Q) - (P \cdot Q)\|, \\ &\leq \|f\|\,\|g - Q\| + \|Q\|\,\|f - P\|, \\ &< \frac{\varepsilon}{A}A + \frac{\varepsilon}{A}A = 2\,\varepsilon. \end{aligned}$$

Donc $(f \cdot g)$ est presque périodique.

4. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions presque périodiques converge uniformément vers la fonction $f$.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|f - f_{n_0}\|_\infty < \varepsilon.$$

Comme $f_{n_0}$ est presque périodique, il existe un polynôme trigonométrique $P$ tel que

$$\|f_{n_0} - P\|_\infty < \varepsilon.$$

Donc, on a

$$\|f - P\|_\infty \leq \|f - f_{n_0}\|_\infty + \|f_{n_0} - P\|_\infty < 2\,\varepsilon.$$

5. Ce point est un résultat direct des deux propriétés 2 et 3.

$\square$

### 2.3.1 Valeur moyenne d'une fonction presque périodique

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathcal{B}$ une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$. On définit la valeur moyenne supérieure et la valeur moyenne inférieure, qu'on note respectivement, $\overline{M}(f)$ et $\underline{M}(f)$ comme suit :

$$\overline{M}(f) = \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\,dt \quad \text{et} \quad \underline{M}(f) = \underline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\,dt.$$

Lorsque ces deux valeurs sont égales, on obtient la valeur moyenne de $f$, notée $M(f)$.

La valeur moyenne d'une fonction périodique, de période élémentaire $\tau \in \mathbb{R}$, existe et vaut ($cf.$[21]) :

$$M(f) = \frac{1}{\tau} \int_{0}^{\tau} f(t)\,dt.$$

Concernant les fonctions $PP(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, on a le résultat partiel suivant ($cf.$ [2] , [8] , [35]) :

**Théorème 2.17.** *Pour toute fonction $f$ appartenant à $PP(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, la limite suivante existe et est finie :*

$$M(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{a}^{a+T} f(t)\,dt, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

### 2.3.2 Convergence en moyenne des suites de fonctions $PP(\mathbb{R}, \mathcal{B})$

Une suite $\{f_n\}_{n\geq 1}$ est dite convergente en moyenne quadratique lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 0$ tel que

$$M\left(\|f_n - f_{n'}\|^2\right) < \varepsilon, \ \forall n, n' \geq n_0.$$

Ce mode de convergence plus maniable n'implique pas la convergence uniforme de la suite $\{f_n\}_{n\geq 1}$. Toutefois, lorsqu'on se restreint à des classes particulières de fonctions $PP(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, un tel lien peut être établi :

**Définition 2.18.** *Une famille $F = \{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de fonctions $PP(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ est dite homogène lorsque :*

1. *$F$ est équicontinue : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|x - x'| < \delta$ implique $\|f_\alpha(x) - f_\alpha(x')\| < \varepsilon$, uniformément sur $\alpha$ ;*

2. *pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\bigcap_{\alpha\in I} T(\varepsilon, f_\alpha)$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$.*

Il est clair que toute suite de fonctions uniformément convergente est convergente en moyenne quadratique. Ceci découle de l'inégalité ($cf.$[20]) :

$$M\left\{\|f_n - f_{n'}\|^2\right\} \leq \|f_n - f_{n'}\|_\infty^2 .$$

L'inverse est en général faux, cependant, une suite de fonctions $PP(\mathbb{R},\mathcal{B})$ homogène (considérée comme famille) convergeant en moyenne quadratique, l'est aussi uniformément ($cf.$[20]) .

### 2.3.3 Séries de Fourier des fonctions $PP(\mathbb{R},\mathcal{B})$

A l'instar des fonctions périodiques, les fonctions uniformément presque périodiques admettent des développements en séries de Fourier. Cependant, les différents tests de convergence des séries de Fourier de fonctions périodiques, basés sur le comportement de la fonction au voisinage d'un point, n'ont pas été généralisés au cas des fonctions uniformément presque périodiques. Ces tests sont en fait liés à la nature des séries de Fourier de fonctions périodiques et ne peuvent se généraliser qu'à des cas particuliers de fonctions presque périodiques. Pour rendre une telle étude possible, les exposants de Fourier de la fonction $PP(\mathbb{R},\mathcal{B})$ doivent être astreints à certaines conditions notamment pour le calcul du noyau et les différentes estimations nécessaires pour de tels résultats ($cf.$[2], [7]).

Nous présentons ici les éléments fondamentaux concernant les séries de Fourier des fonctions uniformément presque périodiques.

Soit $f \in PP(\mathbb{R},\mathcal{B})$. On sait que pour tout nombre réel $\lambda$, la fonction $f(x)\exp\{-i\lambda x\}$ est $PP(\mathbb{R},\mathcal{B})$. On pose donc :

$$a(\lambda) = M\left(f(x)\exp\{-i\lambda x\}\right).$$

Le vecteur $a(\lambda) \in \mathcal{B}$ est appelé coefficient de Fourier-Bohr de la fonction $f$.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$, $N$ nombres réels arbitraires et $b_1, b_2, ..., b_N$, des éléments quelconques de $\mathcal{B}$. En utilisant les propriétés de la moyenne, on montre que l'on a :

$$M\left(\left\|f(x) - \sum_{n=1}^{N} b_n \exp(i\lambda_n x)\right\|^2\right) = M\left(\|f(x)\|^2\right) - \sum_{n=1}^{N}\|a(\lambda_n)\|^2 + \sum_{n=1}^{N}\|b_n - a(\lambda_n)\|^2$$

Cette équation est appelée équation d'approximation en moyenne quadratique de $f$ par des polynômes $\sum\limits_{n=1}^{N} b_n \exp(i\lambda_n x)$ .

Lorsque $b_n = a(\lambda_n)$ , on obtient, pour $N$ fixé, la meilleure approximation par des polynômes du type : $\sum\limits_{n=1}^{N} b_n \exp(i\lambda_n x)$ . On aura, dans ce cas :

$$\sum_{n=1}^{N}\|a(\lambda_n)\|^2 \leq M\left(\|f(x)\|^2\right).$$

Ceci étant vrai pour tout entier $N$, on déduit l'inégalité dite de Bessel :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|a(\lambda_n)\|^2 \leq M\left(\|f(x)\|^2\right).$$

Comme conséquence de cette inégalité, l'ensemble $C_n = \left\{\lambda \in \mathbb{R}, \|a(\lambda)\| > \frac{1}{n}\right\}$ est fini pour tout entier positif $n$, et par suite, l'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{R}, \|a(\lambda)\| > 0\} = \underset{n\geq 1}{\cup} C_n$ est au plus dénombrable. On peut donc affirmer le résultat fondamental suivant :

Il existe, un ensemble au plus dénombrable de valeurs de $\lambda$ pour lesquelles $a(\lambda)$ est non nul. On note $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n, ...$ ces valeurs. La série de Fourier formelle associée à $f$ est donnée par

$$S(f)(x) = \sum_{n\geq 1} a(\lambda_n) \exp(i\lambda_n x).$$

Les nombres réels $\lambda_n$ sont appelés exposants de Fourier de $f$ et les vecteurs $a(\lambda_n)$ correspondants sont appelés coefficients de Fourier-Bohr.

**Remarque 2.19.** *Lorsque $\mathcal{B}$ est un espace de Hilbert, l'inégalité de Bessel devient une égalité dite de Parseval* (*cf.*[*78*]) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|a(\lambda_n)\|^2 = M\left(\|f(x)\|^2\right).$$

Ce résultat fondamental, dû à H. Bohr, permet de montrer une propriété d'approximation des fonctions $PP(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ par des polynômes trigonométriques particuliers, les polynômes de Bochner-Fejèr. Cette propriété d'approximation généralise l'approximation classique de Fejèr des fonctions périodiques (voir par exemple [7]).

## 2.4 Les suites presque périodiques

Dans cette section, on s'intéressera à la notion de fonctions presque périodiques à variable entière, dite aussi suites presque périodiques, et à valeurs dans un espace de Banach. Cette notion a été initiée en 1928 par A. Walther [73] dans le cas des suites réelles ou complexes, et indépendamment par K.Fan [28] en 1942 dans le cas de suites qui sont à valeurs dans un espace de Banach [1]. Cette notion, développée récemment par de nombreux auteurs (voir par exemple [21], [58], [76] et [77]), a réussi à s'imposer dans divers domaines des sciences appliquées grâce aux modèles mathématiques discrets.

1. Dans une lettre à K. Fan, du 6 août 1942, M. Kiropp a eu l'obligeance de signaler que A. Walther a déjà étudié, en 1928, les fonctions presque périodiques d'une variable entière et de valeurs réelles ou complexes.

**Définition 2.20.** *L'application $U : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{B}$ est dite presque périodiques si à tout $\varepsilon > 0$, on peut faire correspondre un entier positif $N = N(\varepsilon)$, appelé longueur d'inclusion, avec la propriété que dans n'importe quel ensemble de $N$ entiers consécutifs quelconques, il existe $p \in \mathbb{Z}$, tel que*

$$\|U_{n+p} - U_n\| < \varepsilon \ ; \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Comme dans le cas des fonctions à variable réelle, le nombre $p$ est dit $\varepsilon$-translation, ou $\varepsilon$-presque période associé à $\varepsilon$.
Il est clair que toute suite périodique est presque périodique. Nous verrons plus loin qu'il existe des suites presque périodiques sans être periodiques.

Nous disposons d'un critère du type Bochner pour la caractérisation des suites presque périodiques.

**Définition 2.21.** *Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dite normale ou elle vérifie le critère de Bochner si pour toute suite d'entiers $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on peut extraire une sous-suite $(m_{k_j})_j$ telle que la suite $(U_{n+m_{k_j}})_{j>0}$ converge uniformément.*

Cette définition est tout à fait analogue à celle des fonctions normale d'une variable réelles. En suivant dans leurs grandes lignes, les démonstrations connues dans le cas continu, on peut démontrer le théorème suivant.

**Théorème 2.22.** *[20] Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction à variable entière soit presque périodique est qu'elle soit normale.*

Ce théorème permet d'établir facilement certaines propriétés des suites presque périodiques, en particulier, si $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont deux suites presque périodiques, alors $(a_n + b_n)_n$ et $(a_n b_n)_n$ sont presque périodiques.

On munit l'ensemble $PP(\mathbb{Z}, \mathcal{B})$, l'ensemble des suites presque périodiques à valeurs dans un espace de Banach, de la norme de la convergence uniforme sur $\mathbb{Z}$, i.e.,$\|f\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|f(n)\|$. Alors, $PP(\mathbb{Z}, \mathcal{B}), \|\cdot\|_\infty)$ a la structure d'un espace de Banach [20].

Avant de donner quelques exemples de suites presque périodiques, nous allons énoncer une autre propriété intéressante caractérisant les suites presque périodiques en termes de fonctions presque périodiques. Ce résultat permettra de transporter certaines propriétés valables dans le cas continu au cas discret.

**Théorème 2.23.** *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ soit presque périodique est l'existence d'une fonction $h$, Bohr-presque périodique ($h \in PP(\mathbb{R}, \mathcal{B})$), telle que*

$$f_n = h(n) \ ; \ \ n \in \mathbb{Z}.$$

*Démonstration.* 1. Nécessité : Supposons que la suite $(f_n)_n$ est presque périodique.
Posons
$$h(x) = f_n + (x-n)(f_{n+1} - f_n) \ ; \ x \in [\, n \, , \, n+1 \, [ \text{ et } n \in \mathbb{Z}. \tag{2.2}$$
Notons que $h$ n'est que l'extension linéaire de la suite $(f_n)_n$.
Evidemment, $h$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Nous allons démontrer qu'elle est Bohr-presque périodique.
La presque périodicité de la suite $(f_n)_n$ entraîne que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon > 0$ tel que parmi les $N_\varepsilon$ entiers consécutifs, il existe un $\varepsilon$-translation $p$ vérifiant :
$$\|f_{n+p} - f_n\| < \varepsilon, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}. \tag{2.3}$$
Remarquons que si $x \in [\, n \, , \, n+1 \, [$, alors $(x+p) \in [\, n+p \, , \, n+p+1 \, [$, et la valeur de la fonction $h$ au point $(x+p)$ est
$$h(x+p) = f_{p+n} + (x-n)(f_{n+p+1} - f_{p+n})$$
En tenant compte du fait que $(x-n) \in [\, 0 \, , \, 1 \, [$ et de l'inégalité (2.3), on obtient :
$$\begin{aligned} \|h(x+p) - h(x)\| &= \|f_{p+n} + (x-n)\,(f_{n+p+1} - f_{p+n}) - [f_n + (x-n)(f_{n+1} - f_n)]\| \, , \\ &= \|f_{p+n} - f_n + (x-n)[(f_{n+p+1} - f_{p+n}) - (f_{n+1} - f_n)]\| \, , \\ &\le \|f_{p+n} - f_n\| + \|(x-n)\| \, \|(f_{n+p+1} - f_{n+1}) - (f_{p+n} - f_n)\| \, , \\ &\le \|f_{p+n} - f_n\| + \|f_{n+p+1} - f_{n+1}\| + \|f_{p+n} - f_n\| < 3 \cdot \varepsilon = \varepsilon'. \end{aligned}$$
Cela signifie que $p$ est $\varepsilon$-translation associé à la longueur d'inclusion $N_\varepsilon$. Donc $h$ est Bohr-presque périodique.

2. Inversement, soit $h \in PP(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Nous allons utiliser le critère de Bochner (normalité) pour montrer que la suite $(h\,(m))_{m \in \mathbb{Z}}$ est presque périodique. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$. Il existe une sous suite $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(u_n)_n$, telle que la suite $(h(u_{n_k} + x))_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Ou encore, la suite $(h(u_{n_k} + m))_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{Z}$. Ce qui signifie que $(h(m))_{m \in \mathbb{Z}}$ est presque périodique.

□

Le théorème (2.23) permet de former un grand nombre d'exemples de fonctions presque périodiques d'une variable entière, par exemple :

**Exemple 2.24.** *La fonction $h(x) = \cos(x)$ est une fonction continue presque périodique de la variable réelle $x$, $f_n = \cos(n)$ est donc une suite presque périodique.*
*On remarque que $f_n = \cos(n)$ n'est pas une suite périodique, bien que la fonction $h(x) = \cos(x)$ soit périodique [39].*

Le théorème qui suit constitue une réciproque du théorème (2.23) au sens où la presque périodicité d'une fonction continue à variable réelle est caractérisée en terme de la presque périodicité d'une certaine suite.

**Théorème 2.25.** *[20] Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f$ soit presque périodique est que :*

1. *$f$ soit uniformément continue sur $\mathbb{R}$ ;*
2. *Il existe une suite $(s_k)_{k>0}$ de nombres réels positifs, décroissante vers zéro et telle que pour chaque $k > 0$, $\{f(ns_k)\}$ est une suite presque périodique.*

Le théorème suivant, connu sous le nom " Théorème de la moyenne", est analogue au théorème 2.17.

**Théorème 2.26.** *La valeur moyenne d'une suite presque périodique $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ existe et vaut :*

$$M(f) = \lim_{k\to\infty} k^{-1} \sum_{j=1}^{k} f_{n+j}.$$

*Démonstration.* Considérons la fonction presque périodique $h$ correspondante à la suite presque périodique $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. D'après la formule (2.2) on a

$$h(x) = f_n + (x-n)[f_{n+1} - f_n] \ ; \ x \in [\,n\,,\, n+1\,[,\ n \in \mathbb{Z},$$

de plus sa valeur moyenne est donnée par

$$M(h) = \lim_{T\to\infty} \left( T^{-1} \int_0^T h(x)dx \right).$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
k^{-1} \int_n^{n+k} h(x)dx &= k^{-1} \sum_{i=1}^{k} \int_{n+i-1}^{n+i} h(x)dx, \\
&= k^{-1} \sum_{i=1}^{k} \int_{n+i-1}^{n+i} \left(f_{n+i-1} + (x-n-i+1)(f_{n+i} f_{n+i-1})\right) dx, \\
&= k^{-1} \sum_{i=1}^{k} \left[ x f_{n+i-1} + (x-n-i+1)^2 \frac{1}{2} \left(f_{n+i} f_{n+i-1}\right) \right]_{n+i-1}^{n+i}, \\
&= k^{-1} \sum_{i=1}^{k} f_{n+i-1} + \frac{k^{-1}}{2} \sum_{i=1}^{k} \left(f_{n+i} - f_{n+i-1}\right), \\
&= k^{-1} \sum_{i=1}^{k} f_{n+i-1} + \frac{k^{-1}}{2} \left(f_{n+k} - f_n\right), \\
&= k^{-1} \sum_{i=1}^{k} f_{n+i} + \frac{k^{-1}}{2} \left(f_n - f_{n+k}\right).
\end{aligned}$$

Comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée, on a $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{k^{-1}}{2}(f_n - f_{n+k}) = 0$.

Donc $M(h) = \lim\limits_{k\to\infty} k^{-1} \int\limits_{n}^{n+k} h(x)dx = \lim\limits_{k\to\infty} k^{-1} \sum_{j=1}^{k} f_{n+j} = M(f)$.

$\square$

**Théorème 2.27.** *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite sommable dans $\mathcal{B}$,i.e.,$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|a_n\| < \infty$. Alors pour toute suite presque périodique $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par*

$$g_n = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i f_{n-i},$$

*est presque périodique.*

*Démonstration.* Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite presque périodique et $p$, le $\varepsilon$-presque période associé a $\varepsilon > 0$, donné.
On a pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \|g_{n+p} - g_n\| &= \left\| \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i f_{n+p-i} - \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i f_{n-i} \right\|, \\ &\leq \sum_{i\in\mathbb{Z}} \|a_i\| \|f_{n+p-i} - f_{n-i}\| . \end{aligned}$$

Comme $\sum_{i\in\mathbb{Z}} \|a_i\|$ est finie, on a

$$\sup_n \|g_{n+p} - g_n\| \leq \sum_{i\in\mathbb{Z}} \|a_i\| \sup_n \|f_{n+p-i} - f_{n-i}\| .$$

On déduit donc que $p$ est un $\varepsilon'$-presque période de $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où $\varepsilon' = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \|a_i\| \varepsilon$.

$\square$

Avant de clôturer cette section, nous allons énoncer deux résultats d'application des suites presque périodiques qui sont d'un intérêt fondamental dans la théorie des systèmes dynamiques discrets (voir [21]). Il s'agit de deux résultats de stabilité :

**Théorème 2.28.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite presque périodique à valeurs réelles ou complexes, et $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite définie implicitement par*

$$\begin{cases} g_0 \text{ donné}, \\ f_n = g_{n+1} - g_n. \end{cases}$$

*Alors la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est presque périodique si, et seulement si, elle est bornée.*

Ce résultat admet une version analogue dans le cas des fonctions presque périodiques, qui consiste à dire que la primitive d'une fonction presque périodique est presque périodique si, et seulement si elle est bornée (voir par exemple [20], page 98).

*Démonstration.* Soit $(f_n)_n \in PP(\mathbb{Z}, \mathcal{B})$, $h$ la fonction presque périodique correspondante à la suite $(f_n)_n$.
On a pour $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
\int_0^t h(x)dx &= \int_0^{[t]} h(x)dx + \int_{[t]}^t h(x)dx, \\
&= \sum_{j=0}^{[t]-1} \int_j^{j+1} h(x)dx + \int_{[t]}^t h(x)dx, \\
&= \sum_{j=0}^{[t]-1} \frac{1}{2}(f_{j+1} + f_j) + \int_{[t]}^t h(x)dx, \\
&= f_1 + f_2 + \cdots + f_{[t]} + \frac{1}{2}\left(f_0 - f_{[t]}\right) + \int_{[t]}^t h(x)dx, \\
&= (g_2 - g_1) + (g_3 - g_2) + \cdots + \left(g_{[t]+1} - g_{[t]}\right) + \frac{1}{2}(f_0 - f_{[t]}) + \int_{[t]}^t h(x)dx, \\
&= g_{[t]+1} \underbrace{- g_0 - \frac{1}{2}\left(f_0 + f_{[t]}\right)}_{(I)} + \underbrace{\int_{[t]}^t h(x)dx}_{(II)}.
\end{aligned}$$

On remarque que les deux parties (I) et (II) sont bornées, donc la suite $(g_n)_n$ est bornée si, et seulement si, $\int_0^t h(x)dx$ est bornée.

□

Concernant le deuxième résultat de stabilité, nous nous intéressons aux équations aux différences de la forme

$$x_{n+1} = Ax_n + f_n; \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2.4}$$

où $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont deux suites dans $\mathbb{R}^m$, $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in PP(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m)$, et $A$ est une matrice carré d'ordre $m$ ( $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$).
Avant d'énoncer le résultat concernant la presque périodicité des solutions de l'équation (2.4), on a besoin de rappeler le résultat classique de l'algèbre linéaire suivant :

**Théorème 2.29.** *Soit $m \in \mathbb{N}$ et $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$. Il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ inversible, $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure contenant les valeurs propres de $A$ sur le* *diagonale telles que*

$$A = P^{-1}BP. \tag{2.5}$$

Nous disposons du résultat suivant :

**Théorème 2.30.** *Supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est presque périodique. Alors toute solution $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de l'équation (2.4) est presque périodique si, et seulement si, elle est bornée.*

*Démonstration.* En premier lieu, on effectue une transformation linéaire $x_n = Py_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, où $P$ est la matrice donnée par (2.5).
Notons

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1m} \\ 0 & \lambda_2 & b_{23} & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix},$$

la matrice triangulaire associée à $A$, où les $\lambda_i$ sont les valeurs propres de $A$, et $b_{ij} \in \mathbb{C}\,;\ i,j = 1,\cdots,m$.

En tenant compte de cette transformation, le système (2.4) devient :

$$y_{n+1} = By_n + \varphi_n\,;\ \ n \in \mathbb{Z}, \tag{2.6}$$

où $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (Pf_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Notons que la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ reste aussi presque périodique (en tant que combinaison linéaire à coefficients constants de telles fonctions).

On commence par résoudre la $m$-ième équation de (2.6), à savoir

$$y_{n+1,m} = \lambda_m y_{n,m} + \varphi_{n,m}\,;\ \ n \in \mathbb{Z}, \tag{2.7}$$

l'équation (2.7) est une équation scalaire.

Notons que la résolution de (2.7) permet de résoudre le système (2.6) tout entier ( par la méthode des remontés).
Considérons donc la forme simplifiée de (2.7)

$$z_{n+1} = \lambda z_n + c_n\,;\ n \in \mathbb{Z}. \tag{2.8}$$

On distingue trois cas, suivant le module du coefficient $\lambda$.

1. Si $|\lambda| < 1$.
   Dans l'équation (2.8), on remplace $n$ par $n+p$, $p \in \mathbb{Z}$, puis on soustrait l'équation (2.8) de l'équation obtenue. On obtient l'équation suivante :

$$z_{n+p+1} - z_{n+1} = \lambda(z_{n+p} - z_n) + (c_{n+p} - c_n)\,;\ n \in \mathbb{Z}, \tag{2.9}$$

d'où
$$\sup_n |z_{n+p+1} - z_{n+1}| \leq |\lambda| \sup_n |z_{n+p} - z_n| + \sup_n |c_{n+p} - c_n| .$$
Comme
$$\sup_n |z_{n+p+1} - z_{n+1}| = \sup_n |z_{n+p} - z_n| ,$$
donc, grâce à la bornitude de $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, on a pour tout $p > 0$
$$\sup_n |z_{n+p} - z_n| \leq (1 - |\lambda|)^{-1} \sup_n |c_{n+p} - c_n| . \tag{2.10}$$
Cela signifie que si $p$ est un $\varepsilon$-presque période de $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, il reste aussi un $(1+|\lambda|)^{-1}\varepsilon$-presque période de $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

2. Si $|\lambda| > 1$.
   Avec le même raisonnement du premier cas, on obtient la formule suivante :
$$\sup_n |z_{n+p} - z_n| \leq (|\lambda| - 1)^{-1} \sup_n |c_{n+p} - c_n| . \tag{2.11}$$
   Ce qui nous assure la presque périodicité de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.
3. Si $|\lambda| = 1$, on a $\lambda = e^{-i\theta}$; $\theta \in \mathbb{R}$.
   En multipliant les deux membres de l'équation (2.8) par $e^{i\theta(n+1)}$, on obtient l'équation suivante
$$z_{n+1}e^{i\theta(n+1)} = e^{i\theta(n+1)} \left[e^{-i\theta} z_n + c_n\right] \; ; \; n \in \mathbb{Z}.$$
   Et pour simplifier l'écriture, on pose $U_n = z_n e^{in\theta}$ et $c'_n = e^{i\theta(n+1)} c_n$, alors l'équation précédente sera de la forme suivante :
$$U_{n+1} - U_n = c'_n \; ; \; n \in \mathbb{Z}. \tag{2.12}$$
   Comme la presque périodicité de la suite $(c'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est assurée par la presque périodicité de $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, et la bornitude de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est garantie par celle de $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, alors le théorème 2.28 nous assure la presque périodicité de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, et par conséquent, la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est presque périodique si, et seulement si, elle est bornée.

□

# Chapitre 3

# Les processus stochastiques périodiquement et presque périodiquement corrélés

## 3.1 Introduction et définitions

Dans ce chapitre, nous nous attacherons à étudier une généralisation des processus stationnaire, les processus périodiquement corrélés (cyclostationnaires), les processus presque périodiquement corrélés et les processus presque périodiquement unitaires. Nous verrons quels liens les unissent et ce qui les différencie.
Par le biais de la représentation spectrale des opérateurs unitaires, nous étudierons ces différentes classes sous cet angle, et étudierons les outils spectraux que nous pouvons leur associer.

L'intérêt statistique de la représentation spectrale d'un processus stochastique réside dans la possibilité d'exprimer ce dernier sous la forme d'une "somme" de processus périodiques non corrélés.

On se place dans $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, espace probabilisé.
On désigne par $L^2(\Omega)$ l'ensemble des variables aléatoires $X$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs complexes telles que $E(|X|^2) < \infty$. On utilisera aussi la mention

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ X \in L^2(\Omega) \, ; \; E(X) = 0 \right\}.$$

**Définition 3.1.** *Un processus stochastique complexe sur $\Omega$ est une famille de variables aléatoires $(X_t)_{t \in T}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, où $T$ est un ensembles quelconque.*
*$(X_t)_t$ est un processus stochastique du second ordre si $\forall \, t \in T, \; X_t \in L^2(\Omega)$.*

*On définit donc un processus du second ordre de la manière suivante :*

$$X \; : \left\{ \begin{array}{ll} T \to L^2(\Omega) & \\ t \mapsto X_t : & (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{C} \\ & \omega \mapsto X_t(\omega). \end{array} \right.$$

**Remarque 3.2.** *1. Si $T \subset \mathbb{Z}$, alors le processus est appelé suite aléatoire ou série temporelle, ou encore série chronologique ;*

2. *Si $T \subset \mathbb{R}$, alors le processus $(X_t)_{t\in T}$ est appelé fonction aléatoire ;*
3. *Un processus stochastique est donc, une fonction de deux variables $(t, \omega) \in T \times \mathbb{R}$. Ainsi,*

   **a-** $\forall\, t \in T$, *l'application*

   $$X_t = X(t, \cdot) : \left\{ \begin{array}{l} \Omega \to \mathbb{C} \\ \omega \mapsto X(t, \omega). \end{array} \right.$$

   *est appelée réalisation de $X$ au moment $t$ ;*

   **b-** $\forall\, \omega \in \Omega$, *l'application*

   $$X_\omega = X(\cdot, \omega) : \left\{ \begin{array}{l} T \to \mathbb{C} \\ t \mapsto X(t, \omega). \end{array} \right.$$

   *est appelée trajectoire de $X$ ;*
4. *Dans la pratique, une réalisation sur une durée finie d'une suite aléatoire est également appelée série chronologique par abus de langage.*

Il convient aussi de rappeler que pour un processus stochastique $(X_t)_{t\in T} \in L^2(\Omega)$, à valeur dans $\mathbb{C}$, l'espérance, le moment d'ordre $k$, la covariance, la variance et la corrélation, sont respectivement donnés, pour tous $t,\ s \in T$, comme suit :

- $m(t) = E(X_t) = \int_\Omega X_t(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$ ;
- $m^k(t) = E(X_t^k) = \int_\Omega X_t^k(\omega) d\mathbb{P}(\omega), \;\; k \in \mathbb{N}^*$ ;
- $R(t, s) = Cov(X_t, X_s) = E\left[(X_t - E(X_t))\left(\overline{X_s - E(X_s)}\right)\right]$ ;
- $V(t) = Var(X_t) = Cov(X_t, X_t)$ ;
- $\rho(s, t) = R(s, t)[V(s)V(t)]^{-1/2}$.

Nous ajoutons aussi que la fonction caractéristique de $X$ est la fonction définie par

$$\forall\, t \in T,\, \forall\, y \in \mathbb{R}, \varphi_t(y) = E\left(e^{iyX_t}\right) = \int_{\Omega} e^{iyx} d\mathbb{P}_{X_t}(x).$$

C'est donc la transformée de Fourier de la mesure $\mathbb{P}$ sur $\Omega$.

Rappelons aussi que la loi d'un processus stochastique est donnée par la loi conjointe du vecteur $(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n})$, pour tout choix de $n \in \mathbb{N}$ et $t_i \in T$, c'est à dire, par la famille des probabilités

$$\mathbb{P}_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(A_1, A_2, \cdots, A_n) = \mathbb{P}(X_{t_1} \in A_1, X_{t_2} \in A_2, \cdots, X_{t_n} \in A_n),$$
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, t_1, t_2, \cdots, t_n \in T,\ \text{et } \forall\, A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}},$$

où $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ désigne la tribu borélienne de $\mathbb{C}$.

Dans la suite de ce mémoire, sauf mention contraire, on prendra $T = \mathbb{Z}$.

**Définition 3.3.** *Un processus du second ordre $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ identiquement distribué est dit bruit blanc faible si pour chaque $n$, $m \in \mathbb{Z}$ ; $m \neq n$, on a :*
- $E(\xi_n) = 0$ ;
- $E(\xi_n^2) = \sigma$ ;
- $Cov(\xi_n, \xi_m) = 0$.

Il est dit bruit blanc fort si le troisième point est remplacé par " les variables $\xi_n$, $n \in \mathbb{Z}$ sont indépendantes".

**Définition 3.4.** *Un processus stochastique $(X_n)_n$ a une représentation causale si on peut l'écrire sous forme d'une combinaison linéaire du passé d'un autre processus du bruit blanc, i.e.,*

$$X_n = \sum_{j>0} \alpha_j\, \xi_{n-j}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

*où la suite $(\alpha_n)_n$ est absolument sommable.*

## 3.2 Processus stationnaires

Dans cette partie, on introduit quelque notion d'analyse des processus stochastique, notamment les concepts de stationnarité, de fonction d'autocovariance ainsi que sa représentation spectrale.
On distingue deux types de stationnarité :

**Définition 3.5.** *(Stationnarité stricte)*
*Un processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est dit strictement stationnaire, si pour tout sous-ensemble finie de $\mathbb{Z}$, $\{t_1 < t_2 < \cdots < t_n\}$, et pour tout $h \in \mathbb{Z}$, les deux vecteurs aléatoires, $(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n})$ et $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \cdots, X_{t_n+h})$, ont même distribution.*
*Autrement dit, sa loi de probabilité est invariante par translation.*

**Exemple 3.6.** *Une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées $(X_n)_n$ est un processus strictement stationnaire, en effet, $I = \{t_1 < t_2 < \cdots < t_n\}$ et pour tout $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, \cdots, n$ ; on a*

$$\mathbb{P}(X_{t_1} \in A_1, X_{t_2} \in A_2, \cdots, X_{t_n} \in A_n) = \Pi_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_t \in A_i).$$

**Définition 3.7.** *(Stationnarité faible)*
*Un processus stochastique du second ordre $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est dit faiblement stationnaire (ou K-stationnaire, K pour Khintchine) si ses statistiques d'ordre un et deux sont invariantes par translations, i.e.,*

1. $E(X_t) = m, \ \forall\, t \in \mathbb{Z}$ ;
2. $E(X_t^2) < \infty, \ \forall\, t \in \mathbb{Z}$ ;
3. $Cov(X_t, X_{t+h}) = R(t, t+h) = \gamma(h), \ \ \forall\, t,\, h \in \mathbb{Z}$.

La fonction $\gamma$ est dite fonction d'auto-covariance du processus faiblement stationnaire $X$.

On peut trouver, à ce mode de stationnarité, d'autres appellations : stationnarité en moyenne d'ordre deux, stationnarité faible ou aussi stationnarité tout court.

Ci-après, deux exemples de processus, l'un est faiblement stationnaire et l'autre ne l'est pas.

**Exemple 3.8.** *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un processus stochastique du second ordre définit par*

$$X_n = \xi_n + a\xi_{n-1},$$

*où $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc faible et $a \in \mathbb{R}$.*
*On vérifie facilement que $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est faiblement stationnaire. En effet,*

$$E(X_n) = E(\xi_n + a\xi_{n-1}) = 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

*Et*

$$\begin{aligned} Cov(X_n, X_m) &= E\left[(\xi_n + a\xi_{n-1})(\xi_m + a\xi_{m-1})\right], \\ &= E(\xi_n\xi_m) + aE(\xi_n\xi_{m-1}) + aE(\xi_{n-1}\xi_m) + a^2E(\xi_{n-1}\xi_{m-1}). \end{aligned}$$

*Donc, l'expression de la covariance est donnée par :*

$$Cov(X_n, X_m) = \begin{cases} \sigma^2(1+a^2), & n = m\,; \\ \sigma^2 a^2, & |n-m| = 1\,; \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

*Le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bien stationnaire. Un tel processus est appelé processus à moyenne ajustée d'ordre un ($MA(1)$).*

**Exemple 3.9.** *Le processus stochastique défini par*

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i; \ \ n \in \mathbb{Z},$$

*où* $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est un bruit blanc faible, n'est pas stationnaire, car la covariance dépend de l'état* $n$ *du processus.*
*En effet,*

$$\begin{aligned}
Cov(X_{n+h}, X_n) &= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n+h} \xi_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right)\right],\\
&= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right)^2 + \left(\sum_{i=n+1}^{n+h} \xi_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right)\right],\\
&= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right)^2\right] + E\left[\left(\sum_{i=n+1}^{n+h} \xi_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right)\right],\\
&= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right)^2\right],\\
&= \sum_{i=1}^{n} E\left(\xi_i\right)^2,\\
&= n\sigma^2.
\end{aligned}$$

- La stationnarité forte implique la stationnarité faible, la réciproque est valable seulement pour les processus gaussiens, voir par exemple [54], P. 123 ;
- Le bruit blanc est un processus stochastique faiblement stationnaire.

Une propriété primordiale de la fonction $\gamma$ d'autocovariance de processus stationnaire est qu'elle est définie positive.

**Proposition 3.10.** *La fonction d'autocovariance* $\gamma$ *vérifie les deux propriétés suivantes :*

- $\gamma$ *est une fonction hermitienne, i.e.,* $\left(\gamma(-h) = \overline{\gamma(h)}\right)$, $h \in \mathbb{N}$ *;*
- $\gamma$ *est définie positive, i.e., pour toute suite finie* $(a_i)_i$ *de* $\mathbb{C}$,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i \overline{a_j} \gamma(i-j) \geq 0 \, ; \, \forall \, n \in \mathbb{Z}.$$

**Définition 3.11.** *On appelle fonction d'autocorrélation d'un processus stochastique* $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, *notée* $\rho$, *la fonction d'autocovariance normalisée de* $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *donnée par*

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)},$$

*où* $\gamma(0) = Var(X_n)$ *la variance du processus.*

Comme la fonction d'autocovariance, la fonction d'autocorrélation vérifie les propriétés suivantes :

- $\rho$ est une fonction hermitienne, i.e., $\Big(\rho(-h) = \overline{\rho(h)}\Big)$, $h \in \mathbb{N}$ ;
- $|\rho(h)| \leq 1$ ;
- $\rho$ est définie positive.

### 3.2.1 Représentation spectrale des processus faiblement stationnaires

Dans cette section, $\mathcal{A}_{(-\pi,\pi]}$ désigne la tribu borélienne associée à $(-\pi, \pi]$. Un résultat général d'analyse fonctionnelle, dit théorème de Herglotz, permet d'associer, de manière univoque, une mesure positive définie sur $\big((-\pi, \pi], \mathcal{A}_{(-\pi,\pi]}\big)$ à toute suite définie positive. Cette mesure, appelée mesure spectrale, joue un rôle analogue à celle de la transformation de Fourier pour les fonctions. En particulier, elle confère une expression simple aux transformations linéaires.

**Théorème 3.12.** *[17] (Théorème de Herglotz)*
*Une fonction $\gamma : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ est définie positive si, et seulement si, il existe une mesure positive $\mu$ sur $\big((-\pi, \pi], \mathcal{A}_{(-\pi,\pi]}\big)$ telle que*

$$\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\lambda}\mu(d\lambda), \quad h \in \mathbb{Z}. \tag{3.1}$$

*Si la suite $(\gamma_n)_n$ est sommable $\big(\sum_{h\in\mathbb{Z}} |\gamma(h)| < \infty\big)$, alors la mesure $\mu$ possède une densité $f$, par rapport à la mesure de Lebesgue, sur $\big((-\pi, \pi], \mathcal{A}_{(-\pi,\pi]}\big)$, donnée par*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h\in\mathbb{Z}} \gamma(h)e^{ith} \geq 0. \tag{3.2}$$

En appliquant ce résultat à la fonction d'autocovariance $\gamma$ d'un processus faiblement stationnaire $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in L_0^2$, on obtient la représentation spectrale (3.1) de $\gamma$. La mesure $\mu$ est dite mesure spectrale et la densité $f$ est appelée densité spectrale.
Ce théorème, parfois appelé théorème de Wiener-Khintchine ou théorème de Wold.

La démonstration de ce théorème repose sur le théorème de Prohorov que nous énonçons ci-dessous sans démonstration. Introduisons la notion de tension pour une variable aléatoire.

**Définition 3.13.** *Une variable aléatoire $X$ dans un espace topologique quelconque est dite tendue si pour toute $\varepsilon > 0$, il existe un compact $\mathbf{K}_\varepsilon$ tel que*

$$\mathbb{P}(X \notin \mathbf{K}_\varepsilon) \leq \varepsilon,$$

*et un processus* $(X_n)_{n\in I}$ *est dit uniformément tendu ( ou borné en probabilité) si pour toute* $\varepsilon > 0$*, il existe un compact* $\mathbf{K}_\varepsilon$ *tel que*

$$\sup_{i\in I} \mathbb{P}(X_i \notin \mathbf{K}_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

La notion de tension est étroitement liée à la notion de convergence en loi, le théorème suivant montre que toute suite de variables aléatoires convergente en loi est tendue, la réciproque est partiellement vraie.

**Théorème 3.14.** *[57] (Théorème de Prohorov)*
*Soit* $(X_n)_n$ *une suite de variables aléatoires dans* $\mathbb{C}$.

**a-** $(X_n)_n$ *converge en loi vers* $X$*, alors la famille* $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *est uniformément tendue ;*

**b-** *Si la famille* $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *est uniformément tendue, alors il existe une sous-suite* $(X_{n_j})_j$ *de* $(X_n)_n$ *converge vers une variable aléatoire* $X$.

*Démonstration.* (la preuve du théorème de Herglotz)

1. Il est facile de vérifier qu'une telle fonction $\gamma$ définie par la formule (3.1) est définie positive.

   **a-** Il est clair que $\gamma(-n) = \overline{\gamma(n)}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ ;

   **b-** Soit $(a_i)_{i=1,\cdots,n} \subset \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_k \gamma(j-k)\overline{a_j} &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_k \overline{a_j} e^{it(j-k)} \mu(dt),\\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{n} a_k e^{itk} \right|^2 \mu(dt) \geq 0.\end{aligned}$$

   Donc $\gamma$ est définie positive.

2. Inversement, supposons que $(\gamma(n))_n$ est une suite définie positive, et considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par :

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{1}{2\pi n} \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} e^{-ijt}\gamma(j-k)e^{ikt},\\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) e^{-ikt}\gamma(k),\\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-ikt}\gamma_n(k).\end{aligned}$$

où

$$\gamma_n(k) = \left(1 - \frac{|k|}{n}\right)_+ \gamma(k).$$

qui vérifie $\left|\gamma_n(k)e^{-ikt}\right| \leq \gamma(k)$ et $\lim_n \gamma_n(k) = \gamma(k)$.
Par construction, la fonction $f_n$ est positive (pour tout n) du fait que la séquence d'autocovariance $\gamma(k)$ est de type positif.

Pour conclure la preuve, nous commençons par le cas particulier pour lequel on suppose l'hypothèse supplémentaire

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\gamma(k)| < \infty. \tag{3.3}$$

Sous cette hypothèse, une application directe du théorème de convergence dominé prouve que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f_n(t) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-ikt}\gamma_n(k),\\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lim_{n\to\infty} e^{-ikt}\gamma_n(k),\\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-ikt}\gamma(k) = f(t).\end{aligned}$$

Donc $f$ est positive comme limite de fonctions positives.
Une application directe du théorème de Fubini (la permutation étant possible car $\int_{-\pi}^{\pi} \sum |\gamma(k)|\, dt < \infty$), montre que, pour tout $h \in \mathbb{Z}$, on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{iht}dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma(k) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(h-k)t}dt = \gamma(h).$$

Ceci conclut la démonstration sous l'hypothèse (3.3).

La démonstration dans le cas général utilise le théorème 3.14. On remarque que l'on peut supposer $\gamma(0) = 1$ .
Notons $\mu_n$ la mesure de densité $f_n$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $(-\pi, \pi]$.
On a par construction

$$\widehat{\mu}_n(p) = \int_{-\pi}^{\pi} f_n(t)e^{-ipt}dt = \left(1 - \frac{|p|}{n}\right)_+ \gamma(-p).$$

En particulier, on a $\mu_n((-\pi, \pi]) = \gamma(0)$. De toute sous-suite de $(\mu_n)_n$, on peut extraire une sous-suite $(\nu_k)_k = (\mu_{n_k})_k$ qui converge étroitement vers une mesure positive $\mu$ de masse totale $\gamma(0)$ (théorème de Prohorov). On a pour tout $p \in \mathbb{Z}$

$$\widehat{\mu}(p) = \lim_k \widehat{\nu}_k(p) = \gamma(-p).$$

La limite de $\widehat{\nu}_k(p)$ ne dépend pas du choix de la sous-suite, et donc de toute sous-suite de la suite $(\mu_n)_n$, on peut extraire une sous-suite qui converge vers la même mesure limite $\mu$. On peut déduire que la suite $(\mu_n)_n$ converge étroitement vers $\mu$. Donc, dans le cas suscité, lorsque $\sum_k |\gamma(k)| < \infty$, et par l'application du théorème de la convergence dominée, la suite $(f_n(t))_n$ converge vers $f(t)$.

□

**Exemple 3.15.** *1. La fonction d'autocovariance d'un bruit blanc $(\xi_n)_n$ est donnée par*

$$\gamma(h) = \sigma^2 \delta_0(h).$$

*Comme $\sum_{h\in\mathbb{Z}} |\gamma(h)| = \sigma^2$, alors d'après le théorème de Herglotz, l'expression de la densité spectrale est donnée par*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h\in\mathbb{Z}} \sigma^2 \delta_0(h) e^{ith} = \frac{\sigma^2}{2\pi}.$$

*La densité spectrale d'un bruit blanc est donc constante. Cette propriété est à l'origine de la terminologie "bruit blanc" qui provient de l'analogue avec le spectre de la lumière blanche constante dans toute la bande de fréquences visible.*

*2. Soit $(X_n)_n$ le processus défini dans l'exemple 3.8*

$$X_n = \xi_n + a\xi_{n-1}.$$

*Sa fonction d'autocovariance est donnée par*

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2(1+a^2), & h = 0\,; \\ \sigma^2 a^2, & |h| = 1\,; \\ 0, & \textit{sinon.} \end{cases}$$

*L'expression de la densité spectrale est donnée par*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\sigma^2 a\left(e^{-it} + e^{it}\right) + \sigma^2(1+a^2)\right] = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left|1 + ae^{-it}\right|.$$

**Exemple 3.16.** *(Processus harmonique)*
*On considère une variable aléatoire uniforme $\phi$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, donc la densité de probabilité*

$$\varrho_\phi(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{X}_{[-\pi,\pi]}(\alpha).$$

*On lui associe le processus aléatoire $X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ défini par :*

$$X_n = Ae^{i(n\omega_0+\phi)},$$

*où $A \in \mathbb{C}$ et $\omega_0 \in [-\pi, \pi]$ sont deux constantes. un tel processus est dit harmonique.*

*Il est facile de vérifier que $X \in L_0^2$ :*

$$E(X_n) = 0,\ \forall n \ \text{ et } E\left(|X_n|^2\right) = |A|^2,\ \forall n.$$

*De plus,*

$$E\left(X_n\overline{X}_m\right) = |A|^2 e^{i\omega_0(n-m)},$$

*d'où l'en déduit que $X$ est faiblement stationnaire. Finalement, on a*

$$\gamma_X(n) = |A|^2 e^{in\omega_0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\omega} d\nu_X(\omega),$$

*cette dernière formule montre que la mesure spectrale de $X$ n'est autre que la mesure de Dirac $\delta_{\omega_0}$ en $\omega_0$, à un facteur $2\pi |A|^2$ près.*
*Les processus harmoniques fournissent l'exemple le plus simple de processus aléatoires stationnaires (au sens faible) ne possédant pas de densité spectrale.*

**Application à la simulation de processus stationnaires**

Le théorème de Wiener-Khintchine fournit une représentation spectrale pour la fonction d'autocovariance des processus stationnaires. La question suivante est : pouvons nous obtenir une représentation similaire( de type "Fourier") pour les processus (trajectoires) aléatoires eux mêmes ?
Par le biais des opérateurs unitaires, nous allons voir , dans la sous-section suivante, qu'un tel théorème de représentation spectrale existe.

Afin d'illustrer l'intérêt pratique de la représentation spectrale du processus lui même, il est utile de considérer le cas du processus $X$ de longueur finie, i.e., $X = (X_n)_{n=\overline{1,N}}$. Il est tout d'abord nécessaire d'adapter la définition de la stationnarité à cette situation.
Il faut pour cela tenir compte des conditions aux bords, que l'on suppose ici périodiques.

**Définition 3.17.** *Soit $X = (X_n)_{n=\overline{0,N-1}}$ un processus stochastique du second ordre de longueur $N$. $X$ est faiblement stationnaire si*

$$m_X(n) = m_X(0) = m_X, \quad \forall n = 0, \cdots, N-1, \tag{3.4}$$

*et*

$$R_X\left((n+\tau) \mod N, (m+\tau) \mod N\right) = R_X\left((n-m) \mod N\right), \quad \forall n, m, \tau. \tag{3.5}$$

Soit $X$ un tel processus aléatoire stationnaire, que l'on suppose de plus centré. Soit $R_X$ son autocovariance, et soit $S_X$ le vecteur défini par

$$S_X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} R_X(n) e^{-2i\pi kn/N}. \tag{3.6}$$

On considère la transformée de Fourier finie de $X$, le vecteur aléatoire $\left(\widehat{X}_0, \cdots, \widehat{X}_{N-1}\right)$, défini par

$$\widehat{X}_k = \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{-2i\pi kn/N}. \tag{3.7}$$

Soit $R_{\widehat{X}}$ son autocovariance. Un calcul simple montre que

$$E(\widehat{X}_k) = 0 \quad \text{et} \quad E\left(\widehat{X}_k \overline{\widehat{X}_l}\right) = N S_X(k) \delta_{kl}, \quad \forall\, k, l \in \{1, \cdots, N-1\}.$$

Les composantes de $\widehat{X}$ sont donc non corrélées. Utilisant la transformée de Fourier inverse, on peut donc écrire

$$X_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi kn/N} Y_k, \tag{3.8}$$

où les variables aléatoires

$$Y_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \widehat{X}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{-2i\pi kn/N},$$

sont non corrélées :

$$E\left(\widehat{Y}_k \overline{\widehat{Y}_l}\right) = S_X \delta_{kl}.$$

La représentation (3.8) porte parfois le nom de représentation de Cramèr en dimension finie.

Lorsque l'on souhaite simuler un processus aléatoire, on se place de facto dans une situation de dimension finie. Les ordinateurs proposent, en général, des générateurs de nombres pseudo-aléatoires capables de fournir des séquences de nombres aléatoires aussi proche que possibles de vecteurs identiquement distribués et non corrélés. Dans ces conditions, si on souhaite générer une réalisation d'un processus faiblement stationnaire, de spectre $S_X$ donné, on peut procéder comme suit : on génère tout d'abord une séquences de nombres pseudo-aléatoires $(W_0, \cdots, W_{N-1})$, qui sont tels que

$$E(W_k) = 0 \quad \text{et} \quad E\left(W_k \overline{W}_l\right) = \delta_{kl},$$

puis on exploite la représentation de Cramèr en formant

$$X_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi kn/N} \sqrt{S_X(k)} W_k.$$

Il est facile de vérifier que $E(X_n) = 0$, $\forall\, n$, et de plus

$$E\left(X_n \overline{X}_m\right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_X(k) e^{2i\pi k(n-m)/N} = R_X(n-m),$$

donc $X$ est faiblement stationnaire.

**Représentation spectrale des processus faiblement stationnaires via l'opérateur unitaire**

Le théorème de Herglotz permet de donner une représentation spectrale pour la covariance d'un processus stationnaire. La covariance est un objet déterministe. Nous allon maintenant obtenir une représentation spectrale pour le processus lui même en utilisant les opérateurs unitaires.

Commençons par montrer que la stationnarité d'un processus se caractérise par l'existence d'un opérateur unitaire, dit opérateur de décalage (shift), vérifiant une certaine propriété.
Soit $X \in L^2(\Omega)$ un processus stationnaire. Sans perte de généralités, on peut supposer que $X \in L_0^2(\Omega)$. Si tel processus n'est pas le cas, on peut toujours écrire $X = Y + m_X$ et travailler avec le processus centre $Y$.
L'espace $L_0^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle X, Y\rangle = Cov(X, Y).$$

On notera $\mathcal{H}_X$ le sous-espace fermé de $L_0^2(\Omega)$ engendré par les variables $X_n$, $n \in \mathbb{Z}$, i.e.,$\mathcal{H}_X = \overline{sp}\,\{X_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$. L'adhérence étant prise au sens de la moyenne quadratique.

On notera également $m$ la moyenne et $R$ la covariance

**Théorème 3.18.** *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un processus appartient à $L_0^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire si, et seulement si, il existe un opérateur unitaire $U$ définit sur $\mathcal{H}_X = \overline{sp}\{X_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ tel que*

$$UX_n = X_{n+1},\ n \in \mathbb{Z}. \tag{3.9}$$

*Démonstration.* 1. Supposons qu'il existe un opérateur $U$ vérifiant (3.9).
Nous avons alors

$$\langle X_{n+1}, X_{m+1}\rangle = \langle UX_n, UX_m\rangle = \langle X_n, X_m\rangle.$$

Ce qui signifie que $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire.

2. Inversement, Supposons que $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire. Soit $U$ un opérateur défini sur $L_X = sp\{X_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ par

$$\begin{aligned} U\ : L_X &\longrightarrow\ L_X \\ Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_{n_i} &\mapsto UY = \sum_{i=1}^{n} a_i X_{n_i+1}. \end{aligned}$$

Nous allons montrer que l'opérateur $U$ est bien défini, linéaire, de plus il est surjectif.

(a) Pour montrer que $U$ est bien défini, on suppose qu'un vecteur $Y \in L_X$ a deux expressions différentes :

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_{n_i} \quad \text{et } Y = \sum_{i=1}^{n} b_i X_{n_i}.$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i X_{n_i+1} - \sum_{i=1}^{n} b_i X_{n_i+1} \right\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) X_{n_i+1} \right\|^2, \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} (a_i - b_i)\overline{(a_j - b_j)} \langle X_{n_i+1}, X_{n_j+1} \rangle, \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} (a_i - b_i)\overline{(a_j - b_j)} \langle X_{n_i}, X_{n_j} \rangle, \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i X_{n_i} - \sum_{i=1}^{n} b_i X_{n_i} \right\|^2 = 0.
\end{aligned}$$

Ce qui signifie que $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_{n_i} = \sum_{i=1}^{n} b_i X_{n_i}$.

(b) Pour la linéarité de $U$, Soient $Y, Y' \in L_X$ tels que $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_{n_i}$ et $Y' = \sum_{i=1}^{n} b_i X_{n_i}$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.
Nous avons alors

$$\begin{aligned}
U(\alpha Y + Y') &= U\left(\alpha \sum_{i=1}^{n} a_i X_{n_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i X_{n_i}\right), \\
&= U\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha a_i + b_i) X_{n_i}\right), \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_i + b_i) X_{n_i+1}, \\
&= \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i X_{n_i+1} + \sum_{i=1}^{n} b_i X_{n_i+1}, \\
&= \alpha U(Y) + U(Y').
\end{aligned}$$

(c) Pour montrer que $U$ est surjectif, soit $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_{n_i} \in L_X$, nous avons alors

$$U\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_{n_i-1}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i X_{n_i} = Y,$$

d'où la surjectivité de $U$.

(d) Finalement, $U$ est une isométrie car pour tous vecteurs $Y = \sum_{i=1}^n a_i X_{n_i}$ et $Y' = \sum_{i=1}^n b_i X_{n_i}$ dans $L_X$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\langle Y, Y'\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n} a_i \overline{b_j} \langle X_{n_i}, X_{n_j}\rangle,\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i \overline{b_j} \langle X_{n_i+1}, X_{n_i+1}\rangle,\\ &= \langle UY, UY'\rangle.\end{aligned}$$

Ce qui montre que $U$ préserve le produit scalaire, donc aussi la norme induite. L'opérateur $U$ ainsi défini sur $L_X$ peut s'étendre par continuité sur $\mathcal{H}_X = \overline{L_X}$, de plus, son prolongement vérifie l'équation (3.9).

□

Grâce au théorème 3.18, et à la représentation spectrale d'un opérateur unitaire (voir chapitre 1), nous pouvons déduire la représentation spectrale d'un processus stationnaire $(X_n)_n$.

Soit $(X_n)_n$ un processus stationnaire et $U$ l'opérateur de décalage (shift) associé. Il existe alors une mesure spectrale à valeurs projecteurs $\mu$ définie sur les parties boréliennes de $[0, 2\pi)$ telle que

$$U^n = \int_0^{2\pi} e^{int} \mu(dt),$$

On peut alors écrire

$$X_n = UX_{n-1} = U^n X_0 = \int_0^{2\pi} e^{itn} \mu(dt) X_0 = \int_0^{2\pi} e^{itn} \mu'(dt). \tag{3.10}$$

La fonction d'ensemble $\mu'(A) = \mu(A)X_0$ pour toute partie $A$ borélienne de $[0, 2\pi)$, est dite mesure aléatoire ou mesure aléatoire spectrale du processus $(X_n)_n$. Certaines propriétés de la mesure spectrale $\mu$ sont transférées à la mesure aléatoire $\mu'$, à savoir

- $\mu'$ est $\sigma$-additive ;
- $\mu'$ est orthogonalement dispersée au sens suivant :

$$\langle \mu'(A), \mu'(B)\rangle = 0, \quad \forall\, A \cap B = \emptyset.$$

Nous pouvons à présent énoncer le théorème de représentation spectrale, dite représentation de Cramèr-Khintchine, d'un processus stochastique stationnaire.

**Théorème 3.19.** *Le processus du second ordre $(X_n)_n$ est stationnaire si, et seulement si, il existe une mesure $\mu$ $\sigma$-additive orthogonalement dispersée sur $([0, 2\pi), \mathcal{A})$ telle que $(X_n)_n$ se présente sous la forme d'une intégrale stochastique :*

$$X_n = \int_0^{2\pi} e^{itn} \mu(dt). \tag{3.11}$$

*Démonstration.* La nécessité vient d'être démontrée ( voir la formule (3.10)). Pour la suffisance, on suppose que le processus $(X_n)_n$ a la représentation (3.11). On peut donc écrire formellement :

$$\begin{aligned}\langle X_{n+p},\, X_n\rangle &= \langle \int_0^{2\pi} e^{it(n+p)}\mu(dt),\, \int_0^{2\pi} e^{itn}\mu(dt)\rangle,\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{itp}e^{in(t-s)}dF(t,s),\\ &= \int_0^{2\pi} e^{itp}dF(t),\\ &= \gamma(p).\end{aligned}$$

Ce qui montre que $(X_n)_n$ est stationnaire.
Ici, $F$ est la mesure spectrale du processus $(X_n)_n$ défini sur les boréliens de $[0, 2\pi)$ par

$$F(A\cap B) = \langle \mu(A),\, \mu(B)\rangle = \|\mu(A\cap B)\|^2 .$$

La transformée de Fourier de cette mesure spectrale est en fait la fonction d'autocovariance du processus, cf. [47] :

$$\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega h}dF(\omega).$$

□

## 3.3 Processus périodiquement corrélés

L'objectif de cette section est de définir la notion de périodicité corrélée (cyclostationnarité) des processus du second ordre, et de donner quelques représentations spectrales des trajectoires de tel processus via la théorie spectrale des opérateurs unitaires et celle des processus stationnaires.

**Définition 3.20.** *Un processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}} \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est dit périodiquement corrélé de période $\tau$, au sens de Gladyshev [40], si ses statistiques d'ordre un et deux vérifient :*

$$\begin{cases} m(t) = m(t+\tau), & \forall\, t \in \mathbb{Z}\,; \\ \\ R(s,t) = R(s+\tau, t+\tau), & \forall\, s,t, \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{3.12}$$

– Il est clair que si la formule (3.12) de la définition précédente est vérifiée pour un $\tau$ donné, alors elle l'est aussi pour $k\tau,\ k \in \mathbb{N}$ ;

– Si $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est périodiquement corrélé de période "1" (1-PC), alors le processus est stationnaire au sens faible ; et tout processus stationnaire est périodiquement corrélé de période quelconque.

Ci-après quelques exemples des processus périodiquement corrélés.

**Exemple 3.21.** *Si le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}} \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est périodique de période $\tau$, i.e.,*

$$X_t = X_{t+\tau}, \qquad \forall\, t \in \mathbb{Z}. \tag{3.13}$$

*Alors, $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est $\tau$-PC. En effet, l'équation (3.13) signifie que*

$$\|X_t - X_{t+\tau}\|_{L^2}, \qquad \forall\, t \in \mathbb{Z}.$$

*Il vient que pour tout $s$, $t \in \mathbb{Z}$,*

$$m(t) = \int_\Omega X_t(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_\Omega X_{t+\tau}(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = m(t+\tau). \tag{3.14}$$

$$R(s,t) = \int_\Omega X_s(\omega)\overline{X_t(\omega)}\mathbb{P}(d\omega) - m(t)m(s) = R(s+\tau, t+\tau).$$

*Donc le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est $\tau$-PC.*

Un cas particulier de suite aléatoire périodique est donné par

$$X_t = X \cdot f_t, \qquad \forall\, t \in \mathbb{Z},$$

où $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(f_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est une suite périodique (déterministe).
Dans ce cas, on a

$$E(X_t) = f_t E(X) \quad \text{ et } \quad Var(X_t) = f_t^2\, Var(X_t).$$

En posant $X = 1$, on déduit que la suite $(f_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est périodiquement corrélée.

**Exemple 3.22.** *Soient $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ deux processus non corrélés, i.e., $\forall\ s, t \in \mathbb{Z}$, $Cov(X_t, Y_s) = 0$. Si $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est $\tau$-périodique et $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est faiblement stationnaire de moyenne $m_Y$ et de covariance $R_Y(h)$, alors le processus $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini par*

$$Z_t = X_t + Y_t, \qquad \forall\, t \in \mathbb{Z},$$

*est $\tau$-périodiquement corrélé. En effet, par (3.14) on a*

$$m_Z(t) = m_X(t) + m_Y(t) = m_X(t+\tau) + m_Y(t+\tau) = m_Z(t+\tau),$$

*et*

$$\begin{aligned} R_Z(s,t) &= R_X(s,t) + R_y(s-t), \\ &= R_X(s+\tau, t+\tau) + R_y(s+\tau-t-\tau), \\ &= R_Z(s+\tau, t+\tau). \end{aligned}$$

*Les deux conditions de (3.12) sont vérifiées, donc* $(Z_t)_t$ *est périodiquement corrélé.*

**Exemple 3.23.** *Soit* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *un processus stationnaire avec* $E(X_t) = 0$*, si* $(f_n)_n$ *est une suite* $\tau$*-périodique, alors le processus* $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *défini par*

$$Y_t = f_t \cdot X_t \qquad t \in \mathbb{Z},$$

*est un processus* $\tau$*-périodiquement corrélé.*
*En effet,*

$$m_Y(t) = f_t \cdot E(X_t) = 0 \qquad t \in \mathbb{Z},$$

*et pour* $\forall\, t, s \in \mathbb{Z}$*, on a*

$$\begin{aligned} R_Y(s+\tau, t+\tau) &= f_{s+\tau}\overline{f_{t+\tau}} R_X(s+\tau-t-\tau), \\ &= f_s \overline{f_t} R_X(s-t), \\ &= R_Y(s,t). \end{aligned}$$

Il convient de mentionner que pour un processus périodique (au sens de (3.13)), la fonction de covariance possède une propriété de périodicité plus forte que celle donnée par (3.12), plus précisément, on a la proposition suivante :

**Proposition 3.24.** *[47] Un processus* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}} \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *est périodique de période* $\tau$ *si, et seulement si,* $m(t)$ *est périodique et* $R(s,t)$ *est doublement périodique, i.e.,* $\forall\, s, t, k, l \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{cases} m(t) = m(t+\tau)\,; \\ \\ R(s,t) = R(s+k\tau, t+l\tau). \end{cases}$$

### PC et stationnarité multivariée

Dans ce paragraphe, nous allons voir qu'à tout processus périodiquement corrélé l'on peut associer un processus stationnaire multidimensionnel (ou $q$-varié, ou encore vectoriel), et cette relation est biunivoque (cf. [40]).

**Définition 3.25.** *Un processus vectoriel* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$*,* $X_t = (X_t^1, \cdots, X_t^q)$*, du second ordre est dit faiblement stationnaire, si pour tout* $j, k = 1, \cdots, q$ *et* $s,\, t \in \mathbb{Z}$*, le processus scalaire* $(X_t^j)_{t\in\mathbb{Z},\, j=1,\cdots,q}$ *vérifie :*

– $m_j(t) = E(X_t^j) = m_j(0), \qquad t \in \mathbb{Z},\ j = 1, \cdots, q$ *;*

– $R_{jk}(s,t) = Cov(X_s^j, X_t^k) = \gamma_{jk}(s-t), \qquad s,t \in \mathbb{Z},\ j,k = 1, \cdots, q.$

*Dans ce cas, on pose* $m = (m_1, \cdots, m_q)$ *et* $\gamma(h) = \left(R_{jk}(h)\right)_{j,k=1,\cdots,q}$*.*

**Exemple 3.26.** *Soient* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *un processus stationnaire* $q$*-varié et* $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$*,* $f_t = (f_t^1, f_t^2, \cdots, f_t^q)$*, une suite* $\tau$*-périodique.*
*Alors le processus* $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *défini par*

$$Y_t = \sum_{j=1}^{q} f_t^j \cdot X_t^j$$

*est un processus* $\tau$*-périodiquement corrélé.*
*En effet, les fonctions moyenne et autocovariance vérifient :*

$$\begin{aligned}
m_Y(t+\tau) &= E\left(\sum_{j=1}^{m} f_{t+\tau}^j \cdot X_{t+\tau}^j\right), \\
&= \sum_{j=1}^{m} f_{t+\tau}^j \cdot E\left(X_{t+\tau}^j\right), \\
&= \sum_{j=1}^{m} f_t^j \cdot E\left(X_t^j\right), \\
&= m_Y(t).
\end{aligned}$$

*Et*

$$\begin{aligned}
R_Y(s+\tau, t+\tau) &= Cov\left(Y_{s+\tau}, Y_{t+\tau}\right), \\
&= Cov\left(\sum_{j=1}^{m} f_{s+\tau}^j \cdot X_{s+\tau}^j, \sum_{j=1}^{m} f_{t+\tau}^j \cdot X_{t+\tau}^j\right), \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} f_{s+\tau}^j \overline{f_{t+\tau}^k} \gamma_{jk}(s+\tau-t-\tau), \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} f_s^j \overline{f_t^k} \gamma_{jk}(s-t), \\
&= R_Y(s,t).
\end{aligned}$$

A tout processus univarié ( ou scalaire) $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, on peut lui associer un processus $\tau$-varié, noté $X_n$, défini par :

$$X_n^j = X_{j+n\tau}, \quad n \in \mathbb{Z},\, j = 0, 1, \cdots, \tau - 1. \tag{3.15}$$

Un premier résultat clarifiant le lien entre la stationnarité multivariée et la périodicité corrélé est dû à Gladyshev :

**Proposition 3.27.** *Un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}} \in L^2(\Omega)$ est PC de période $\tau$ si, et seulement si, $\tau$ est le plus petit entier pour lequel le processus $\tau$-varié $X_n$ donné par (3.15) est stationnaire.*

Dans le même contexte, nous disposons d'un deuxième résultat qui affirme que tout processus PC, $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, possède une dilatation, c'est à dire, $X$ peut être exprimé comme projection orthogonale

$$X_t = \mathcal{P}_{\mathcal{H}_X} Y_t$$

d'un certain processus $Y$ défini sur espace $\mathcal{H}_Y$ contenant $\mathcal{H}_X$ (cf. [47]). Nous décrivons, ci-dessous, ce résultat :

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus $\tau$-périodiquement corrélé, notant $\mathcal{H}_X^\tau$ la somme directe de $\tau$ copie de $\mathcal{H}_X = \overline{sp}\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$, i.e.,

$$\mathcal{H}_X^\tau = \oplus_{j=1}^\tau \mathcal{H}_X.$$

On munit $\mathcal{H}_X^\tau$ du produit scalaire défini, pour tout $X = (x_1, \cdots, x_\tau)$ et $Y = (y_1, \cdots, y_\tau)$ dans $\mathcal{H}_X^\tau$, par

$$\langle\langle X, Y\rangle\rangle = \sum_{j=1}^{\tau} \langle x_j, y_j\rangle,$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire de $L^2(\Omega)$.

Alors la suite $\tau$-varié $Y_t = \left[X_t, X_{t+1}, \cdots, X_{t+(\tau-1)}\right]$ est stationnaire dans $\mathcal{H}_X^\tau$.

En effet,

$$\begin{aligned}
\langle\langle Y_s, Y_t\rangle\rangle &= \sum_{j=0}^{\tau-1} \langle X_{s+j}, X_{t+j}\rangle, \\
&= \sum_{j=1}^{\tau} \langle X_{s+j}, X_{t+j}\rangle, \qquad \text{car le processus } (X_t)_{t\in\mathbb{Z}} \text{ est } \tau\text{-PC}, \\
&= \langle\langle Y_{s+1}, Y_{t+1}\rangle\rangle.
\end{aligned}$$

Il est clair que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ n'est que la projection de $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ dans l'espace $\mathcal{H}_X \times 0 \cdots 0 \times 0$ isomorphe à $\mathcal{H}_X$.
On déduit que les fonctions moyenne et autocovariance du $(Y_t)_t$ sont comme suit :

$$m_Y(t) = E(Y) = E\left(X_t, X_{t+1}, \cdots, X_{t+(\tau-1)}\right) = \left(m_X(t), m_X(t+1), \cdots, m_X\left(t + (\tau - 1)\right)\right).$$

$$R(s,t) = \begin{bmatrix} Cov(X_t, X_s) & \cdots & \cdots & \cdots & Cov(X_t, X_{s+(\tau-1)}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Cov(X_{t+i}, X_s) & \cdots & Cov(X_{t+i}, X_{s+j}) & \cdots & Cov(X_{i+t}, X_{s+(\tau-1)}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Cov(X_{t+(\tau-1)}, X_s) & \cdots & \cdots & \cdots & Cov(X_{t+(\tau-1)}, X_{s+(\tau-1)}) \end{bmatrix}.$$

Ci-après, un exemple de processus PC obtenu via une projection :

**Exemple 3.28.** *Soit $Y$ un processus orthonorné, i.e., $\langle Y_s, Y_t\rangle = \delta_{s-t}$, c'est donc un bruit blanc stationnaire.*

*Soit $\mathcal{H}_X = \overline{sp}\{Y_{2n},\ n \in \mathbb{Z}\}$, alors le processus $X$ défini par*

$$X_n = P_{\mathcal{H}_X} Y_n = \begin{cases} Y_n, & si\ n \in 2\mathbb{Z}\,; \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

*est périodiquement corrélé de période* 2.

### 3.3.1 Représentation spectrale des processus PC

Avant de donner l'analogue du théorème 3.18 pour les processus PC, il convient de signaler que la moyenne $m$ d'un processus PC n'est pas forcément identique. Comme $\mathcal{H}_X \subset L^2(\Omega)$ et que les variables aléatoires constantes sont aussi dans $L^2(\Omega)$, alors la fonction moyenne $m(t)$ peut s'écrire comme suit :

$$m(t) = \int_\Omega X_t(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \langle X_t, 1\rangle. \tag{3.16}$$

Or la suite constante $1 = (\cdots, 1, 1, \cdots)$ n'est pas forcément dans $\mathcal{H}_X$.
Par ailleurs, si $U$ un opérateur unitaire sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et si $1 \in \mathcal{H}$, alors $U1 = 1$ et donc 1 est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

Pour que (3.16) ait un sens lorsque $\mathcal{H} = \mathcal{H}_X$, on définit le sous-espace

$$L_X = sp\{1, X_t,\ t \in \mathbb{Z}\},$$

on posera alors $\mathcal{H}_X = \overline{L_X}$.

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer le théorème suivante :

**Théorème 3.29.** *Un processus $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ du second ordre est dit périodiquement corrélé de période $\tau$ si, et seulement si, il existe un opérateur unitaire $U$ sur $\mathcal{H}_X = \overline{sp}\{1, X_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$ tel que*

$$X_{n+\tau} = UX_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}. \tag{3.17}$$

*Démonstration.* 1. On suppose que le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ périodiquement corrélé de période $\tau$.
Soit $Y \in L_X = sp\{1, X_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$, on peut écrire $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_{n_i}$.
On définit un opérateur $U$ sur $L_X$ comme suite

$$\begin{aligned} U\ : L_X &\longrightarrow L_X \\ Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_{n_i} &\mapsto UY = \sum_{i=1}^{n} a_i X_{n_i+\tau}. \end{aligned}$$

Comme dans le cas du Théorème 3.18, nous pouvons montrer que tel opérateur bien définit, linéaire, surjectif et c'est une isométrie, et qu'on peut prolonger par continuité sur $\mathcal{H}_X = \overline{L}_X$. De plus son prolongement vérifie l'équation (3.17).

2. Réciproquement, supposons l'existence d'un opérateur unitaire $U$ vérifie l'équation (3.17).
Nous avons, d'une part,

$$m(t+\tau) = \langle X_{t+\tau}, 1\rangle = \langle UX_t, 1\rangle = \langle X_t, U^{-1}1\rangle = \langle X_t, 1\rangle = m(t).$$

Et d'autre part, on a

$$\begin{aligned} R(t,s) &= \langle X_t, X_s\rangle \\ &= \langle UX_t, UX_s\rangle \\ &= \langle X_{t+\tau}, X_{s+\tau}\rangle \\ &= R(t+\tau, s+\tau). \end{aligned}$$

Donc, le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est périodiquement corrélé.

□

**Remarque 3.30.** – *L'opérateur de décalage de longueur $\tau$ est opérateur unitaire ;*
– *Si $\tau = 1$, on retrouve le cas stationnaire ;*
– *Si $X_n$ désigne un processus $\tau$-varié stationnaire, associé au processus $\tau$-PC $X$, alors il existe un opérateur unitaire $U_X$ défini sur $\mathcal{H}_X$ tel que*

$$X^j_{t+1} = U_X X^j_t,$$

*pour $t \in \mathbb{Z}$, et $1 \le j \le \tau$, cf. [47].*

L'existence d'un tel opérateur donnera lieu à une autre caractérisation des processus PC, très utile pour la représentation spectrale des trajectoires de processus PC.

**Proposition 3.31.** *Un processus $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ du second ordre est dit périodiquement corrélé de période $\tau$ si, et seulement si, il existe un opérateur unitaire $V$ et un autre processus périodique $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ à valeur dans $\mathcal{H}_X$ tels que*

$$X_n = V^n Y_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}. \tag{3.18}$$

*Démonstration.* 1. Si $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est le processus donné par l'équation (3.18), alors

$$\begin{aligned}\langle X_n,\, X_m\rangle &= \langle V^n Y_n,\, V^m Y_m\rangle,\\ &= \langle V^\tau V^n Y_n,\, V^\tau V^m Y_m\rangle,\\ &= \langle V^{n+\tau} Y_n,\, V^{m+\tau} Y_m\rangle,\\ &= \langle V^{n+\tau} U Y_{n+\tau},\, V^{m+\tau} U Y_{m+\tau}\rangle,\\ &= \langle V^{n+\tau} Y_{n+\tau},\, V^{m+\tau} Y_{m+\tau}\rangle,\\ &= \langle X_{n+\tau},\, X_{m+\tau}\rangle.\end{aligned}$$

Donc le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est périodiquement corrélé de période $\tau$.

2. Inversement, on suppose que le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est $\tau$-périodiquement corrélé. Soit $U$ l'opérateur unitaire donné par (3.17). La représentation spectrale de $U$ permet de construire un opérateur unitaire $V$ en posant :

$$V = \int_0^{2\pi} e^{it/\tau}\mu(dt),$$

où $V^\tau = U$. En d'autre termes, $V$ est la racine $\tau$-ième de $U$.
Si on pose $Y_n = V^{-n}X_n$, alors $Y_n$ vérifie l'équation 3.18, de plus $Y_n$ est périodique, car l'après (3.18), on a

$$\begin{aligned}\|Y_{n+\tau} - Y_n\| &= \left\|V^{-(n+\tau)}X_{n+\tau} - V^{-n}X_n\right\|,\\ &= \left\|V^{-n}(V^{-\tau}X_{n+\tau} - X_n)\right\|,\\ &= \left\|V^{-\tau}X_{n+\tau} - X_n\right\|,\\ &= \left\|U^{-1}X_{n+\tau} - X_n\right\| = 0.\end{aligned}$$

□

**Remarque 3.32.** *Il y a lieu de noter que :*
- *Dans le cas stationnaire, l'équation (3.18) est toujours assurée, de plus le processus $(Y_n)_n$ est représenté par une seule variable aléatoire, i.e.,$Y_n = X_0,\ \forall\, n \in \mathbb{Z}$ ;*
- *L'opérateur $V$ et le processus $(Y_n)_n$, cités dans la proposition précédente, ne sont pas unique. En effet, $V' = V^{i2\pi/\tau}$ et $Y'_n = Y_n e^{-i2\pi/\tau}$ vérifient $X_n = V'Y'_n = VY_n$, or que $V \neq V'$ et $Y_n \neq Y'_n$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*

### Représentation de Gladyshev du processus PC

La proposition 3.31 permet d'obtenir deux représentations de Gladyshev des processus $\tau$-PC, la première repose sur la représentation du processus en tant que processus vectoriel stationnaire, et la deuxième utilise la représentation spectrale de l'opérateur unitaire $V$.

**Proposition 3.33.** *[47] Un processus $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ du second ordre est $\tau$-PC si, et seulement si, il existe un processus vectoriel stationnaire $(Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où $Z_n = (Z_n^1, \cdots, Z_n^\tau)$ tel que*

$$X_n = \sum_{j=1}^{\tau-1} Z_n^j \, e^{i2\pi jn/\tau}. \tag{3.19}$$

*Démonstration.* 1. Si $(X_n)_n$ vérifie l'équation (3.19), il est clairement $\tau$-PC.

2. Inversement, on suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est $\tau$-PC, alors en vertu de la proposition 3.31, le processus $(X_n)_n$ a la forme suivante :

$$X_n = V^n Y_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z},$$

où $V$ est un opérateur unitaire et $(Y_n)_n$ est processus $\tau$-périodique.
A partir du transformé discret finie de Fourier de $Y_n$, on a

$$Y_n = \sum_{j=0}^{\tau-1} \widetilde{Y}_j \, e^{i2\pi jn/\tau},$$

où $\widetilde{Y}_j \in \mathcal{H}_X$. Donc on a

$$X_n = V^n Y_n = V^n \sum_{j=0}^{\tau-1} \widetilde{Y}_j \, e^{i2\pi jn/\tau} = \sum_{j=0}^{\tau-1} V^n \widetilde{Y}_j \, e^{i2\pi jn/\tau}.$$

Par conséquent, on prend $Z_n^j = V^n \widetilde{Y}_j$, et le processus $\tau$-varié $(Z_n)_n$ est bien stationnaire.

□

**Proposition 3.34.** *Un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}} \in L^2(\Omega)$ est $\tau$-périodiquement corrélé si, et seulement si, il existe une mesure spectrale aléatoire dépendante de $n$, $\nu(\cdot, n)$, $\tau$-périodique par rapport à $n$, i.e., $\nu(\cdot, n) = \nu(\cdot, n+\tau)$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, définie sur les parties boréliennes de $[0, 2\pi)$, orthogonalement dispersée (au sens que $\langle \nu(A, n), \nu(B, m)\rangle = 0, \forall\, n, m \in \mathbb{Z}$ et $A \cap B = \emptyset$) et telle que :*

$$X_n = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda n} \nu(d\lambda, n), \;\; \forall\, n \in \mathbb{Z}. \tag{3.20}$$

*Démonstration.* 1. Si $X_n$ a la forme (3.20) avec $\nu(\cdot, n) = \nu(\cdot, n+\tau)$ et $\langle \nu(A, n), \nu(B, m)\rangle = 0, \forall\, A \cap B = \emptyset$, alors, comme

$$\langle \nu\left(A, n\right), \nu\left(B, m\right)\rangle = \langle \nu\left(A \cap B, n\right), \nu\left(A \cap B, m\right)\rangle,$$

on posera alors, pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$ et $A, B \in \mathcal{A}_{[0,2\pi)}$,

$$\begin{aligned} F_{n,m}\left(A \cap B\right) &= \langle \nu(A,n), \nu(B,m) \rangle, \\ &= \langle \nu(A,n+\tau), \nu(B,m+\tau) \rangle, \\ &= F_{n+\tau,m+\tau}\left(A \cap B\right). \end{aligned}$$

Pour $n, m$ fixé, on a

$$\begin{aligned} \left| F_{n,m}\left(A\right) \right| &= \left| \langle \nu(A,n), \nu(A,m) \rangle \right|, \\ &\leq \| \nu(A,n) \| \cdot \| \nu(A,m) \|, \\ &= \sqrt{F_{n,n}\left(A\right) F_{m,m}\left(A\right)}. \end{aligned}$$

De plus, $F_{n,n}(\cdot) \geq 0$ et $F_{n,m}(\cdot)$ hérite la propriété de $\sigma$-additivité de la mesure $\nu(\cdot, n)$. $F_{n,m}(\cdot)$ est ainsi une mesure complexe (finie) et

$$\langle X_n, X_m \rangle = \left\langle \int_0^{2\pi} e^{i\lambda_1 n} \nu(d\lambda_1, n), \int_0^{2\pi} e^{i\lambda_2 m} \nu(d\lambda_2, m) \right\rangle, \tag{3.21}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(\lambda_1 n - d\lambda_2 m)} \left\langle \nu(d\lambda_1, n), \nu(d\lambda_2, m) \right\rangle, \tag{3.22}$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{i\lambda(n-m)} F_{n,m}(d\lambda), \tag{3.23}$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{i\lambda(n+\tau-m-\tau)} F_{n+\tau,m+\tau}(d\lambda), \tag{3.24}$$

$$\left\langle X_{n+\tau}, X_{m+\tau} \right\rangle. \tag{3.25}$$

Notons que la représentation (3.23) n'est autre que la représentation spectrale de la fonction de corrélation du processus $\tau$-périodiquement corrélé.

2. Inversement, Si $(X_n)_n$ est $\tau$-périodiquement corrélé, nous utiliserons la représentation spectrale de l'opérateur $V$, citée dans la proposition 3.31, afin d'obtenir la représentation suivante :

$$X_n = V^n Y_n = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda n/\tau} \mu(d\lambda)[Y_n],$$
$$\int_0^{2\pi} e^{i\lambda n/\tau} \nu(d\lambda, n),$$

où les mesure $\nu(\cdot, n)$ sont définies, pour toute partie borélienne $A$, par

$$\nu(A,n) = \mu(A)[Y_n],$$

et vérifient clairement la relation $\nu(A,n) = \nu(A, n+\tau)$, et que $\nu(\cdot, n)$ et $\nu(\cdot, m)$ sont mutuellement orthogonalement dispersées, i.e.,

$$\langle \nu(A,n), \nu(B,m) \rangle = 0, \quad A \cap B = \emptyset.$$

□

**Remarque 3.35.** *Les processus $(X_n)_n$ définis par (3.20) et pour lesquels, la mesure spectrale $\nu(\cdot, n)$ est indépendante de $n$ et non orthogonalement dispersée, sont dits processus harmonisables (au sens faible).*
*La proposition 3.34 montre que tout processus $\tau$-PC est harmonisable.*

Les processus harmonisables ont été introduits en 1948 par Loève [51], puis développés par Cramèr [22] dans le cadre des processus non stationnaires.

Dans ce qui suit, nous introduisons les processus harmonisables au sens fort, et nous verrons que sous certaines conditions que tout processus harmonisable au sens fort est periodiquement corrélé.

**Définition 3.36.** *Un processus stochastique $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dit fortement harmonisable au sens de Loève si, et seulement si, sa fonction de covariance $R$ a la forme suivante :*

$$R(s,t) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(s\lambda - t\theta)} F(d\lambda, d\theta), \tag{3.26}$$

*où $F : [0, 2\pi)^2 \to \mathbb{C}$ est une mesure définie positive hermitienne à variations (au sens de Vitali) bornées, c-a-d*

$$\mathcal{V}(F) = \sup\left\{ \sum_{i,j=1}^{n} |F(A_i, B_j)|\,,\ (A_i)_i, (B_j)_j \subset \mathcal{A}_{[0,2\pi)}, (A_i, B_j)\ \textit{sont disjoints} \right\} < \infty.$$

Notons que tout processus fortement harmonisable est faiblement harmonisable.

L'avantage des processus harmonisables, dans notre cas, est d'étudier la possibilité de rendre la fonction de covariance $R$ de processus périodiquement corrélés à la forme de celle de processus harmonisables.

Rappelons que la fonction de covariance $R$ d'un processus $\tau$-périodiquement corrélé peut s'écrit sous la forme d'une série de Fourier finie :

$$R(n+p, n) = \sum_{k=0}^{\tau-1} B_k(p)\, e^{i2\pi kn\tau^{-1}}, \tag{3.27}$$

où les $B_k(p)$ sont les coefficients de Fourier donnés par

$$B_k(p) = \tau^{-1} \sum_{j=0}^{\tau-1} e^{-i2\pi kj\tau^{-1}} R(n+p, n). \tag{3.28}$$

Notons aussi que les coefficients $B_k(p)$ ont une représentation spectrale donnée par

$$B_k(p) = \int_0^{2\pi} e^{ip\lambda} F_k(d\lambda). \tag{3.29}$$

**Proposition 3.37.** *[48] Soit $R$ la fonction de covariance du processus harmonisable $(X_n)_n$. Alors $(X_n)_n$ est $\tau$-PC (i.e., la fonction $R$ est $\tau$-périodique) si, et seulement si, le support de la mesure $F$ est contenu dans $S = \bigcup_{k=-\tau+1}^{\tau-1} S_k$ où*

$$S_k = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2)\, ;\, \lambda_2 = \lambda_1 + 2\pi k \tau^{-1} \right\}.$$

*Démonstration.* 1. Si le support de $F \subset S$, on a

$$e^{i(s+\tau)\lambda_1 - i(t+\tau)\lambda_2} = e^{i(s\lambda_1 - t\lambda_2) + i\tau(\lambda_1-\lambda_2)} = e^{i(s\lambda_1 - t\lambda_2)},$$

car, dans S, $i\tau(\lambda_1 - \lambda_2) = i\tau(\lambda_1 - \lambda_1 - 2\pi k \tau^{-1}) = -2\pi k$ et $e^{-i2\pi k} = 1$. Donc, nous avons

$$\begin{aligned} R(s,t) &= \int\int_S e^{i(s\lambda_1 - t\lambda_2)} F(d\lambda_1, d\lambda_2), \\ &= \int\int_S e^{i(s+\tau)\lambda_1 - i(t+\tau)\lambda_2} F(d\lambda_1, d\lambda_2), \\ &= R(s+\tau, t+\tau). \end{aligned}$$

2. Réciproquement, si $R$ est $\tau$-périodique, $R(s,t) = R(s+\tau, t+\tau)$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} R(s,t) &= \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} R(s+k\tau, t+k\tau), \\ &= \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(s+k\tau)\lambda_1 - i(t+k\tau)\lambda_2} F(d\lambda_1, d\lambda_2), \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(s\lambda_1 - t\lambda_2)} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\tau(\lambda_1-\lambda_2)} F(d\lambda_1, d\lambda_2), \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(s\lambda_1 - t\lambda_2)} D_n(\lambda_1, \lambda_2) F(d\lambda_1, d\lambda_2). \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} D_n(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\tau(\lambda_1-\lambda_2)}, \\ &= \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau\left(\lambda_1-\lambda_2\right)\right]}{2\left(n+\frac{1}{2}\right)\sin\left(\frac{\tau(\lambda_1-\lambda_2)}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Une propriété importante de la fonction $D_n$ est qu'elle est continue et bornée, de plus, si $(\lambda_1, \lambda_2) \in S$, $D_n(\lambda_1, \lambda_2) = 1$, et si $(\lambda_1, \lambda_2) \notin S$, c'est à dire que $(\lambda_1, \lambda_2) \neq 2k\pi$, la fonction $D_n$ converge vers 0. On conclut que $D_n$ converge vers $\mathbf{1}_S$, fonction indicatrice de $S$.

□

Notons $\phi_k \,:\, \lambda \to (\lambda, \lambda + 2k\pi\tau^{-1})$.
D'après les formules (3.27), (3.28) et (3.29), nous pouvons écrire la fonction $R$ sous la forme suivante :

$$R(n+p,n) = \sum_{k=0}^{\tau-1} e^{-i2\pi nk\tau^{-1}} \int_0^{2\pi} e^{ip\lambda}\gamma_k(d\lambda), \tag{3.30}$$

où $\gamma_k(t) = F_k(\phi_k(t))$.

En utilisant le transformé de Fourier inverse de (3.30), on obtient

$$\int_0^{2\pi} e^{ip\lambda}\gamma_k(d\lambda) = \tau^{-1} \sum_{n=0}^{\tau-1} e^{i2\pi nk\tau^{-1}}\, R(n+p,n). \tag{3.31}$$

La famille des mesures $\{\gamma_k\,; k = 1, \cdots, \tau-1\}$ est appelée spectrale du processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

## 3.4 Processus presque périodiquement corrélés

Dans cette partie, on s'intéresse à la presque périodicité corrélée (PPC) et à la presque périodicité unitaire (PPU) d'un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ à temps continue. Nous énoncerons certains résultats et propriétés les concernant. Cette section est une synthèse de l'article [49]
On supposera que $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Comme dans le cas discret, on notera pour tout $t, s \in \mathbb{R}$

$$R(s,t) = E(X_s X_t) = \langle X_s, X_t\rangle,$$

la fonction de covariance de $X$.
On supposera de plus que les trajectoires de $X$ sont continues en norme de $L^2(\Omega)$, i.e., l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \\ t &\longmapsto X_t \end{aligned}$$

est continue.

On se donne un groupe d'opérateurs unitaires fortement continue $\mathfrak{U} = \{U_\tau,\, \tau\in\mathbb{R}\}$ sur $L^2$ ou sur un sous espace de $L^2$, c'est à dire que

1. $U_0 = I$ ;
2. $U_{\tau+\iota} = U_\tau\, U_\iota,\ \forall\, \tau,\, \iota \in \mathbb{R}$ ;
3. $\forall\, X \in L^2,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta(\varepsilon, X) > 0$ vérifiant

   $$\|[U_{\tau+h} - U_\tau]X\| < \varepsilon,$$

   pour tout $|h| < \delta(\varepsilon, X)$ ;

4. Pour chaque $\tau \in \mathbb{R}$, $U_\tau$ est un opérateur linéaire sur $L^2$.

**Définition 3.38.** *Un processus $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est presque périodiquement unitaire s'il est continu, en norme de $L^2$, et s'il existe aussi un groupe fortement continu d'opérateurs unitaires $\mathfrak{U} = \{U_\tau,\ \tau \in \mathbb{R}\}$ sur $L^2$, tel que , pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble*

$$S(\varepsilon, X, \mathfrak{U}) = \{\tau;\ \sup_{t\in\mathbb{R}} \|X_{\tau+t} - U_\tau X_t\|_{L^2} < \varepsilon\}, \tag{3.32}$$

*est relativement dense dans $\mathbb{R}$.*

Les processus stationnaires sont clairement PPU, car $S(\varepsilon, X, \mathfrak{U}) = \mathbb{R}$, $\forall\, \varepsilon > 0$.

Avant de donner quelques exemples de processus presque périodiquement unitaires, il y a lieu de signaler que si $\mathcal{H}_X = \overline{sp}\,\{X_t,\ t \in \mathbb{R}\}$, alors il est possible d'avoir $U_\tau X_t \notin \mathcal{H}_X$ pour certains $t,\ \tau \in \mathbb{R}$, (voir [49]).
Le plus petit sous espace de $L^2(\Omega)$ pour lequel l'écriture (3.32) a un sens est

$$\mathcal{H}_{(X,\mathfrak{U})} = \overline{sp}\,\{U_\tau X_t,\ t,\ \tau \in \mathbb{R}\}\,.$$

Nous avons toujours l'inclusion $\mathcal{H}_X \subset \mathcal{H}_{(X,\mathfrak{U})}$ ; et pour les processus stationnaire, on a $\mathcal{H}_X = \mathcal{H}_{(X,\mathfrak{U})}$ si $\mathfrak{U}$ est un groupe d'opérateurs unitaires de décalage pour le processus $X$.

**Exemples et propriétés élémentaires des processus PPU**

**a-** Processus presque périodique : si $X : \mathbb{R} \to L^2(\Omega)$ est uniformément presque périodique (voir chapitre 2), alors $X$ est PPU. Pour le voir, il suffit de considérer $U_\tau = I$, le groupe fortement continue réduit à l'opérateur identité ;

**b-** Processus continus périodiquement corrélés : Nous avons vu précédemment qu'un processus $X$ est $\tau$-PC ssi

$$X_{t+nT} = U_n X_t,\ \forall\, t \in \mathbb{R},$$

où $\tau = nT,\ n \in \mathbb{Z}$. d'où

$$\left\|X_{t+\tau} - U_{\tau/T} X_t\right\| = 0,\ \forall\, t \in \mathbb{R},\ \tau = nT,\ n \in \mathbb{Z}.$$

et $S(\varepsilon, X, \mathfrak{U})$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$ ;

**c-** Si $X$ est faiblement stationnaire à trajectoires continue dans $L^2$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction uniformément presque périodique, alors le processus défini par

$$Y_t = f(t) X_t,\ t \in \mathbb{R}$$

est PPU. Le groupe d'opérateurs fortement continus associé est le groupe d'opérateurs de décalage du processus $X$. Nous allons alors

$$\begin{aligned}\|f(t+\tau)X_{t+\tau} - U_\tau\left[f(t)X_t\right]\| &= \|f(t+\tau)X_{t+\tau} - f(t)U_\tau X_t\|, \\ &= |f(t+\tau) - f(t)|\,\|X_{t+\tau}\| < \varepsilon,\end{aligned}$$

si $|f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon/\sigma_X$ où $\sigma_X = \|X_t\|$. Ce qui signifie que $S(\varepsilon, X, \mathfrak{U}) = S(\varepsilon/\sigma_X, f)$ est relativement dense car $f$ est UPP ;

**d-** Si $X$ est faiblement stationnaire et continu, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction UPP, alors $Y_t = X_{t+f(t)}$ est PPU. En effet, soit $\mathfrak{U} = \{U_\tau,\ \tau \in \mathbb{R}\}$ le groupe d'opérateurs de décalage de $X$.
Posons $R_x(u) = E\left\{X(t+u)\overline{X(t)}\right\}$, cette quantité ne dépend pas de $t$ car $X$ est stationnaire. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}\|Y_{t+\tau} - U_\tau Y_t\| &= \left\|X_{t+\tau+f(t+\tau)} - X_{t+\tau+f(t)}\right\|, \\ &= \left[2R_x(0) - 2r_e R_x(f(x+\tau) - f(t))\right]^{1/2},\end{aligned}$$

où $r_e(\cdot)$ désigne la partie réelle de $(\cdot)$.
Etant donné $\varepsilon > 0$, par la continuité de $R_x(u)$, il existe $\varepsilon' > 0$ pour lequel

$$|f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon' \Rightarrow \|Y_{t+\tau} - U_\tau Y_t\| < \varepsilon.$$

Il s'ensuit que si $\tau \in S(\varepsilon', f)$ (i.e., $\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon'$), alors $\tau \in S(\varepsilon, Y, \mathfrak{U})$, soit encore $S(\varepsilon', f) \subset S(\varepsilon, Y, \mathfrak{U})$.
Comme $S(\varepsilon', f)$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$, il en est de même pour $S(\varepsilon, Y, \mathfrak{U})$.

Nous allons, dans la proposition suivante, donner une caractérisation des processus continus PPU.

**Proposition 3.39.** *[49] Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est presque périodiquement unitaire, de groupe d'opérateurs de décalage $\mathfrak{U} = \{U_\tau;\ \tau \in \mathbb{R}\}$, si, et seulement si, il est de la forme :*

$$X_t = U_t Y_t, \tag{3.33}$$

*où $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un processus uniformément presque périodique dans $L^2$.*

*Démonstration.* 1. On suppose $X_t = U_t Y_t$, tel que $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est uniformément presque périodique et $\{U_\tau;\ \tau \in \mathbb{R}\}$ un groupe d'opérateurs unitaires fortement continus. Alors,

$$\begin{aligned}\|X_{\tau+t} - U_\tau X_t\| &= \|U_{\tau+t}Y_{\tau+t} - U_\tau U_t Y_t\|, \\ &= \|U_{\tau+t}[Y_{\tau+t} - Y_t]\|, \\ &= \|Y_{\tau+t} - Y_t\|.\end{aligned}$$

d'où $S(\varepsilon, X, \mathfrak{U}) = S(\varepsilon, Y)$ est relativement dense car $Y$ est UPP.

2. Réciproquement, en posant $Z_t = U_{-t}X_t$ on aura bien $X_t = U_t Z_t$, de plus

$$\begin{aligned}\|Z_{t+\tau} - Z_t\| &= \left\|U_{-(t+\tau)}X_{t+\tau} - U_{-t}X_t\right\|,\\ &= \|U_{-t}U_{-\tau}X_{t+\tau} - U_{-t}X_t\|,\\ &= \|U_{-t}\|\,\|U_{-\tau}X_{t+\tau} - X_t\|,\\ &= \|U_{-\tau}X_{t+\tau} - X_t\|,\\ &= \|X_{t+\tau} - U_\tau X_t\|.\end{aligned}$$

D'où $S(\varepsilon, Z) = S(\varepsilon, X, \mathfrak{U})$ est relativement dense et $Z$ est bien presque périodique au sens de Bohr.

□

**Remarque 3.40.**

**a-** *Trivialement, tout processus stationnaire à indice continu est PPU, en effet, il suffit de prendre $Y_t = X_0$, et tenir compte du fait que $X_t = U_t X_0$.*

**b-** *La représentation (3.33) n'est pas unique. En effet, si $X_t = U_t Y_t$, alors on peut définir un nouveau groupe d'opérateurs unitaires $\widetilde{\mathfrak{U}} = \left\{\widetilde{U}_t,\ t \in \mathbb{R}\right\}$ par*

$$\widetilde{U}_t = e^{i\lambda t}U_t,\ \ \lambda \in \mathbb{R},$$

*et un nouveau processus $\widetilde{Y} = (\widetilde{Y}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ uniformément presque périodique par*

$$\widetilde{Y}_t = e^{-i\lambda t}Y_t.$$

*On a clairement $X_t = \widetilde{U}_t \widetilde{Y}_t$.*

Ci-après quelques propriétés élémentaires de processus PPU :

**Proposition 3.41.** *1. Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est PPU, alors :*

- **a-** *$(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est borné, i.e., $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|X_t\| < \infty$ ;*
- **b-** *$(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est uniformément continu sur $\mathbb{R}$ ;*
- **c-** *Le processus $(Z_{t,\tau})_{(t,\tau)\in\mathbb{R}^2}$ ; $Z_{t,\tau} = U_\tau Y_t$, est uniformément continu sur $\mathbb{R}^2$.*

*2. Si $X$ et $Y$ deux processus PPU et si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X_t \perp Y_t$, alors, le processus $Z$ défini par $Z_t = X_t + Y_t$ est PPU ;*

*3. Si $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est une suite de processus PPU de même groupe d'opérateurs unitaire $\mathfrak{U}$, et si*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|X_{n,t} - X_t\| = 0,$$

*alors le processus limite $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est PPU du même groupe $\mathfrak{U}$ ;*

*4. Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est PPU, alors :*

**a-** *Si le processus dérivé* $(X_t')_{t\in\mathbb{R}}$ *est uniformément continu, alors* $(X_t')_{t\in\mathbb{R}}$ *est PPU du même groupe* $\mathfrak{U}$ *;*

**b-** $\forall\, a > 0$, *l'intégrale de Riemann*

$$Y_t(a) = \int_t^{t+a} X_s ds,$$

*est PPU.*

**Remarque 3.42.** *Si on désigne par* $R(X)$ *le rang d'un processus PPU, alors* $R(X)$ *et* $\overline{R}(X)$ *sont bornés en tant qu'un espace métrique, car*

$$d(X_{t_1}, X_{t_2}) = \|X_{t_1} - X_{t_2}\|_{L^2} \leq \|X_{t_1}\|_{L^2} + \|X_{t_2}\|_{L^2} \leq 2M_X,$$

*où* $M_X = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|X_t\| < \infty$ *en vertu de (1)(a-) du proposition précédente (3.41). Contrairement aux cas des fonction presque périodique (cas déterministe),* $R(X)$ *n'est pas totalement borné (donc n'est pas relativement compact). En effet, si* $X$ *est processus stationnaire, alors* $R(X)$ *peut ne pas être un compact de* $L^2(\Omega)$ *et pourtant tel processus est PPU (cf. [49]).*

Nous allons maintenant définir une classe plus large de processus "presque périodiquement corrélés" contenant les processus presque périodiquement unitaires, donnée par Gladyshev [41].

**Définition 3.43.** *Un processus* $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}} \in L^2(\Omega)$ *est dit presque périodiquement corrélé (PPC), au sens de Gladyshev, si la fonction* $R$ *de covariance*

$$R(s,t) = \langle X_s, X_t \rangle,$$

*est uniformément continue sur* $\mathbb{R}^2$ *et pour chaque* $\tau \in \mathbb{R}$, *la fonction*

$$t \mapsto \varphi(t,\tau) = R(t+\tau, t)$$

*est uniformément presque périodique.*
*Si de plus, pour chaque* $t \in \mathbb{R}$, *la fonction* $\tau \mapsto \varphi(t,\tau)$ *est continue et bornée, alors* $X$ *est dit uniformément presque périodiquement corrélé (UPPC).*

Il est clair que les processus UPPC sont PPC au sens de Gladyshev.

**Proposition 3.44.** *Tout processus presque périodiquement unitaire est uniformément presque périodiquement corrélé.*

*Démonstration.* La bornitude et la continuité de l'application $s \mapsto \varphi(t,s)$ est une conséquence directe de la bornitude et la continuité uniforme du processus $(X_t)_t$.

Il reste donc à démontrer que l'ensemble

$$S(\varepsilon,\varphi) = \{\tau\,;\, \sup_{t\in\mathbb{R}}\sup_{s\in\mathbb{R}} |\varphi(t+\tau,s)-\varphi(t,s)| < \varepsilon\},$$

est relativement dense.

La presque périodicité unitaire de $X$ permet d'écrire, pour $t$ fixé,

$$X_{t+s+\tau} = U_\tau X_{t+s} + \varepsilon(t+s,\tau), \tag{3.34}$$

où $U_\tau \in \mathfrak{U} = \{U_\tau,\ \tau\in\mathbb{R}\}$ est le groupe de décalage associé à $X$, et l'ensemble $\{\tau\,;\, \sup_t \|\varepsilon(t,\tau)\| < \varepsilon\}$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$.
En utilisant (3.34), il vient que

$$\begin{aligned}
R(t+s+\tau,t+\tau) - R(t+s,t) &= \langle X_{t+s+\tau}, X_{t+\tau}\rangle - \langle X_{t+s}, X_t\rangle,\\
&= \langle U_\tau X_{t+s} + \varepsilon(t+s,\tau), U_\tau X_t + \varepsilon(t,\tau)\rangle - \langle X_{t+s}, X_t\rangle,\\
&= \langle U_\tau X_{t+s}, U_\tau X_t\rangle + \langle U_\tau X_{t+s}, \varepsilon(t,\tau)\rangle + \langle \varepsilon(t+s,\tau), \varepsilon(t,\tau)\rangle\\
&+ \langle \varepsilon(t+s,\tau), U_\tau X_t\rangle - \langle X_{t+s}, X_t\rangle,\\
&= \langle U_\tau X_{t+s}, \varepsilon(t,\tau)\rangle + \langle \varepsilon(t+s,\tau), \varepsilon(t,\tau)\rangle + \langle \varepsilon(t+s,\tau), U(\tau)X_t\rangle.
\end{aligned}$$

L'application de l'inégalité de Schwarz permet d'avoir

$$\begin{aligned}
|\varphi(t+\tau,s)-\varphi(t,s)| &\le \|U_\tau X_{t+s}\|\ \|\varepsilon(t,\tau)\| + \|\varepsilon(t+s,\tau)\|\ \|\varepsilon(t,\tau)\|\\
&+ \|\varepsilon(t+s,\tau)\|\ \|U_\tau X_t\|\,.
\end{aligned}$$

On déduit, grâce à l'unitarité de $U$ et la bornitude de $X$, que

$$\sup_{t,s\in\mathbb{R}} \|U_\tau X_{t+s}\| = M_X.$$

Aussi, par définition de $\varepsilon(t+s,\tau)$, on a

$$\sup_{t,s} \|\varepsilon(t+s,\tau)\| < \varepsilon_0, \quad \text{si } \tau \in (\varepsilon_0, X, \mathfrak{U}).$$

D'où l'en déduit, pour $\tau \in S(\varepsilon_0, X, \mathfrak{U})$, que

$$\sup_{t,s\in\mathbb{R}} |\varphi(t+\tau,s)-\varphi(t,s)| \le 2M_X\varepsilon_0 + \varepsilon_0^2 = P(\varepsilon_0).$$

Comme la fonction $\varepsilon_0 \mapsto P(\varepsilon_0)$ est monotone et continue, donc bijective, on conclut que

$$S(\varepsilon,\varphi) \supset S\left(P^{-1}(\varepsilon), X, \mathfrak{U}\right).$$

$\square$

### 3.4.1 Représentation spectrale des processus PPU

Dans cette section, nous présentons trois représentations des processus presque périodiquement unitaires basées sur la caractérisation (3.33) de tels processus

$$X_t = U_t Y_t. \tag{3.35}$$

La première repose sur l'application du théorème de Stone concernant la représentation spectrale des opérateurs unitaires. La deuxième représentation de (3.35) dépend du fait que toute fonction uniformément presque périodiques à valeurs dans un espace de Hilbert est limite uniforme de polynômes trigonométriques. La dernière est basée sur la décomposition de $(Y_t)_t$ relativement à une base orthonormale de $\mathcal{H}_X$.

**Proposition 3.45.** *Un processus $X$ est presque périodiquement unitaire si, et seulement si, $X$ a la représentation*

$$X_t = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t}\mu(d\lambda, t), \tag{3.36}$$

*où pour chaque borélien $A$ de $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$, la fonction $t \mapsto \mu(A,t)$ est uniformément presque périodique, et $\mu(\cdot,t)$ est orthogonalement dispersée , i.e.,*

$$\langle \mu(A,t), \mu(B,s)\rangle = 0, \ \forall\, s,t \text{ et } A\cap B = \emptyset.$$

*Démonstration.* **a-** Si $X$ est presque périodiquement unitaire, et $\mathfrak{U} = \{U_t,\, t\in\mathbb{R}\}$ le groupe de décalage associé, alors en vertu du théorème de Stone (voir chapitre 1), on peut écrire

$$U_t = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} d\nu_\lambda,$$

qui est une intégrale par rapport à la mesure $\nu_\lambda$ à valeur projecteurs, il suffit alors de considérer pour chaque borélien $A$, et $t\in\mathbb{R}$,

$$\mu(A,t) = \nu_A Y_t,$$

et pour chaque $t$, la mesure $\mu(\cdot,t)$ est orthogonalement dispersée, car $\nu_\lambda$ l'est :

$$\begin{aligned}\|\mu(A,t+\tau) - \mu(A,t)\| &= \|\nu_A Y_{t+\tau} - \nu_A Y_t\|\,, \\ &\le \|Y_{t+\tau} - Y_t\|\,.\end{aligned}$$

La presque périodicité de $Y$ permet de conclure que

$$S\left(\mu(A,\cdot),\varepsilon\right) \supset S\left(Y,\varepsilon\right).$$

**b-** Réciproquement, supposons que $X$ est de la forme (3.36). Posons $\mu(\mathbb{R},t) = Y_t$, alors $Y$ est uniformément presque périodique. Soit $H(A)$ la fermeture, dans $L^2(\Omega)$, de toutes les combinaisons linéaires finis de la forme

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \mu(A'_j, t_j),\ t_j\in\mathbb{R},\ A'_j\subset A,$$

i.e.,

$$H(A) = \overline{sp}\left\{\mu(A,t),\, t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Si $A \cap B = \emptyset$, alors par hypothèse, on a $H(A) \perp H(B)$.

Ce qui permet de définir une famille croissante d'opérateurs de projection $\nu_\lambda$ dans l'espace $H(\mathbb{R})$, où $\nu_\lambda(x)$ représente la projection de $x$ dans $H((-\infty, \lambda])$.

On peut donc écrire, pour chaque intervalle $]a,b]$, $\mu(]a,b],t) = \nu_{]a,b]}(Y_t)$ et

$$\begin{aligned} X_t &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} \mu(d\lambda, t), \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} d\nu_\lambda(Y_t), \\ &= U_t Y_t, \end{aligned}$$

où $U_t$ est un opérateur d'un groupe d'opérateurs sur $H(\mathbb{R})$ généré par la famille des projections $\{\nu_\lambda,\, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

$\square$

Nous énonçons les deux autres représentations spectrale sans démonstration. On pourra trouver plus de détails dans [49].

**Proposition 3.46.** *Un processus $X$ est PPU si, et seulement si, $X$ est limite uniforme, par rapport à $t$, de processus de la forme*

$$X_{n,t} = \sum_{j=1}^{K_n} \zeta_{j,K_n,t}\; e^{i\lambda_j t},$$

*où $\{\zeta_{j,K_n,t},\, j = 1, \cdots, K_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ est une famille de processus stochastiques conjointement stationnaires et $\{\lambda_j,\, j \in \mathbb{Z}\}$ est un ensemble dénombrable de nombres réels.*

**Proposition 3.47.** *Un processus $X$ est PPU si, et seulement si, $X$ a la forme suivante :*

$$X_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{j,t}\, f_j(t),$$

*où $\{a_{j,t}\}_{j \in \mathbb{Z}}$ est un processus stochastique conjointement stationnaire avec $E\left\{|a_{j,0}|^2\right\} = 1$, $\forall\, j$ et $E\left\{a_{i,t}\overline{a_{j,t}}\right\} = 0$, $\forall\, t$, $\forall\, i \neq j$. Et $\{f_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ est une suite de fonctions UPP à valeurs dans $\mathbb{C}$ vérifiant*

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |f_j(t)|^2 \leq M \quad \text{et} \; \sup_{t \in \mathbb{R}} \sum_{j > n} |f_j(t)|^2 \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

# Chapitre 4

# La Solution du processus AR(1)

## 4.1 Introduction

Soit $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite non corrélée de variables aléatoires complexes de moyenne nulle et de variance 1. Considérons l'équation

$$X_n = a_n X_{n-1} + \xi_n \ ; n \in \mathbb{Z}, \tag{4.1}$$

d'inconnu $X_n$ ; $n \in \mathbb{Z}$, où les variables aléatoires $X_n$ sont de moyenne nulle et de variance finie, et $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}^*$.

Rappelons le résultat classique suivant (cf. [46]) :

**Théorème 4.1.** *Si la suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est constante, i.e., $a_n = a$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, alors le système (4.1) a une solution bornée si, et seulement si, $|a| \neq 1$.*
*La solution est stationnaire et unique, de plus*

1. *Si $|a| > 1$, cette solution est donnée par*

$$X_n = \sum_{p>0} -a^{-p}\xi_{n+p},$$

*et dans ce cas, $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un processus d'innovation rétrograde pour $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ;*

2. *Si $|a| < 1$, alors la solution est donnée par*

$$X_n = \sum_{p>0} a^p \xi_{n-p}.$$

*Dans ce cas, $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un processus d'innovation progressif pour $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.*

*Dans les deux cas, la mesure spectrale $\Gamma$ de $(X_n)_n$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue normalisée $d\lambda$ et*

$$\frac{d\Gamma}{d\lambda}(\lambda) = \frac{1}{|1 - a\, e^{-i\lambda}|^2}, \quad d\lambda\text{-}p.p. \tag{4.2}$$

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les solutions périodiquement et presque périodiquement corrélées de (4.1) dans le cas général, où la suite $(a_n)_n$ n'est pas forcément constante. Après avoir défini le cadre dans lequel se fait cette étude, nous aborderons dans la section 4.2, le problème d'existence de solutions bornées de (4.1), nous donnerons des conditions nécessaires et suffisantes sur la suite $(a_n)_n$ pour l'existence de solutions bornées de (4.1).

Dans les sections 4.3 et 4.4, nous examinerons le cas où la suite $(a_n)_n$ est périodique et presque périodique respectivement. Dans le cas périodique, la mesure spectrale de la solution sera donnée. Une généralisation de (4.2) sera aussi établie. Nous caractériserons les solutions périodiquement et presque périodiquement corrélées. Dans les deux cas, nous énonçons et démontrons un résultats analogue au théorème 4.1.

Commençons par décrire le cadre dans lequel se fait cette étude.
Dans ce qui suit, les suites stochastiques du second ordre et centrées seront identifiées à des suites d'éléments d'un espace de Hilbert complexe $\mathcal{H}$, muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et d'une norme $\|\cdot\|$. Nous considérons ainsi que $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ comme deux suites de $\mathcal{H}$.

Posons $\mathcal{M}_X = \overline{sp}\,\{X_n;\, n\in\mathbb{Z}\}$ et $\mathcal{M}_\xi = \overline{sp}\,\{\xi_n;\, n\in\mathbb{Z}\}$, (l'adhérence étant prise dans $\mathcal{H}$ au sens de la norme $\|\cdot\|$).
Rappelons que la suite $(\xi_n)_n$ est dite processus d'innovation progressif pour $(X_n)_n$ si $(\xi_n)_n$ est une suite orthonormée et pour tout $n\in\mathbb{Z}$

$$\overline{sp}\,\{\xi_k\,;\, k\le n\} = \overline{sp}\,\{X_k\,;\, k\le n\}\,.$$

Et elle est dite processus d'innovation rétrograde pour $(X_n)_n$ si $(\xi_n)_n$ est une suite orthonormée, et pour tout $n\in\mathbb{Z}$,

$$\overline{sp}\,\{\xi_k\,;\, k\ge n\} = \overline{sp}\,\{X_k\,;\, k\ge n-1\}\,.$$

La suite stochastique $(X_n)_n$ est dite :

1. bornée, si $\sup_n \|X_n\| < \infty$ ;
2. stationnaire, si $\langle X_{n+k}, X_k\rangle$ dépend uniquement de $k$ ;
3. périodiquement corrélée de période $\tau$ ($\tau$-PC), si $\forall\, k\in\mathbb{Z}$, $\langle X_{n+k}, X_n\rangle$ est périodiquement (en $n$) de période $\tau$ ;

4. presque périodiquement corrélée (PPC), si $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, la suite $(\langle X_{n+k}, X_n\rangle)_n$ est presque périodique ;
5. presque périodiquement unitaire s'il existe un opérateur unitaire $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ et une suite presque périodique $(f_n)_n$ à valeur dans $\mathcal{H}$ tels que $X_n = U^n f_n,\ n \in \mathbb{Z}$.

## 4.2 La bornitude de la solution du AR(1)

Nous allons discuter, dans ce qui suit, les solutions bornées $(X_n)_n$ de l'équation (4.1), où $(\xi_n)_n$ est une suite orthonormée de $\mathcal{H}$ donnée et $(a_n)_n$ une suite donnée de nombres complexe non nuls.

Notons que, si l'équation (4.1) possède une solution bornée $(X_n)_n$, alors sa projection dans l'espace $\mathcal{M}_\xi$ est aussi bornée, de plus elle vérifie l'équation (4.1). En effet, si on note $Z_n = P_{\mathcal{M}_\xi}(X_n)$ et $Y_n = X_n - Z_n$, alors la suite $(Z_n)_n$ est aussi bornée, car :

$$\begin{aligned}\sup_n \|Z_n\| &= \sup_n \left\|P_{\mathcal{M}_\xi}(X_n)\right\|,\\ &\le \left\|P_{\mathcal{M}_\xi}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \sup_n \|(X_n)\|,\\ &= \sup_n \|(X_n)\| < \infty.\end{aligned}$$

Par ailleurs, en appliquant l'opérateur $P_{\mathcal{M}_\xi}$ à l'équation (4.1), on trouve

$$P_{\mathcal{M}_\xi}(X_n) = P_{\mathcal{M}_\xi}(a_n X_{n-1} + \xi_n)\ ; n \in \mathbb{Z},$$

ou encore

$$Z_n = a_n Z_{n-1} + \xi_n\ ; n \in \mathbb{Z}, \qquad \text{car } P_{\mathcal{M}_\xi}(\xi_n) = \xi_n,$$

d'où l'en déduit que

$$X_n - Z_n = a_n(X_{n-1} - Z_{n-1})\ ; n \in \mathbb{Z},$$

c'est à dire aussi

$$Y_n = a_n Y_{n-1}\ ; n \in \mathbb{Z}.$$

Cette dernière équation signifie que $\dim \mathcal{M}_Y$ est au plus égale à 1, où $\mathcal{M}_Y$ est, par définition, l'espace ${\mathcal{M}_\xi}^\perp$.

Dans un premier temps, nous allons nous restreindre aux solutions $X_n$ qui se trouvent dans le sous espace fermé engendré par les $\xi_n,\ n \in \mathbb{Z}$.
Nous reviendrons plus loin au cas général où la solution $X_n$ n'est pas forcement dans $\mathcal{M}_\xi$, ce qui correspond à $\dim \mathcal{M}_Y \neq 0$.

On note $A_r^s = \Pi_{i=r}^s a_i$, et on pose, par convention, $A_r^s = 1$ si $r > s$.
Supposons que $(X_n)_n$ est une solution de l'équation (4.1). En itérant l'équation (4.1) $k$-fois, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $k \geq 1$.

$$\begin{aligned}
X_n &= a_n X_{n-1} + \xi_n, \\
&= a_n a_{n-1} X_{n-2} + a_n \xi_{n-1} + \xi_n, \\
&= A_{n-1}^n X_{n-2} + A_n^n \xi_{n-1} + \xi_n, \\
&= A_{n-1}^n [a_{n-2} X_{n-3} + \xi_{n-2}] + A_n^n \xi_{n-1} + \xi_n, \\
&\vdots \\
&= A_{n+1-k}^n X_{n-k} + \sum_{j=1}^{k} A_{n+1+j-k}^n \xi_{n+j-k}.
\end{aligned}$$

On déduit de cette équation que

$$X_n = A_{n+1-k}^n X_{n-k} + \sum_{j=1}^{k} A_{n+1+j-k}^n \xi_{n+j-k}. \tag{4.3}$$

Avec un changement de variable dans (4.3), (n :=n+k), cette dernière devient

$$X_{n+k} = A_{n+1}^{n+k} X_n + \sum_{j=1}^{k} A_{n+1+j}^{n+k} \xi_{n+j}\ , \quad \forall n \in \mathbb{Z},\, \forall k \geq 1. \tag{4.4}$$

La multiplication de l'équation (4.3) par $(A_{n+1-k}^n)^{-1}$ nous donne

$$X_{n-k} = (A_{n+1-k}^n)^{-1} X_n - \sum_{j=1}^{k} (A_{n+1-k}^n)^{-1} A_{n+1+j-k}^n \xi_{n+j-k},$$

d'où l'on déduit que

$$X_{n-k} = (A_{n+1-k}^n)^{-1} X_n - \sum_{j=1}^{k} (A_{n+1-k}^{n+j-k})^{-1} \xi_{n+j-k}. \tag{4.5}$$

Les formules (4.3), (4.4) et (4.5) seront utilisées pour démontrer les lemmes suivants. Ces derniers permettrons d'exprimer la bornitude de $X_n$ en termes de conditions sur $A_r^s$.

**Lemme 4.2.** *Si l'équation (4.1) a une solution bornée dans $\mathcal{M}_\xi$ et $\sup_m |A_1^m| = \infty$, alors $\sup_n \sum_{j\geq 1} \left|A_{n+1}^{n+j}\right|^{-2} < \infty$.*

*Démonstration.* La condition $\sup_m |A_1^m| = \infty$, signifie l'existence d'une suite $(k_m)_{m\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{N}^*$ tend vers l'infini, telle que

$$\lim_{m\to\infty} \left|A_1^{k_m}\right| = \infty.$$

Comme les $a_n$ sont différents de 0, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, donc $A_n^{k_m}$ est un multiple non nul de $A_1^{k_m}$

$$\lim_{m\to\infty} \left|A_1^{k_m}\right| = \infty \Leftrightarrow \lim_{m\to\infty} \left|A_{n+1}^{n+k_m}\right| = \infty.$$

D'après (4.4), on a

$$\left(A_{n+1}^{n+k}\right)^{-1} X_{n+k} = X_n + \sum_{j=1}^{k} \left(A_{n+1}^{n+j}\right)^{-1} \xi_{n+j}.$$

Pour la suite $(k_m)_m$, on a $\lim_{m\to\infty} k_m = \infty$,
et

$$\lim_{m\to\infty} \left(X_n + \sum_{j=1}^{k_m} \left(A_{n+1}^{n+j}\right)^{-1} \xi_{n+j}\right) = \left(\lim_{m\to\infty} \left(A_{n+1}^{n+k_m}\right)^{-1} X_{n+k_m}\right) = 0,$$

où la convergence a lieu sur $\mathcal{M}_X \subset \mathcal{H}$ au sens de la norme induite par le produit scalaire de $\mathcal{H}$. Donc

$$X_n = -\lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{k_m} \left(A_{n+1}^{n+j}\right)^{-1} \xi_{n+j},$$

et comme $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ forme une base orthonormé et $X_n$ bornée, alors

$$\lim_m \sum_{j=1}^{k_m} \left|A_{n+1}^{n+j}\right|^{-2} = \sum_{j\geq 1} \left|A_{n+1}^{n+j}\right|^{-2} < \infty.$$

Donc, pour tout $n$, la série $(-\sum_{j\geq 1} (A_{n+1}^{n+j})^{-1}\xi_{n+j})$ converge vers la solution $X_n$. L'expression de $X_n$ en termes des $\xi_n$ donnée par

$$X_n = -\sum_{j\geq 1} (A_{n+1}^{n+j})^{-1}\xi_{n+j}$$

montre que la solution $X_n$ est unique.
Finalement, comme $X_n$ est bornée, on déduit que $\sup_n \sum_{j\geq 1} \left|A_{n+1}^{n+j}\right|^{-2} < \infty$. □

**Lemme 4.3.** *Si l'équation (4.1) a une solution bornée dans* $\mathcal{H}_\xi$ *et* $\sup_m |A_m^0|^{-1} = \infty$, *alors* $\sup_n \sum_{j\geq 1} \left|A_{n+1-j}^n\right|^2 < \infty$.

*Démonstration.* On utilisera les mêmes arguments que précédemment. En effet :

On a $\sup_m |A_m^0| = \infty$, donc il existe une suite $(k_m)_{m\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{m\to-\infty} k_m = \infty$, telle que

$$\lim_{m\to-\infty} \left|A^0_{-k_m}\right|^{-1} = \infty.$$

On a aussi

$$\lim_{m\to-\infty} \left|A^0_{-k_m}\right|^{-1} = \infty \Leftrightarrow \lim_{m\to-\infty} \left|A^0_{-k_m}\right| = 0.$$

Comme

$$\sum_{j=1}^{k} A^n_{n+1+j-k}\xi_{n+j-k} = \sum_{j=0}^{k-1} A^n_{n+1-j}\xi_{n-j},$$

l'équation (4.3) devient alors :

$$X_n = A^n_{n+1-k}X_{n-k} + \sum_{j=0}^{k-1} A^n_{n+1-j}\xi_{n-j}.$$

De plus, on a

$$A^n_{n+1-k} = \begin{cases} A^0_{n+1-k}A^n_1 & \text{si } n > 0, \\ A^0_{n+1-k}(A^0_{n+1})^{-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $A^n_1 \neq 0$ et $\left(A^0_{n+1}\right)^{-1} \neq 0$.

Donc $\lim_m A^n_{n+1-k_m} = \lim_m A^0_{n+1-k_m} = 0$.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\lim_m X_n &= \lim_m A^n_{n+1-k_m}X_{n-k_m} + \sum_{j=0}^{k_m-1} A^n_{n+1-j}\xi_{n-j}, \\ &= \lim_m \sum_{j=0}^{k_m-1} A^n_{n+1-j}\xi_{n-j}, \\ &= \sum_{j\geq 0} A^n_{n+1-j}\xi_{n-j}.\end{aligned}$$

Comme $\{\xi_n\}_n$ est orthonormée , on a $\|X_n\|^2 = \sum_{j\geq 0}\left|A^n_{n+1-j}\right|^2$.

Finalement, comme $X_n$ est bornée quel que soit $n \in \mathbb{Z}$, on aura alors :

$$\sup_n \sum_{j\geq 1} \left|A^n_{n+1-j}\right|^2 < \infty.$$

$\square$

**Lemme 4.4.** *Supposons que l'équation (4.1) a une solution bornée dans $\mathcal{M}_\xi$, et que* $\sup_m |A_m^0|^{-1} < \infty$ *et* $\sup_m |A_1^m| < \infty$. *Alors nous avons*

$$\sup_{n\geq 1} \sum_{j=1}^{n} \left|A_{j+1}^n\right|^2 < \infty,$$

*et*

$$\sup_{n\geq 1} \sum_{j=1}^{n} \left|A_{1-n}^{j-n}\right|^{-2} < \infty.$$

*Démonstration.* Supposons que les deux suites $(|A_m^0|^{-1})_m$ et $(|A_1^m|)_m$ sont uniformément bornées par une constante $C$.

La solution de l'équation (4.1) est par hypothèse bornée, on reprend l'équation (4.4) avec $n = 0$, on trouve

$$X_k = A_1^k X_0 + \sum_{j=1}^{k} A_{1+j}^k \xi_j \Leftrightarrow X_k - A_1^k X_0 = \sum_{j=1}^{k} A_{1+j}^k \xi_j.$$

Cependant, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} \left|A_{1+j}^k\right|^2 &= \left\|X_k - A_1^k X_0\right\|^2, \\
&\leq \left(\|X_k\| + \left|A_1^k\right| \|X_0\|\right)^2, \\
&\leq \left(\sup_n \|X_n\| + \left|A_1^k\right| \sup_n \|X_n\|\right)^2, \\
&= \left(\sup_n \|X_n\|\right)^2 (1+C)^2 < \infty.
\end{aligned}$$

Donc $\sup_{k\geq 1} \sum_{j=1}^{k} \left|A_{1+j}^k\right|^2 < \infty$.

De la même manière, pour la deuxième majoration, on reprend l'équation (4.5) avec $n = 0$, on trouve

$$X_{-k} = \left(A_{1-k}^0\right)^{-1} X_0 + \sum_{j=1}^{k} \left(A_{1-k}^{j-k}\right)^{-1} \xi_{j-k} \Leftrightarrow X_{-k} - \left(A_{1-k}^0\right)^{-1} X_0 = \sum_{j=1}^{k} \left(A_{1-k}^{j-k}\right)^{-1} \xi_{j-k}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k}\left|A_{1-k}^{j-k}\right|^{-2} &= \left\|X_{-k}-\left(A_{1-k}^{0}\right)^{-1}X_0\right\|^2,\\ &\leq \left(\|X_{-k}\|+\left|A_{1-k}^{0}\right|^{-1}\|X_0\|\right)^2,\\ &\leq \left(\sup_n \|X_n\|\right)^2(1+C)^2<\infty,\ \forall\, k\geq 1.\end{aligned}$$

Finalement $\sup_{n\geq 1}\sum_{j=1}^{n}\left|A_{1-n}^{j-n}\right|^{-2}<\infty$.

□

Considérons maintenant le cas général où les solutions bornées de l'équation (4.1) ne sont pas forcement dans $\mathcal{M}_\xi$. Si

$$X_n = Y_n + Z_n,$$

où $Z_n = P_{\mathcal{M}_\xi}X_n \in \mathcal{M}_\xi$ et $P_{\mathcal{M}_\xi}$ est la projection orthogonale sur $\mathcal{M}_\xi$, alors $X_n$ est bornée si, et seulement si, $Z_n$ et $Y_n$ sont bornées, et $Y_n = a_nY_{n-1} = a_{n+1}^{-1}Y_{n+1}$.
On peut donc écrire, pour $n>0$.

$$\begin{aligned}Y_n &= a_nY_{n-1},\\ &= a_na_{n-1}Y_{n-2},\\ &\vdots\\ &= a_na_{n-1}\cdots a_1Y_0,\\ &= A_1^nY_0.\end{aligned}$$

Et pour $n\leq 0$, on a :

$$\begin{aligned}Y_n &= a_{n+1}^{-1}Y_{n+1},\\ &= \left(a_{n+1}a_{n+2}\right)^{-1}Y_{n+2},\\ &\vdots\\ &= \left(a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_0\right)^{-1}Y_0,\\ &= \left(A_{n+1}^{0}\right)^{-1}Y_0.\end{aligned}$$

**Remarque 4.5.** *Nous avons signalé précédemment que* $\dim\mathcal{M}_Y$ *est au plus égale à 1. Nous allons voir sous quelles conditions* $\dim\mathcal{M}_Y=0$ *et* $\dim\mathcal{M}_Y=1$.

Si $X_n$ est bornée et $\sup_m|A_1^m|=\infty$, alors $Y_n$ est aussi bornée, et de plus $\sup_m|A_1^m|^{-1}=0$, et comme

$$Y_n=\lim_{k\to\infty}\left(A_{n+1}^{n+k}\right)^{-1}Y_{n+k},$$

alors $Y_n = 0$.

Le même résultat est obtenu dans le cas où la solution $X_n$ est bornée et le $\sup_m |A_m^0|^{-1} = \infty$. En effet, nous avons $Y_n = A_{n+1-k}^n Y_{n-k}$.

D'après le lemme 4.3, on a

$$\lim_{k\to\infty} A_{n+1-k}^n = \lim_{k\to\infty} A_{n+1-k}^0 = 0,$$

donc

$$\lim_{k\to\infty} Y_n = \lim_{k\to\infty} A_{n+1-k}^n Y_{n-k} = 0.$$

Par conséquence, on a $Y_n = 0$.

Dans le cas où $\sup_m |A_m^0|^{-1} < \infty$ et $\sup_m |A_1^m| < \infty$ ; d'après le lemme 4.4, et comme $Y_n$ est bornée, alors on a

$$Y_n = \begin{cases} A_1^n Y_0 & \text{si } n > 0, \\ \left(A_{n+1}^0\right)^{-1} Y_0 & \text{sinon }. \end{cases} \tag{4.6}$$

où $Y_0 \neq 0$.

Il vient que, quelle que soit la nature de $\sup_m |A_1^m|$ et $\sup_m |A_m^0|^{-1}$, fini ou infini, $Y_n$ ne peut prendre qu'une seule valeur, zéro ou $Y_0$ ($\neq 0$). On peut donc écrire

$$\mathcal{H}_\xi^\perp = \mathcal{H}_Y = \begin{cases} \{0\} & \text{si } \sup_m |A_1^m| = \infty \text{ ou } \sup_m |A_m^0|^{-1} = \infty, \\ \{Y_0\} \neq \{0\} & \text{si } \sup_m |A_m^0|^{-1} < \infty \text{ et } \sup_m |A_1^m| < \infty \text{ }. \end{cases}$$

Nous pouvons, à présent, énoncer et démontrer le théorème caractérisant les solutions bornées de l'équation (4.1) :

**Théorème 4.6.** *L'équation (4.1) a une solution bornée si, et seulement si, seule une des conditions suivantes est assurée :*

**1-** $\sup_n \sum_{j\geq 1} \left|A_{n+1}^{n+j}\right|^{-2} < \infty$, *et dans ce cas, la solution $X_n$ est unique et est donnée par :*

$$X_n = -\sum_{j\geq 1} \left(A_{n+1}^{n+j}\right)^{-1} \xi_{n+j}, \tag{4.7}$$

*où $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un processus d'innovation rétrograde pour $X_n$ ; ou bien*

**2-** $\sup_n \sum_{j\geq 0} \left|A^n_{n+1-j}\right|^2 < \infty$, *et dans ce cas la solution $X_n$ est unique et est donnée par :*

$$X_n = \sum_{j\geq 0} A^n_{n+1-j}\xi_{n-j}, \tag{4.8}$$

*où $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un processus d'innovation progressif pour $X_n$ ; ou bien*

**3-** $\sup_{n\geq 1} \sum_{j=1}^n \left|A^n_{j+1}\right|^2 < \infty$ *et* $\sup_{n\geq 1} \sum_{j=1}^n \left|A^{j-n}_{1-n}\right|^{-2} < \infty$, *et dans ce cas la solution $X_n$ n'est pas unique, et toute suite de la forme*

$$X_n = \begin{cases} A^n_1 X_0 + \sum_{j=1}^n \; A^n_{j+1}\xi_j & \text{si } n > 0, \\ X_0 & \text{si } n = 0\ , \\ \left(A^0_{n+1}\right)^{-1} X_0 - \sum_{j=n+1}^0 \left(A^j_{n+1}\right)^{-1} \xi_j & \text{si } n < 0. \end{cases} \tag{4.9}$$

*est une solution bornée de (4.1) pour tout $X_0 \in \mathcal{M}_\xi$. De plus, chaque solution dans $\mathcal{M}_\xi$ est de cette forme.*

*Démonstration.* **Suffisance :** 1. $\sup_n \sum_{j\geq 1} \left|A^{n+j}_{n+1}\right|^{-2} < \infty \Rightarrow X_n$ est bornée ?

L'équation (4.1) permet d'avoir les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} X_n = a_n X_{n-1} + \xi_n \Leftrightarrow X_{n+k} &= A^{n+k}_{n+1} X_n + \sum_{j=1}^k A^{n+k}_{n+1+j}\xi_{n+j}, \\ \Leftrightarrow X_n - \left(A^{n+k}_{n+1}\right)^{-1} X_{n+k} &= -\sum_{j=1}^k \left(A^{n+j}_{n+1}\right)^{-1} \xi_{n+j}, \\ \Leftrightarrow \lim_k \left(X_n - \left(A^{n+k}_{n+1}\right)^{-1} X_{n+k}\right) &= -\sum_{j\geq 1} \left(A^{n+j}_{n+1}\right)^{-1} \xi_{n+j}, \\ \Leftrightarrow X_n - \lim_k \left(A^{n+k}_{n+1}\right)^{-1} X_{n+k} &= -\sum_{j\geq 1} \left(A^{n+j}_{n+1}\right)^{-1} \xi_{n+j}, \\ \Leftrightarrow \left\|X_n - \lim_k \left(A^{n+k}_{n+1}\right)^{-1} X_{n+k}\right\|^2 &= \sum_{j\geq 1} (A^{n+j}_{n+1})^{-2} < \infty. \end{aligned}$$

D'où on déduit que

$$\|X_n\|^2 - \lim_k \left|A^{n+k}_{n+1}\right|^{-2} \|X_{n+k}\|^2 \leq \left\|X_n - \lim_k \left(A^{n+k}_{n+1}\right)^{-1} X_{n+k}\right\|^2 < \infty.$$

Grâce à la convergence de la série $\sum_{j\geq 1} \left|A^{n+j}_{n+1}\right|^{-2}$, son terme général tend vers 0 : $\lim_j \left|A^{n+j}_{n+1}\right|^{-2} = 0$.
Soit encore

$$\lim_k \left|A^{n+k}_{n+1}\right|^{-2} \|X_{n+k}\|^2 = 0.$$

Par conséquent, $X_n$ est bornée, de plus

$$\sup_n \|X_n\|^2 = \sup_n \sum_{j\geq 1} \left(A_{n+1}^{n+j}\right)^{-2} < \infty,$$

2. $\sup_n \sum_{j\geq 1} \left|A_{n+1-j}^n\right|^2 < \infty \Rightarrow X_n$ est bornée ?

   L'équation (4.1) permet d'avoir les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
X_n = a_n X_{n-1} + \xi_n \Leftrightarrow X_n &= A_{n+1-k}^n X_{n-k} + \sum_{j=1}^{k} A_{n+1-(k-j)}^n \xi_{n-(k-j)}, \\
\Leftrightarrow X_n &= A_{n+1-k}^n X_{n-k} + \sum_{j=0}^{k-1} A_{n+1-j}^n \xi_{n-j}, \\
\Leftrightarrow X_n - A_{n+1-k}^n X_{n-k} &= \sum_{j=0}^{k-1} A_{n+1-j}^n \xi_{n-j}, \\
\Leftrightarrow \lim_k X_n - A_{n+1-k}^n X_{n-k} &= \lim_k \sum_{j=0}^{k-1} A_{n+1-j}^n \xi_{n-j}, \\
\Leftrightarrow \left\| X_n - \lim_k A_{n+1-k}^n X_{n-k} \right\|^2 &= \sum_{j\geq 0} \left(A_{n+1-j}^n\right)^2 < \infty.
\end{aligned}$$

   Cette dernière équivalence est justifiée par le fait que :

$$\sum_{j\geq 0} (A_{n+1-j}^n)^2 \leq \sup_n \sum_{j\geq 1} \left|A_{n+1-j}^n\right|^2 < \infty.$$

   Comme dans le premier cas, on a aussi, $\lim_k \left|A_{n+1-k}^n\right|^2 = 0$.
   Par conséquent, $X_n$ est bornée et la solution de l'équation (4.1) est donnée par :

$$X_n = \sum_{j\geq 0} A_{n+1-j}^n \xi_{n-j}.$$

3. $\sup_{n\geq 1} \sum_{j=1}^n \left|A_{j+1}^n\right|^2 < \infty$ et $\sup_{n\geq 1} \sum_{j=1}^n \left|A_{1-n}^{j-n}\right|^{-2} < \infty \Rightarrow X_n$ est bornée ?

   Pour ce cas, on prend l'équation (4.1) et on fait $n$-itérations jusqu'à l'obtention de la variable $X_0, (n \geq 1)$, c'est-à-dire

$$X_n = A_1^n X_0 + \sum_{j=1}^{n} A_{1+j}^n \xi_j. \tag{4.10}$$

L'équation (4.10) permet d'écrire :

$$X_n - A_1^n X_0 = \sum_{j=1}^{n} A_{1+j}^n \xi_j \Rightarrow \|X_n - A_1^n X_0\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(A_{1+j}^n\right)^2,$$

$$\Rightarrow \sup_n \|X_n - A_1^n X_0\|^2 = \sup_n \sum_{j=1}^{n} \left(A_{1+j}^n\right)^2 < \infty.$$

D'où la bornitude de $(X_n - A_1^n X_0)_n$.

De manière similaire, on a

$$X_{-n} = \left(A_{-n+1}^0\right)^{-1} X_0 - \sum_{j=1}^{n} \left(A_{1-n}^{j-n}\right)^{-1} \xi_{j-n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z},$$

D'où passage à la norme

$$\left\| X_{-n} - \left(A_{-n+1}^0\right)^{-1} X_0 \right\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(A_{1-n}^{j-n}\right)^{-2}, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

Soit encore

$$\sup_{n\geq 1} \left\| X_{-n} - \left(A_{-n+1}^0\right)^{-1} X_0 \right\|^2 = \sup_n \sum_{j=1}^{n} \left(A_{1-n}^{j-n}\right)^{-2} < \infty,$$

d'où l'en déduit que la solution, $X_{-n} = \left(A_{-n+1}^0 X_0\right)^{-1} + \sum_{j=1}^n \left(A_{1-n}^{j-n}\right)^{-1} \xi_{j-n}$, est aussi bornée.

Nous terminons ce troisième point par une écriture globale de la solution $X_n$ :

$$X_n = \begin{cases} A_1^n X_0 + \sum_{j=1}^n \; A_{j+1}^n \xi_j & \text{si } n > 0, \\ X_0 & \text{si } n = 0 \;, \\ \left(A_{n+1}^0\right)^{-1} X_0 - \sum_{j=n+1}^0 \left(A_{n+1}^j\right)^{-1} \xi_j & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

**Nécessité :** $X_n$ bornée $\Rightarrow$ les points 1, 2 et 3 sont assurés ?

On suppose que $X_n$ est une solution bornée de $X_n = a_n X_{n-1} + \xi_n$ ; $n \in \mathbb{Z}$.

1. Soit $k \geq 1$. D'après l'équation (4.4), on a

$$X_n = \left(A_{n+1}^{n+k}\right)^{-1} X_{n+k} - \sum_{j=1}^{k} \left(A_{n+1}^{n+j}\right)^{-1} \xi_{n+j}. \tag{4.11}$$

Il vient que

$$\sum_{j=1}^{k} \left(A_{n+1}^{n+j}\right)^{-1} \xi_{n+j} = -X_n + \left(A_{n+1}^{n+k}\right)^{-1} X_{n+k},$$

d'où par passage à la norme

$$\sum_{j=1}^{k} \left(A_{n+1}^{n+j}\right)^{-2} = \left\| -X_n + \left(A_{n+1}^{n+k}\right)^{-1} X_{n+k} \right\|^2,$$

en utilisant l'inégalité suivante :

$$\left\| -X_n + \left(A_{n+1}^{n+k}\right)^{-1} X_{n+k} \right\|^2 \leq \sup_n \|X_n\|^2 \left(1 + \left|A_{n+1}^{n+k}\right|^{-1}\right)^2,$$

on obtient

$$\lim_k \sum_{j=1}^{k} \left(A_{n+1}^{n+j}\right)^{-2} \leq \sup_n \|X_n\|^2 \lim_k \left(1 + \left|A_{n+1}^{n+k}\right|^{-1}\right)^2.$$

Comme $X_n$ est bornée, alors la convergence de la suite

$$\left(\left(1 + \left|A_{n+1}^{n+k}\right|^{-1}\right)^2\right)_{k \geq 1}$$

entraîne la convergence de la série

$$\sum_{j \geq 1} \left(A_{n+1}^{n+j}\right)^{-2}.$$

Remarquons que les deux suites

$$\left(\left(1 + \left|A_{n+1}^{n+k}\right|^{-1}\right)^2\right)_{k \geq 1},$$

et

$$\left(\left|A_{n+1}^{n+k}\right|^{-2}\right)_{k \geq 1}.$$

sont de même nature.

On s'intéresse à la convergence de la suite $\left(\left|A_{n+1}^{n+k}\right|^{-2}\right)_{k \geq 1}$.

– Si la suite $\left(\left|A_{n+1}^{n+k}\right|^{-2}\right)_{k\geq 1}$ est convergente, alors sa limite ne peut être que la valeur nulle,

$$\lim_k \left|A_{n+1}^{n+k}\right|^{-2} = 0,$$

car, les termes généraux, de la suite et de la série, sont identiques, et on a de plus $\left(\sum_{n\geq 0} U_n < \infty \Rightarrow \lim_n U_n = 0\right)$,

d'où l'implication

$$\lim_k \left|A_{n+1}^{n+k}\right|^{-2} = 0 \Rightarrow \lim_k \left|A_{n+1}^{n+k}\right| = \infty,$$

et comme $A_1^n \neq 0$ et $A_1^{n+k} = A_1^n A_{n+1}^{n+k}$ , on a $\lim_k \left|A_{n+1}^{n+k}\right| = \lim_k \left|A_1^{n+k}\right|$ , $\forall n \in \mathbb{Z}$, donc $\sup_k \left|A_1^k\right| = \infty$. D'après le lemme 4.2, nous concluons que

$$\sup_n \sum_{j\geq 1} \left(A_{n+1}^{n+j}\right)^{-2} < \infty.$$

2. Soit $k \geq 1$, on a d'après l'équation (4.3),

$$X_n - A_{n+1-k}^n X_{n-k} = \sum_{j=0}^{k-1} A_{n+1-j}^n \xi_{n-j}, \tag{4.12}$$

d'où l'en déduit

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k-1} \left|A_{n+1-j}^n\right|^2 &= \left\|X_n - A_{n+1-k}^n X_{n-k}\right\|^2, \\ &\leq \sup_n \left\|X_n\right\|^2 \left(1 + \left|A_{n+1-k}^n\right|\right)^2.\end{aligned}$$

On remarque que la suite $\left(\left|A_{n+1-k}^n\right|^2\right)_{k\geq 1}$ et la série $\sum_{j\geq 0} \left|A_{n+1-j}^n\right|^2$ ont le même terme général, donc si la série converge, alors la suite $\left(\left|A_{n+1-k}^n\right|^2\right)_{k\geq 1}$ converge vers zéro ; et comme $X_n$ est bornée, on a

$$\lim_k \left|A_{n+1-k}^n\right|^2 = 0 \Rightarrow \lim_k \left|A_{n+1-k}^n\right|^{-1} = \infty.$$

On a aussi $A_{n+1-k}^n = A_{n+1-k}^0 \cdot A_1^n$ et comme $A_1^n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, donc $\lim_k \left|A_{n+1-k}^0\right|^{-1} = \infty,\ \forall n \in \mathbb{Z}$. Par conséquent $\sup_k \left|A_k^0\right|^{-1} = \infty$.

Finalement par application du lemme 4.3 et le fait que $X_n$ est bornée et que $\sup_k \left|A_k^0\right|^{-1} = \infty$, nous déduisons que

$$\sup_n \sum_{j\geq 0} \left|A_{n+1-j}^n\right|^2 < \infty.$$

3. On a

$$X_{n+k} = A_{n+1}^{n+k} X_n + \sum_{j=1}^{k} A_{n+1+j}^{n+k} \xi_{n+j}. \tag{4.13}$$

et

$$X_{n-k} = \left(A_{n+1-k}^{n}\right)^{-1} X_n - \sum_{j=1}^{k} \left(A_{n+1-k}^{n+j-k}\right)^{-1} \xi_{n+j-k}. \tag{4.14}$$

On remplace $n$ par zéro 0 dans (4.13) et (4.14), on trouve

$$X_k = A_1^k X_0 + \sum_{j=1}^{k} A_{1+j}^{k} \xi_j. \tag{4.15}$$

et

$$X_{-k} = \left(A_{1-k}^{0}\right)^{-1} X_0 - \sum_{j=1}^{k} \left(A_{1-k}^{j-k}\right)^{-1} \xi_{j-k}. \tag{4.16}$$

– D'après (4.15), on a

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} \left|A_{1+j}^{k}\right|^2 &= \left\|X_k - A_1^k X_0\right\|^2, \\ &\leq \sup_n \|X_n\|^2 \left(1 + \left|A_1^k\right|\right)^2.\end{aligned}$$

– Et d'après (4.16), on a aussi

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} \left|A_{1-kj}^{j-k}\right|^{-2} &= \left\|X_{-k} - \left(A_{1-k}^{0}\right)^{-1} X_0\right\|^2, \\ &\leq \sup_n \|X_n\|^2 \left(1 + \left|A_{1-k}^{0}\right|^{-1}\right)^2.\end{aligned}$$

Finalement, en tenant compte de la bornitude de $X_n$ et des deux conditions $\sup_k \left|A_1^k\right| < \infty$ et $\sup_k \left|A_1^k\right|^{-1} < \infty$, nous pouvons donc conclure que les deux quantités,

$$\sup_{k\geq 1} \sum_{j=1}^{k} \left|A_{1-kj}^{j-k}\right|^{-2} \quad \text{et} \quad \sup_{k\geq 1} \sum_{j=1}^{k} \left|A_{1+j}^{k}\right|^2,$$

sont bornées.

□

**Remarque 4.7.** *Le théorème précédent montre, en particulier, que si les coefficients $a_n$ de l'équation (4.1) vérifient la deuxième condition du théorème 4.6, alors l'unique solution bornée de (4.1) est causale.*

Il y a lieu de noter que l'expression des solutions bornées de l'équation (4.1) dépend d'une relation d'orthogonalité entre les deux processus $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. La proposition suivante précise ce lien.

**Proposition 4.8.** *Soit $X_n$ une solution bornée de l'équation*

$$X_n = a_n X_{n-1} + \xi_n \ ; n \in \mathbb{Z}. \tag{4.17}$$

*On a alors :*

1. $X_n \perp \xi_k, \ \forall\, k \leq n, \ n \in \mathbb{Z}$ *si, et seulement si,* $\sup_n \sum_{j\geq 1} \left|A_{n+1}^{n+j}\right|^{-2} < \infty$ ;

2. $X_n \perp \xi_k, \ \forall\, k \geq n+1, \ n \in \mathbb{Z}$ *si, et seulement si,* $\sup_n \sum_{j\geq 0} \left|A_{n+1-j}^{n}\right|^{2} < \infty$.

*Démonstration.* **a-** Nous allons démontrons d'abord la suffisance dans les deux cas

1. Soit $Z_n$ la projection orthogonale de $X_n$ dans $\mathcal{M}_\xi$, $\left(Z_n = P_{\mathcal{M}_\xi} X_n\right)$.
   Il est clair que $Z_n$ vérifie l'équation (4.17).
   Supposons $X_n \perp \xi_k \ \forall\, k \leq n$, alors $Z_n \perp \xi_k \ \forall\, k \leq n$.
   Soit $k = n - j \leq n$ où $j \geq 0$, $Z_n$ ne peut pas être en fonction de $\xi_{n-j}$ ; $j \geq 0$, car $Z_n \perp \xi_k$. Donc $Z_n$ ne peut pas être de la forme $\sum_{j\geq 0} A_{n-j}^{n} \xi_{n-j}$. Ainsi, les coefficients $a_n$ ne satisfont pas le deuxième point du théorème 4.6.

   Comme $Z_n \in \mathcal{M}_\xi$, alors $Z_n$ est de la forme suivante :

   $$Z_n = \sum_{k\geq n+1} c_k(n)\, \xi_k,$$

   où $\sum_{k\geq n+1} |c_k(n)|^2 < \infty$. Cette condition est nécessaire pour la bornitude de $Z_n$, et $Z_0$ est donné par

   $$Z_0 = \sum_{k\geq 1} c_k(0)\, \xi_k \ ; \ k \geq 1.$$

   On suppose que $Z_n$ est de la forme (4.9) du théorème 4.6, i.e.,

   $$\begin{aligned} Z_n &= A_1^n Z_0 + \sum_{j=1}^{n} A_{j+1}^{n} \xi_j, \\ &= \sum_{k\geq 1} A_1^n c_k(0)\, \xi_k + \sum_{j=1}^{n} A_{j+1}^{n} \xi_j, \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_1^n c_k(0)\, \xi_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} A_1^n c_k(0)\, \xi_k + \sum_{k=1}^{n} A_{k+1}^{n} \xi_j, \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(A_1^n c_k(0) + A_{k+1}^{n}\right) \xi_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} A_1^n c_k(0)\, \xi_k = I + II. \end{aligned}$$

Comme $Z_n \perp \xi_k$ pour $k \leq n$, alors les coefficients de $\xi_k$ dans l'expression $I$ sont tous nuls, i.e.,

$$A_1^n c_k(0) + A_{k+1}^n = 0 \Rightarrow c_k(0) = -\left(A_1^k\right)^{-1}.$$

Donc

$$Z_n = -\sum_{k \geq n+1} A_1^n \left(A_1^k\right)^{-1} \xi_k,$$

et on a aussi, pour tout $n$ supérieur à 1,

$$\sum_{k \geq n+1} \left|A_1^n \left(A_1^k\right)^{-1}\right|^2 < \infty \Rightarrow \sum_k \left|A_1^k\right|^{-2} < \infty.$$

Comme cette série est convergente, alors

$$\begin{aligned}\lim_{k \to \infty} \left|A_1^k\right|^{-2} = 0 &\Rightarrow \lim_{k \to \infty} \left|A_1^k\right|^2 = \infty, \\ &\Rightarrow \lim_{k \to \infty} \left|A_1^k\right| = \infty.\end{aligned}$$

Or d'après la troisième condition du théorème 4.6, on a $\sup_k \left|A_1^k\right| < \infty$. Contradiction.
Donc $Z_n$ ne peut pas être sous la forme (4.9).

On a $\lim_{k \to \infty} \left|A_1^k\right| = \sup_k \left|A_1^k\right| = \infty$, donc $Z_n$ est de la forme (4.7) du théorème 4.6, c'est à dire $Z_n = -\sum_{j \geq 1} \left(A_{n+1}^{n+j}\right)^{-1} \xi_{n+j}$, et comme $Z_n$ est bornée, alors

$$\sup_n \sum_{j \geq 1} \left|A_{n+1}^{n+j}\right|^{-2} < \infty.$$

2. Supposons que $X_n \perp \xi_k$, $\forall\, k \geq n+1$, $n \in \mathbb{Z}$. Alors $Z_n \perp \xi_k$, $\forall\, k \geq n+1$.
Comme $Z_n = P_{\mathcal{M}_\xi} X_n$, on déduit donc, que $Z_n$ s'écrit en combinaison linéaire de $\xi_k$ ; $k < n+1, \forall n \in \mathbb{Z}$, i.e.

$$Z_n = \sum_{k=-\infty}^{n} c_k(n)\, \xi_k,$$

avec $\sum_{k=-\infty}^{n} |c_k(n)|^2 < \infty$, car $Z_n$ est bornée.

Il est clair que $Z_n$ ne peut pas être de la forme (4.7) du théorème 4.6 car $Z_n \perp \xi_k$ $\forall\, k \geq n+1$.

On suppose, maintenant, que $Z_n$ est de la forme (4.9) du théorème 4.6, avec

$$Z_0 = \sum_{k=-\infty}^{0} c_k(0)\,\xi_k,$$

et pour $n < 0$, $Z_n$ s'écrit comme suit

$$\begin{aligned}
Z_n &= \left(A_{n+1}^{0}\right)^{-1} Z_0 - \sum_{j=n+1}^{0} \left(A_{n+1}^{j}\right)^{-1} \xi_j, \\
&= \sum_{k=-\infty}^{0} \left(A_{n+1}^{0}\right)^{-1} c_k(0)\,\xi_k - \sum_{j=n+1}^{0} \left(A_{n+1}^{j}\right)^{-1} \xi_j, \\
&= \sum_{k=-\infty}^{n} \left(A_{n+1}^{0}\right)^{-1} c_k(0)\,\xi_k + \sum_{k=n+1}^{0} [\left(A_{n+1}^{0}\right)^{-1} c_k(0) - \left(A_{n+1}^{k}\right)^{-1}]\xi_k = I + II.
\end{aligned}$$

Comme $Z_n \perp \xi_k$ pour $k \geq n+1$, les coefficients de $\xi_k$ de l'expression $II$ sont nuls, i. e.,

$$\left(A_{n+1}^{0}\right)^{-1} c_k(0) - \left(A_{n+1}^{k}\right)^{-1} = 0 \Rightarrow c_k(0) = A_{k+1}^{0}.$$

Par conséquent

$$Z_n = \sum_{k=-\infty}^{n} \left(A_{n+1}^{0}\right)^{-1} A_{k+1}^{0} \xi_k,$$

et

$$\sum_{k=-\infty}^{n} \left| \left(A_{n+1}^{0}\right)^{-1} A_{k+1}^{0} \right|^2 < \infty. \tag{4.18}$$

La convergence de la série (4.18) assure que

$$\lim_{k \to -\infty} \left| \left(A_{n+1}^{0}\right)^{-1} A_{k+1}^{0} \right|^2 = 0,$$

d'où l'en déduit que

$$\lim_{k \to -\infty} \left| A_{k+1}^{0} \right|^{-2} = \infty.$$

Soit encore

$$\lim_{k \to -\infty} \left| A_{k+1}^{0} \right|^{-1} = \infty.$$

Ceci constitue une contradiction avec la troisième condition du théorème 4.6. Par conséquent, $Z_n$ ne peut pas prendre la forme (4.9).

Nous allons montrer que $Z_n$ est forcément de la forme (4.8).
En utilisant la croissance de la suite $\left(\left|A_{k+1}^0\right|^{-1}\right)_{k\in\mathbb{Z}^-}$, on aura

$$\lim_{k\to-\infty}\left|A_{k+1}^0\right|^{-1}=\sup_k\left|A_{k+1}^0\right|^{-1}=\infty.$$

Ce qui correspond à la deuxième condition du théorème 4.6, donc

$$\begin{aligned}Z_n &= \sum_{k=-\infty}^{n} c_k(n)\,\xi_k,\\ &= \sum_{k=-n}^{\infty} c_{-k}(n)\,\xi_{-k},\\ &= \sum_{j=0}^{\infty} c_{n-j}(n)\,\xi_{n-j}.\end{aligned}$$

Donc, $Z_n$, qui orthogonal avec $\xi_k$ pour tout $k\geq n+1$, est donné par

$$Z_n=\sum_{j\geq0}A_{n-j+1}^n\xi_{n-j},$$

et comme $Z_n$ bornée, on a

$$\forall n\in\mathbb{Z},\ \sum_{j\geq0}\left|A_{n+1-j}^n\right|^2<\infty\Rightarrow\sup_n\sum_{j\geq0}\left|A_{n+1-j}^n\right|^2<\infty.$$

**b-** Montrons la nécessité dans les deux cas :
D'après le théorème 4.6, la solution de l'équation est exprimée, dans les deux cas, de façon suivante :

$$X_n=-\sum_{j\geq1}\left(A_{n+1}^{n+j}\right)^{-1}\xi_{n+j}. \tag{4.19}$$

ou

$$X_n=\sum_{j\geq1}A_{n+1-j}^n\xi_{n-j}. \tag{4.20}$$

Comme les deux séries $\sup_n\sum_{j\geq1}\left|A_{n+1}^{n+j}\right|^{-2}$ et $\sup_n\sum_{j\geq0}\left|A_{n+1-j}^n\right|^2$ sont convergentes, alors $X_n$ est bornée.

□

## 4.3 Existence de solutions périodiquement corrélées du AR(1)

On s'intéresse, dans cette section, à la caractérisation des solutions périodiquement corrélés (lorsqu'elles existent) de l'équation

$$X_n = a_n X_{n-1} + \xi_n \ ; n \in \mathbb{Z}, \tag{4.21}$$

Nous considérons, dans un premier temps, le cas où la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est périodique de période $\tau$ ($\tau \geq 1$), i.e., $a_n = a_{n+\tau}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.

Notons par $P$ l'expression :

$$P = A_1^\tau = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_\tau,$$

pour $r, s \in \mathbb{Z}$ avec $r > s$, écrivons $r = s + k + N\tau$ où $0 \leq k \leq \tau - 1$ et $N \in \mathbb{N}$.
Alors, grâce à la périodicité de $(a_n)_n$, on a, d'une part :

$$\begin{aligned} A_s^r &= A_s^{s+k+N\tau}, \\ &= a_s \cdot a_{s+1} \cdot \ldots \cdot a_{s+k} \cdot a_{s+k+1} \cdot \ldots \cdot a_{s+k+\tau} \cdot \ldots \cdot a_{s+k+2\tau} \cdot \ldots \cdot a_{s+k+N\tau}, \\ &= A_s^{s+k} \cdot A_{s+k+1}^{s+k+N\tau}. \end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned} A_{s+k+1}^{s+k+N\tau} &= \left(A_{s+k+1}^{s+k+\tau}\right)^N, \\ &= \left(A_1^\tau\right)^N, \\ &= P^N. \end{aligned}$$

Donc, $A_s^r = A_s^{s+k} \cdot P^N$.

Le théorème suivant est une extension du théorème 4.6 au cas périodique.

**Théorème 4.9.** *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite périodique de période $\tau$ et $P = A_1^\tau$. L'équation (4.21) a une solution bornée si, et seulement si, $|P| \neq 1$. La solution est de plus unique et est périodiquement corrélée de période $\tau$. Son expression $X_n$ est donnée par :*

- *Si $|P| > 1$, alors la solution est donnée par*

$$X_n = -\sum_{j\geq 1} \left(A_{n+1}^{n+j}\right)^{-1} \xi_{n+j}, \tag{4.22}$$

*et dans ce cas, $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un processus d'innovation rétrograde pour $X_n$ ;*

– *Si $|P|<1$, alors la solution est donnée par :*

$$X_n = \sum_{j\geq 1} A^n_{n+1-j}\,\xi_{n-j}, \tag{4.23}$$

*et dans ce cas, $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un processus d'innovation progressif pour $X_n$.*

*Démonstration.* **(a)** Supposons que $|P|\neq 1$. On distingue deux cas, $|P|>1$ et $|P|<1$.

– Si $|P|>1$, on a pour tout $n\in\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{j\geq 1}\left|A^{n+j}_{n+1}\right|^{-2} &\leq \sum_{N\geq 0}\sum_{k=0}^{\tau-1}\left|A^{n+k+N\tau}_{n+1}\right|^{-2},\\
&= \sum_{N\geq 0}\sum_{k=0}^{\tau-1}\left|P^N\cdot A^{n+k}_{n+1}\right|^{-2},\\
&= \sum_{N\geq 0}|P|^{-2N}\sum_{k=0}^{\tau-1}\left|A^{n+k}_{n+1}\right|^{-2},\\
&= \frac{1}{1-|P|^{-2}}\sum_{k=0}^{\tau-1}\left|A^{n+k}_{n+1}\right|^{-2}<\infty.
\end{aligned}$$

Donc $\sup_n\sum_{j\geq 1}\left|A^{n+j}_{n+1}\right|^{-2}<\infty$. La condition (1) du théorème 4.6 est satisfaite.

– Si $|P|<1$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{j\geq 0}\left|A^{n}_{n+1-j}\right|^{2} &= \sum_{k+N\tau\geq 0}\left|A^{n}_{n+1-(k+N\tau)}\right|^{2},\\
&= \sum_{N\geq 0}\sum_{k=0}^{\tau-1}\left|A^{n}_{n+1-(k+N\tau)}\right|^{2},\\
&= \sum_{N\geq 0}|P|^{2N}\sum_{k=0}^{\tau-1}\left|A^{n}_{n+1-k}\right|^{2},\\
&= \frac{1}{1-|P|^{2}}\sum_{k=0}^{\tau-1}\left|A^{n}_{n+1-k}\right|^{2}<\infty.
\end{aligned}$$

Donc $\sup_n\sum_{j\geq 0}\left|A^{n}_{n+1-j}\right|^{2}<\infty$. C'est à dire que la condition (2) du théorème 4.6 est satisfaite.

Comme la suite $(a_n)_n$ est périodique, alors les suites données par les formules (4.22) et (4.23) sont périodiquement corrélées.

**(b)** Supposons maintenant que $P = 1$. On vérifie facilement que

$$\sum_{j\geq 1}\left|A_{n+1}^{n+j}\right|^{-2} = \sum_{j\geq 0}\left|A_{n+1-j}^{n}\right|^{2} = \infty.$$

En effet :

$$\begin{aligned}\sum_{j\geq 1}\left|A_{n+1}^{n+j}\right|^{-2} &= \sum_{N\geq 0}\sum_{k=1}^{\tau}\left|A_{n+1}^{n+k+N\tau}\right|^{-2},\\ &= \sum_{N\geq 0}|P|^{-2N}\sum_{k=1}^{\tau}\left|A_{n+1}^{n+k}\right|^{-2},\\ &= \sum_{N\geq 0}1\cdot\sum_{k=1}^{\tau}\left|A_{n+1}^{n+k}\right|^{-2} = \infty.\end{aligned}$$

On a de même

$$\begin{aligned}\sum_{j\geq 0}\left|A_{n+1-j}^{n}\right|^{2} &= \sum_{N\geq 0}\sum_{k=0}^{\tau-1}\left|A_{n+1-(k+N\tau)}^{n}\right|^{2},\\ &= \sum_{N\geq 0}|P|^{2N}\sum_{k=0}^{\tau-1}\left|A_{n+1-k}^{n}\right|^{2},\\ &= \sum_{N\geq 0}1\cdot\sum_{k=0}^{\tau-1}\left|A_{n+1-k}^{n}\right|^{2} = \infty.\end{aligned}$$

On déduit alors, que les conditions 1 et 2 ne sont pas vérifiées.

Comme

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N\tau+1}\left|A_{j+1}^{N\tau+1}\right|^{2} &= \left|A_{2}^{N\tau+1}\right|^{2} + \left|A_{3}^{N\tau+1}\right|^{2} + \ldots + \left|A_{\tau+1}^{N\tau+1}\right|^{2} + \left|A_{\tau+2}^{N\tau+1}\right|^{2}\\ &\quad + \ldots + \left|A_{(N-1)\tau+1}^{N\tau+1}\right|^{2} + \left|A_{(N-1)\tau+2}^{N\tau+1}\right|^{2} + \ldots + \left|A_{N\tau+1}^{N\tau+1}\right|^{2},\\ &\geq \left|A_{2}^{N\tau+1}\right|^{2} + \left|A_{\tau+2}^{N\tau+1}\right|^{2} + \ldots + \left|A_{(N-1)\tau+2}^{N\tau+1}\right|^{2},\\ &= \sum_{k=0}^{N-1}\left|A_{k\tau+2}^{N\tau+1}\right|^{2},\\ &\geq N\left|A_{(N-1)\tau+2}^{N\tau+1}\right|^{2} = N|P|^{2} = N \longrightarrow \infty,\end{aligned}$$

donc,

$$\sup_{n\geq 1}\sum_{j=1}^{n}\left|A_{j+1}^{n}\right|^{2}\geq \sup_{n=N\tau+1}\sum_{j=1}^{n}\left|A_{j+1}^{n}\right|^{2}=\infty.$$

Cela signifie que la troisième condition du théorème 4.6 n'est pas satisfaite.

On conclut que pour $|P|=1$, aucune condition du théorème 4.6 n'est vérifiée.
En vertu du théorème 4.6, le système $X_n = a_n X_{n-1} + \xi_n$, $n \in \mathbb{Z}$, ne possède aucune solution bornée si $|P|=1$.

$\square$

Le théorème précédent montre que le système $X_n = a_n X_{n-1} + \xi_n$, $n \in \mathbb{Z}$, avec des coefficients $a_n$ périodiques, possède une solution causale périodiquement corrélée si, et seulement si, $|P|<1$. Notons que la suffisance de cette condition a été démontrée, pour la première fois, par Pagano (1978) [62].

On s'intéresse dans ce qui suit à la réciproque du théorème précédent. On se posera donc la question suivante : si le système $X_n = a_n X_{n-1} + \xi_n$, $n \in \mathbb{Z}$, a une solution périodiquement corrélée, est-il possible de conclure que la suite $(a_n)_n$ est périodique ?
Avant de répondre à cette question, on aura besoin de démontrer la proposition suivante :

**Proposition 4.10.** *Soit $X_n$ une solution périodiquement corrélée de l'équation (4.21). Si $X_{n-1} \perp \xi_n$ ou $X_n \perp \varepsilon_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, alors $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite périodique.*

*Démonstration.* Soit $X_n$ une solution périodiquement corrélée de l'équation (4.21).

1. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $X_{n-1} \perp \xi_n$.
   Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on peut écrire

   $$\|X_n\|^2 = \|a_n X_{n-1} + \xi_n\|^2 = |a_n|^2 \, \|X_{n-1}\|^2 + 1 \geq 1.$$

   car $X_{n-1} \perp \xi_n$, et $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée.
   En multipliant (4.21) par $(X_{n-1})$ (au sens du produit scalaire), on aura

   $$\langle X_n, X_{n-1}\rangle = \langle a_n X_{n-1} + \xi_n, X_{n-1}\rangle = a_n \|X_{n-1}\|^2,$$

   alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par

   $$a_n = \frac{\langle X_n, X_{n-1}\rangle}{\|X_{n-1}\|^2}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

   est périodique.

2. Soit $X_n \perp \xi_n,\ \forall n \in \mathbb{Z}$. On a
$$X_n - \xi_n = a_n X_{n-1} \Rightarrow \|X_n - \xi_n\|^2 = |a_n|^2 \|X_{n-1}\|^2 .$$
Comme $X_n \perp \xi_n$, on a
$$\|X_n\|^2 + 1 = |a_n|^2 \|X_{n-1}\|^2 \geq 1,$$
donc $\|X_n\|^2 + 1 \neq 0\ \forall n \in \mathbb{Z}$. En multipliant (4.21) par $X_n$, on obtient
$$\begin{aligned}\|X_n\|^2 &= \langle X_n, X_n\rangle = \langle a_n X_{n-1} + \xi_n, X_n\rangle,\\ &= a_n\langle X_{n-1}, X_n\rangle, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$
Comme $\|X_n\|^2 \neq 0$, alors $\langle X_{n-1}, X_n\rangle \neq 0$, donc la suite de terme général
$$a_n = \frac{\|X_n\|^2}{\langle X_n, X_{n-1}\rangle}, \quad n \in \mathbb{Z},$$
est périodique.

□

**Théorème 4.11.** *Supposons que l'équation (4.21) a une solution périodiquement corrélée. Alors les coefficients $a_n$, $n \in \mathbb{Z}$, sont périodiques si, et seulement si, seule une des deux premières conditions du théorème 4.6 est assurée.*

*Démonstration.* ⇐) Soit $X_n$ une solution périodiquement corrélée de l'équation (4.21). $X_n$ étant bornée et $(a_n)_n$ est périodique, donc une des deux premières conditions du théorème 4.6 est vérifiée (voir la preuve du théorème 4.6).
La solution $X_n$ périodiquement corrélée implique sa bornitude .
Comme les $a_n$, $n \in \mathbb{Z}$, sont périodiques et d'après le théorème 4.9, on a une des deux premières conditions du théorème 4.6 est assurée.

⇒) $X_n$ est périodiquement corrélée.

– Si la première condition du théorème 4.6 est assurée, i.e., $\sup_n \sum_{j\geq 1} \left|A_{n+1}^{n+j}\right|^{-2} < \infty$, alors
$$X_n = -\sum_{j\geq 1} \left(A_{n+1}^{n+j}\right)^{-1} \xi_{n+j}.$$
Comme $X_n$ est en fonction de $(\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots)$, donc $X_n$ est orthogonale avec $\xi_n$.

– Si la deuxième condition du théorème 4.6 est assurée, i.e., $\sup_n \sum_{j\geq 0} \left|A_{n+1-j}^{n}\right|^2 < \infty$, la solution est de la forme :
$$X_n = \sum_{j\geq 0} A_{n+1-j}^{n} \xi_{n-j}.$$
On remarque que $X_n$ est en fonction de $(\ldots, \xi_{n-2}, \xi_{n-1}, \xi_n)$. C'est à dire que $X_{n-1}$ est en fonction de $(\ldots, \xi_{n-3}, \xi_{n-2}, \xi_{n-1})$. Donc, $X_{n-1}$ est orthogonale avec $\xi_n$.

D'après la proposition 4.10, on conclut que les $a_n$, $n \in \mathbb{Z}$, sont périodiques dans les deux cas.

$\square$

**Densité spectrale de la solution périodiquement corrélée**

Rappelons que l'unique solution périodiquement corrélée du système (4.21) est donnée par

$$X_n = \begin{cases} -\sum_{j\geq 1} \left(A_{n+1}^{n+j}\right)^{-1} \xi_{n+j}, & \text{si } |P| > 1\,; \\ \sum_{j\geq 0} A_{n+1-j}^{n} \xi_{n-j}, & \text{si } |P| < 1. \end{cases}$$

Il convient aussi de signaler que, dans ce cas, nous avons $\mathcal{M}_\xi = \mathcal{M}_X$.

Avant de donner la représentation spectrale de $(X_n)_n$, nous allons d'abord, montrer qu'on peut identifier $X_n$ à une suite $(f_n)_n \subset L^2 = L^2\left([0, 2\pi[\,, d\lambda\right)$, où $d\lambda$ est la mesure de Lebesgue normalisée sur $[0, 2\pi[$.

Soit $V : \mathcal{M}_X \to \mathcal{M}_X$ l'opérateur défini par

$$V\left(\xi_i\right) = \xi_{i+1}.$$

Alors $V$ est un opérateur unitaire, de plus la solution $X_n$ de l'équation (4.21) vérifie

$$X_n = V^n Y_n,$$

où $Y_n$ est la suite périodique à valeur dans $\mathcal{M}_X$ donnée par

$$Y_n = \begin{cases} -\sum_{j\geq 1} \left(A_{n+1}^{n+j}\right)^{-1} \xi_j & \text{si } |P| > 1; \\ \sum_{j\geq 0} A_{n+1-j}^{n} \xi_{-j} & \text{si } |P| < 1. \end{cases}$$

Soit $\Psi$ l'opérateur unitaire défini par

$$\begin{aligned} \Psi\ : M_\xi &\longrightarrow L^2\left([0, 2\pi), d\lambda\right), \\ \xi_t &\longmapsto \exp\{it\cdot\}, \end{aligned}$$

où $d\lambda$ est la mesure de Lebesgue normalisée sur $[0, 2\pi[$. Posons $f_n = \Psi\left(X_n\right)$. L'équation (4.21) devient alors :

$$f_n\left(\cdot\right) = a_n f_{n-1}\left(\cdot\right) + e^{in\cdot}. \tag{4.24}$$

En appliquant l'opérateur $\Psi$ aux équations (4.22) et (4.23), et en remarquant que $\Psi V \Psi^{-1}$ est l'opérateur de multiplication par $\exp\{it\cdot\}$, on peut affirmer que la solution $X_n$ est unitairement équivalente à la suite $f_n = e^{in\cdot} g_n$ dans $L^2$, où $g_n$ est une suite périodique donnée par

$$g_n(\lambda) = [1 - P\, e^{-i\tau\lambda}]^{-1}\, G_n(\lambda), \tag{4.25}$$

où

$$G_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{\tau-1} A_{n-k+1}^n e^{-ik\lambda}. \tag{4.26}$$

En effet,

1. Si $|P| < 1$, alors

$$\begin{aligned} f_n = \Psi(X_n) &= \Psi\left(\sum_{j\geq 0} A_{n+1-j}^n \xi_{n-j}\right), \\ &= \sum_{j\geq 0} A_{n+1-j}^n e^{i(n-j)\cdot}. \end{aligned}$$

D'on l'en déduit que

$$\begin{aligned} g_n(\lambda) &= \sum_{j\geq 0} A_{n+1-j}^n e^{-ij\lambda}, \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} P^N e^{-iN\tau\lambda} \sum_{k=0}^{\tau-1} A_{n+1-k}^n e^{-ik\lambda}, \\ &= [1 - P\, e^{-i\tau\lambda}]^{-1} \sum_{k=0}^{\tau-1} A_{n-k+1}^n e^{-ik\lambda}. \end{aligned}$$

2. Si $|P| > 1$, on aura aussi

$$\begin{aligned} f_n = \Psi(X_n) &= \Psi\left(-\sum_{j\geq 1} \left(A_{n+1}^{n+j}\right)^{-1} \xi_{n+j}\right), \\ &= -\sum_{j\geq 1} \left(A_{n+1}^{n+j}\right)^{-1} e^{i(n+j)\cdot}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$
\begin{aligned}
g_n(\lambda) &= -\sum_{j\geq 1} \left(A_{n+1}^{n+j}\right)^{-1} e^{ij\lambda}, \\
&= -\sum_{k+N\tau\geq 1} \left(A_{n+1}^{n+k+N\tau}\right)^{-1} e^{i\lambda(k+N\tau)}, \\
&= -\sum_{N\geq 0}\sum_{k=1}^{\tau} P^{-N} \left(A_{n+1}^{n+k}\right)^{-1} e^{ik\lambda} e^{iN\tau\lambda}, \\
&= -\sum_{N\geq 0} P^{-N} e^{iN\tau\lambda} \sum_{k=1}^{\tau} \left(A_{n+1}^{n+k}\right)^{-1} e^{ik\lambda}, \\
&= -\left[1-P^{-1} e^{i\tau\lambda}\right]^{-1} \sum_{k=1}^{\tau} \left(A_{n+1}^{n+k}\right)^{-1} e^{ik\lambda}, \\
&= \left[1-P\, e^{-i\tau\lambda}\right]^{-1} P\, e^{-i\tau\lambda} \sum_{k=1}^{\tau} \left(A_{n+1}^{n+k}\right)^{-1} e^{ik\lambda}, \\
&= \left[1-P\, e^{-i\tau\lambda}\right]^{-1} \sum_{k=1}^{\tau} P \left(A_{n+1}^{n+k}\right)^{-1} e^{-i(\tau-k)\lambda}, \\
&= \left[1-P\, e^{-i\tau\lambda}\right]^{-1} \sum_{l=0}^{\tau-1} P \left(A_{n+1}^{n+\tau-l}\right)^{-1} e^{-il\lambda}, \qquad (l := \tau-k), \\
&= \left[1-P\, e^{-i\tau\lambda}\right]^{-1} \sum_{l=0}^{\tau-1} \left(A_{n+\tau-l+1}^{n+\tau}\right)^{+1} e^{-il\lambda}, \\
&= \left[1-P\, e^{-i\tau\lambda}\right]^{-1} \sum_{l=0}^{\tau-1} A_{n-l+1}^{n}\, e^{-il\lambda},
\end{aligned}
$$

Nous allons donc utiliser l'identification ($X_n \leftrightarrow f_n = e^{in\cdot} g_n \in L^2$), pour calculer le spectre de $X_n$. Cette méthode, [46], repose sur le résultat de Gladyshev, [40], que nous décrirons, brièvement, ici :

Tout processus $(X_n)_n$ $\tau$-périodiquement corrélé est fortement harmonisable. Il existe donc une unique mesure complexe $\Gamma$ définie sur $[0,2\pi)^2$, dite mesure spectrale de $X_n$, telle que

$$
\langle X_n, X_m\rangle = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\lambda_1 - im\lambda_2}\Gamma(d\lambda_1, d\lambda_2), \tag{4.27}
$$

où

$$
\Gamma(d\lambda_1, d\lambda_2) = \sum_{k=0}^{\tau-1} \Gamma_k(d\lambda_1, d\lambda_2),
$$

et le support de $\Gamma_k$ est

$$L_k = \left\{ \left( \lambda, \lambda + \frac{2\pi k}{\tau} \right), \ \lambda \in [0, 2\pi) \right\}, \ k = 0, 1, \cdots, \tau - 1.$$

L'ensemble $L_k$, $k = 0, 1, \cdots, \tau - 1$, est l'image de l'intervalle $[0, 2\pi)$ par l'application bijective

$$\phi_k(\lambda) = \left( \lambda, \lambda + \frac{2\pi k}{\tau} \right), \ k = 0, 1, \cdots, \tau - 1.$$

Ce détaille, nous permet d'avoir la représentation suivante du processus $(X_n)_n$, $\tau$-PC :

$$\langle X_{n+p}, X_n \rangle = \sum_{k=0}^{\tau-1} e^{-i2\pi nk/\tau} \int_0^{2\pi} e^{ip\lambda} \gamma_k(d\lambda),$$

où $\gamma_k(\lambda) = \Gamma_k(\phi_k(\lambda))$. En appliquant la transformée de Fourier (discrète) inverse, on obtient :

$$\int_0^{2\pi} e^{ip\lambda} \gamma_k(d\lambda) = \tau^{-1} \sum_{n=0}^{\tau-1} e^{i2\pi nk/\tau} \langle X_{n+p}, X_n \rangle,$$

Pour plus de détails, voir la proposition 3.37, page 71.

**Proposition 4.12.** *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite $\tau$-périodique, avec $|P| = |a_1 . \cdots . a_{\tau-1}| \neq 1$. Soit $\{\gamma_k\,; k = 1, \cdots, \tau - 1\}$ le spectre de la solution $\tau$-périodiquement corrélée de l'équation (4.21). Alors les mesures $\gamma_k$ sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue normalisé $d\lambda$, et*

$$\frac{d\gamma_k}{d\lambda}(\lambda) = \left|1 - P\, e^{-i\tau\lambda}\right|^{-2} \sum_{l=0}^{\tau-1} \widehat{G_l}\left(\lambda + 2\pi l \tau^{-1}\right) \overline{\widehat{G_{l-k}}\left(\lambda + 2\pi l \tau^{-1}\right)},$$

*où*

$$G_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{\tau-1} A_{n-k+1}^n\, e^{-ik\lambda} \quad \text{et} \quad \widehat{G_j}(\lambda) = \tau^{-1} \sum_{n=0}^{\tau-1} G_n(\lambda)\ e^{-i2\pi jn\tau^{-1}}.$$

*Démonstration.* Soit $(g_n)_n$ la suite donnée par la formule (4.25).

1. En premier lieu, nous allons simplifier la somme suivante , qui sera utile par la suite :

$$\begin{aligned}\tau^{-1} \sum_{n=0}^{\tau-1} e^{i2\pi nk\tau^{-1}}\, g_{n+p}(\lambda)\, \overline{g_n(\lambda)} &= \tau^{-1} \sum_{n=0}^{\tau-1} \sum_{j=0}^{\tau-1} \sum_{l=0}^{\tau-1} e^{i2\pi nk\tau^{-1}}\, \widehat{g_l}(\lambda)\, \overline{\widehat{g_j}(\lambda)} e^{(i2\pi nj - i2\pi l(n+p))\tau^{-1}}. \\ &= \sum_{l=0}^{\tau-1} \sum_{j=0}^{\tau-1} e^{-i2\pi lp\tau^{-1}}\, \widehat{g_l}(\lambda)\, \overline{\widehat{g_j}(\lambda)} \sum_{n=0}^{\tau-1} \tau^{-1} e^{(i2\pi n(k+j-l))\tau^{-1}}.\end{aligned}$$

Sous la condition que $k+j-l=0$, la troisième somme sous l'indice $n$ vaut un, i.e.,

$$\sum_{n=0}^{\tau-1}\tau^{-1}e^{(i2\pi n(k+j-l))\tau^{-1}}=1.$$

Et sous la même condition, la double somme restante, sous l'indice $j$ et $l$, peut être remplacée par une seule somme, sous l'indice $l$, moyennant quelques modifications dans l'expression du terme général, et on obtient

$$\sum_{l=0}^{\tau-1} e^{-i2\pi lp\tau^{-1}}\,\widehat{g_l}\,(\lambda)\,\overline{\widehat{g_{l-k}}\,(\lambda)},$$

on aura finalement

$$\tau^{-1}\sum_{n=0}^{\tau-1}e^{i2\pi nk\tau^{-1}}\,g_{n+p}\,(\lambda)\,\overline{g_n\,(\lambda)}=\sum_{l=0}^{\tau-1} e^{-i2\pi lp\tau^{-1}}\,\widehat{g_l}\,(\lambda)\,\overline{\widehat{g_{l-k}}\,(\lambda)}.$$

En vertu de l'équivalence entre les deux suites $(X_n)_n$ et $(e^{in\cdot}g_n)_n$, on a

$$\langle X_{n+p},X_n\rangle=\int_0^{2\pi}e^{i(n+p)\lambda}e^{-in\lambda}\,g_{n+p}\,(\lambda)\,\overline{g_n\,(\lambda)}\,(d\lambda)\,.$$

Dans ce cas, et grâce à la transformée de Fourier inverse (voir la formule (3.31)), on peut écrire

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}e^{ip\lambda}\gamma_k\,(d\lambda) &= \tau^{-1}\sum_{n=0}^{\tau-1}e^{i2\pi nk\tau^{-1}}\,\langle X_{n+p},X_n\rangle,\\
&= \tau^{-1}\sum_{n=0}^{\tau-1}e^{i2\pi nk\tau^{-1}}\int_0^{2\pi}e^{i(n+p)\lambda}e^{-in\lambda}\,g_{n+p}\,(\lambda)\,\overline{g_n\,(\lambda)}\,(d\lambda)\,,\\
&= \int_0^{2\pi}\tau^{-1}\sum_{n=0}^{\tau-1}e^{i2\pi nk\tau^{-1}}\,e^{i(n+p)\lambda-in\lambda}\,g_{n+p}\,(\lambda)\,\overline{g_n\,(\lambda)}\,(d\lambda)\,,\\
&= \int_0^{2\pi}e^{ip\lambda}[\tau^{-1}\sum_{n=0}^{\tau-1}e^{i2\pi nk\tau^{-1}}\,g_{n+p}\,(\lambda)\,\overline{g_n\,(\lambda)}]\,(d\lambda)\,,\\
&= \int_0^{2\pi}e^{ip\lambda}[\sum_{l=0}^{\tau-1}e^{-i2\pi lp\tau^{-1}}\,\widehat{g_l}\,(\lambda)\,\overline{\widehat{g_{l-k}}\,(\lambda)}]\,(d\lambda)\,,\\
&= \sum_{l=0}^{\tau-1}\int_0^{2\pi}e^{ip\left(\lambda-2\pi l\tau^{-1}\right)}\,\widehat{g_l}\,(\lambda)\,\overline{\widehat{g_{l-k}}\,(\lambda)}\,(d\lambda)\,,
\end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable, $\lambda := \lambda + 2\pi l\tau^{-1}$, on obtient

$$\int_0^{2\pi} e^{ip\lambda}\gamma_k\,(d\lambda) = \int_0^{2\pi} e^{ip\lambda}\,[\sum_{l=0}^{\tau-1} \widehat{g_l}\left(\lambda + 2\pi l\tau^{-1}\right) \overline{\widehat{g_{l-k}}\,(\lambda + 2\pi l\tau^{-1})}]\,(d\lambda)\,,$$

comme

$$\widehat{g_n}\left(\lambda + 2\pi l\tau^{-1}\right) = [1 - P\,e^{-i\tau\lambda}]^{-1}\widehat{G_n}\left(\lambda + 2\pi l\tau^{-1}\right),$$

alors

$$\frac{d\gamma_k}{d\lambda}\,(\lambda) = \left|1 - P\,e^{-i\tau\lambda}\right|^{-2} \sum_{l=0}^{\tau-1} \widehat{G_l}\left(\lambda + 2\pi l\tau^{-1}\right) \overline{\widehat{G_{l-k}}\,(\lambda + 2\pi l\tau^{-1})}.$$

**Remarque 4.13.** *Dans [67], Sakai a donné une méthode pour calculer la densité spectrale d'un processus $PARMA$ général via un processus vectoriel stationnaire $ARMA$. La méthode présentée ici est plus explicite et fait ressortir clairement la généralisation (3.2) de la formule (4.2) du cas stationnaire.*

□

## 4.4 La solution presque périodiquement corrélée du AR(1)

Dans cette partie, nous étudions le problème de l'existence de solutions presque périodiquement corrélées de l'équation (4.1), en supposant que les coefficients $a_n$, $n \in \mathbb{Z}$, sont presque périodiques.

Pour ce faire, nous commençons par énoncer un lemme sur les suites presque périodique, dont la démonstration repose sur le fait qu'une suite $(f_n)_n$, dans espace de Hilbert $\mathcal{B}$, est presque périodique si, et seulement si, elle est faiblement presque périodique, de plus, l'ensemble $\{f_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ est conditionnellement compact dans $\mathcal{B}$ (voir [20], théorème 6.18).

**Lemme 4.14.** *Soit $f_n = \left(g_{1,n}, g_{2,n}, \cdots\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, une suite dans $\ell^2$ telle que $(g_{i,n})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite presque périodique pour chaque $i$.*
*Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est presque périodique si, et seulement si,*

1. *$(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée ;*
2. *Il existe une suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{N}$, qui tend vers l'infini, telle que*

$$\lim_{k\to\infty} \sup_n \left( \sum_{i\geq N_k} |g_{i,n}|^2 \right) = 0. \tag{4.28}$$

Le théorème suivant est analogue au théorème 4.6. Il convient de signaler que la troisième condition de ce dernier n'a pas lieu lorsque les coefficients $a_n$, $n \in \mathbb{Z}$, sont presque périodiques.

**Théorème 4.15.** *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite presque périodique, alors l'équation (4.21) a une solution bornée si, et seulement si, une seule des deux conditions suivantes est assurée :*

1. $\sup_n \sum_{j\geq 1} \left|A_{n+1}^{n+j}\right|^{-2} < \infty$, *dans ce cas la solution $X_n$ est unique et est donnée par :*
$$X_n = -\sum_{j\geq 1} \left(A_{n+1}^{n+j}\right)^{-1} \xi_{n+j}\,; \tag{4.29}$$
2. $\sup_n \sum_{j\geq 0} \left|A_{n+1-j}^{n}\right|^{2} < \infty$, *dans ce cas la solution $X_n$ est unique et est donnée par :*
$$X_n = \sum_{j\geq 0} A_{n+1-j}^{n}\xi_{n-j}. \tag{4.30}$$

*Démonstration.* Dans cette preuve, on va vérifier que, si $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est presque périodique, alors la troisième condition du théorème 4.6 ne peut pas avoir lieu. Autrement dit, les deux conditions
$$\sup_{n\geq 1} \sum_{j=1}^{n} \left|A_{j+1}^{n}\right|^{2} \leq C < \infty, \tag{4.31}$$
et
$$\sup_{n\geq 1} \sum_{j=1}^{n} \left|A_{1-n}^{j-n}\right|^{-2} \leq C < \infty, \tag{4.32}$$
ne peuvent pas être vérifiées simultanément.

En effet, si (4.31) est vérifiée, alors on a pour $n \geq 1$ et $k \geq 0$,
$$\left|A_{n}^{n+k}\right|^{2} \leq C, \tag{4.33}$$
et si (4.32) est vérifiée, alors, pour $n \geq 1$, il existe un entier $k_n$, avec $0 \leq k_n \leq n$, tel que
$$\left|A_{-n}^{-n+k_n}\right|^{2} \geq \frac{n+1}{C}. \tag{4.34}$$
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que
$$\frac{n_0}{C} \geq C+1.$$
Posons $k_0 = k_{n_0}$, où $0 \leq k_{n_0} \leq n_0$. En vertu de l'équation (4.34), on a
$$\left|A_{-n_0}^{-n_0+k_{n_0}}\right|^{2} \geq \frac{n_0+1}{C} \geq \frac{n_0}{C} \geq C+1. \tag{4.35}$$
On considère la suite presque périodique $(u_n)_n$ définie par
$$u_n = \left|A_{n}^{n+k_{n_0}}\right|^{2},$$

qui, d'une part, vérifie d'après (4.33), $u_n \leq C$, $\forall\, n \geq 1$, et d'autre part, elle vérifie aussi $U_n > C + \frac{1}{2}$ pour un certain $n_0 < 0$.

Mais alors ceci est en contradiction avec la presque périodicité de la suite $(U_n)_n$.

□

Comme dans le cas périodique, on utilisera un opérateur unitaire $U$ particulier pour donner une autre expression de l'unique solution PPC de l'équation (4.21). On considérera alors l'opérateur unitaire :

$$U : \mathcal{H}_X \longrightarrow \mathcal{H}_X$$
$$\xi_i \longmapsto \xi_{i+1}.$$

La solution PPC est exprimée de la façon suivante :

$$X_n = U^n Y_n,$$

où

$$Y_n = \begin{cases} -\sum_{j\geq 1} \left(A_{n+1}^{n+j}\right)^{-1} \xi_j & \text{si} \quad \sup_n \sum_{j\geq 1} \left|A_{n+1}^{n+j}\right|^{-2} < \infty, \\ \\ \sum_{j\geq 0} A_{n+1-j}^{n} \xi_{-j} & \text{si} \quad \sup_n \sum_{j\geq 0} \left|A_{n+1-j}^{n}\right|^{2} < \infty. \end{cases} \tag{4.36}$$

Notons que, dans l'expression (4.36), tous les coefficients $\left(A_{n+1-j}^{n}\right)_j$ et $\left(\left(A_{n+1}^{n+j}\right)^{-1}\right)_j$ sont presque périodiques par rapport à $n$, car la suite $(a_n)_n$ l'est. Nous ne pouvons, toutefois, pas conclure que la suite $(Y_n)_n$ est Bohr-presque périodique. Si c'est le cas, la solution $(X_n)_n$ serait alors presque périodiquement unitaire (PPU).

L'objectif du paragraphe suivant est de montrer la presque périodicité, au sens de Bohr, de la suite $(Y_n)_n$, moyennant certaines hypothèses supplémentaires.

Rappelons que dans le cas où $(a_n)_n$ est $\tau$-périodique, le problème de l'existence d'une solution bornée est exprimée en terme de conditions sur le produit successif $P = a_1 \cdots a_\tau$ des éléments de la suite $(a_n)_n$.

Afin d'exploiter cette idée, on pose, pour $N \geq 1$,

$$I_N = \inf_n \left|A_{n+1}^{n+N}\right|, \quad \alpha = \sup_{N\geq 1} I_N,$$

et

$$S_N = \sup_n \left|A_{n+1}^{n+N}\right|, \quad \beta = \inf_{N\geq 1} S_N.$$

On a la presque périodicité de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ nous assure sa bornitude.
Cependant, $\forall N \geq 1$, $S_N < \infty$ et $I_N$ peut être nul, de plus

$$S_{Nk} \leq (S_N)^k \quad \text{et} \quad I_{Nk} \geq (I_N)^k, \quad N,k \geq 1,$$

car

$$\begin{aligned}
\sup_n \left|A_{n+1}^{n+Nk}\right| &= \sup_n \left[\left|A_{n+1}^{n+N}\right| \cdot \left|A_{n+N+1}^{n+2N}\right| \cdot \ldots \cdot \left|A_{n+(k-1)N+1}^{n+kN}\right|\right], \\
&\leq \sup_n \left|A_{n+1}^{n+N}\right| \cdot \sup_n \left|A_{n+N+1}^{n+2N}\right| \cdot \ldots \cdot \sup_n \left|A_{n+(k-1)N+1}^{n+kN}\right|, \\
&= \left(\sup_n \left|A_{n+1}^{n+N}\right|\right)^k = (S_N)^k,
\end{aligned}$$

de même, on a

$$\begin{aligned}
\inf_n \left|A_{n+1}^{n+Nk}\right| &= \inf_n \left[\left|A_{n+1}^{n+N}\right| \cdot \left|A_{n+N+1}^{n+2N}\right| \cdot \ldots \cdot \left|A_{n+(k-1)N+1}^{n+kN}\right|\right], \\
&\geq \inf_n \left|A_{n+1}^{n+N}\right| \cdot \inf_n \left|A_{n+N+1}^{n+2N}\right| \cdot \ldots \cdot \inf_n \left|A_{n+(k-1)N+1}^{n+kN}\right|, \\
&= \left(\inf_n \left|A_{n+1}^{n+N}\right|\right)^k = (I_N)^k.
\end{aligned}$$

**Théorème 4.16.** *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite presque périodique. Si $\alpha > 1$ ou $\beta < 1$, alors l'équation (4.21) a une solution presque périodiquement unitaire, et elle est de la forme suivante :*

$$X_n = U^n Y_n.$$

*où*

$$Y_n = \begin{cases} -\sum_{j\geq 1} \left(A_{n+1}^{n+j}\right)^{-1} \xi_j & si \quad \alpha > 1, \\ \sum_{j\geq 0} A_{n+1-j}^{n} \xi_{-j} & si \quad \beta < 1. \end{cases} \tag{4.37}$$

*Démonstration.* La presque périodicité de $Y_n$ repose sur les deux premières majorations du théorème 4.6, à savoir $\sup_n \sum_{j\geq 1} \left|A_{n+1}^{n+j}\right|^{-2} < \infty$ et $\sup_n \sum_{j\geq 0} \left|A_{n+1-j}^{n}\right|^2 < \infty$, et l'application du lemme 4.14.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$ et $k \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{j \geq kN+1} \left|A_{n+1}^{n+j}\right|^2 &= \sum_{i \geq 1} \left|A_{n+1}^{n+kN+i}\right|^2, \\
&= \sum_{i \geq 1} \left|A_{n+1}^{n+kN} \cdot A_{n+kN+1}^{n+kN+i}\right|^2, \\
&= \left|A_{n+1}^{n+kN}\right|^2 \cdot \sum_{i \geq 1} \left|A_{n+kN+1}^{n+kN+i}\right|^2, \\
&\leq \sup_n \left|A_{n+1}^{n+kN}\right|^2 \cdot \sup_n \sum_{i \geq 1} \left|A_{n+kN+1}^{n+kN+i}\right|^2, \\
&= (S_N)^{2k} \cdot \sup_n \sum_{i \geq 1} \left|A_{n+kN+1}^{n+kN+i}\right|^2, \\
&= (S_N)^{2k} \cdot \sup_n \sum_{i \geq 1} \left|A_{n+1}^{n+i}\right|^2, \\
&\leq (S_N)^{2k} \cdot \sup_n \left( \sum_{p \geq 0} \sum_{j=1}^{N} \left|A_{n+1}^{n+pN+j}\right|^2 \right), \qquad (i = pN + j) \\
&\leq (S_N)^{2k} \cdot \sup_n \left( \sum_{p \geq 0} \left|A_{n+1}^{n+pN}\right|^2 \cdot \sum_{j=1}^{N} \left|A_{n+1}^{n+j}\right|^2 \right), \\
&\leq (S_N)^{2k} \cdot \sum_{p \geq 0} S_N^{2p} \cdot \sup_n \left( \sum_{j=1}^{N} \left|A_{n+1}^{n+j}\right|^2 \right).
\end{aligned}$$

Pour simplifier l'écriture, on pose

$$C_N = \sup_n \left( \sum_{j=1}^{N} \left|A_{n+1}^{n+j}\right|^2 \right).$$

Donc, on a

$$\sup_n \left( \sum_{j \geq kN+1} \left|A_{n+1}^{n+j}\right|^2 \right) \leq C_N \, S_N^{2k} \, \sum_{p \geq 0} S_N^{2p}. \tag{4.38}$$

Concernant l'estimation de $\sup_n \left(\sum_{j\geq kN+1} \left|A_{n+1}^{n+j}\right|^{-2}\right)$, sous la condition $I_N \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{j\geq kN+1} \left|A_{n+1}^{n+j}\right|^{-2} &= \sum_{i\geq 1} \left|A_{n+1}^{n+kN+i}\right|^{-2}, \\
&= \sum_{i\geq 1} \left|A_{n+1}^{n+kN} \cdot A_{n+kN+1}^{n+kN+i}\right|^{-2}, \\
&= \left|A_{n+1}^{n+kN}\right|^{-2} \cdot \sum_{i\geq 1} \left|A_{n+kN+1}^{n+kN+i}\right|^{-2}, \\
&\leq \sup_n \left(\left|A_{n+1}^{n+kN}\right|^{-2}\right) \cdot \sup_n \sum_{i\geq 1} \left|A_{n+kN+1}^{n+kN+i}\right|^{-2}, \\
&\leq \left(\inf_n \left|A_{n+1}^{n+kN}\right|\right)^{-2} \cdot \sup_n \sum_{i\geq 1} \left|A_{n+kN+1}^{n+kN+i}\right|^{-2}, \\
&= (I_N)^{-2k} \cdot \sup_n \sum_{i\geq 1} \left|A_{n+kN+1}^{n+kN+i}\right|^{-2}, \\
&= (I_N)^{-2k} \cdot \sup_n \sum_{i\geq 1} \left|A_{n+1}^{n+i}\right|^{-2}, \\
&= (I_N)^{-2k} \cdot \sup_n \left(\sum_{p\geq 0} \sum_{j=1}^{N} \left|A_{n+1}^{n+pN+j}\right|^{-2}\right), \qquad (i = pN + j) \\
&\leq (I_N)^{-2k} \cdot \sup_n \left(\sum_{p\geq 0} \left|A_{n+1}^{n+pN}\right|^{-2} \cdot \sum_{j=1}^{N} \left|A_{n+1}^{n+j}\right|^{-2}\right), \\
&\leq (I_N)^{-2k} \cdot \sum_{p\geq 0} \left(\inf_n \left|A_{n+1}^{n+pN}\right|\right)^{-2} \cdot \sup_n \left(\sum_{j=1}^{N} \left|A_{n+1}^{n+j}\right|^{-2}\right), \\
&\leq (I_N)^{-2k} \cdot \sum_{p\geq 0} I_N^{-2p} \cdot \sup_n \left(\sum_{j=1}^{N} \left|A_{n+1}^{n+j}\right|^{-2}\right).
\end{aligned}$$

Il vient que

$$\sup_n \left(\sum_{j\geq kN+1} \left|A_{n+1}^{n+j}\right|^{-2}\right) \leq D_N \cdot (I_N)^{-2k} \cdot \sum_{p\geq 0} I_N^{-2p}. \tag{4.39}$$

où

$$D_n = \sup_n \left(\sum_{j=1}^{N} \left|A_{n+1}^{n+j}\right|^{-2}\right).$$

Grâce à la presque périodicité de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, les deux quantités $C_N$ et $D_N$ sont bornées.

1. Supposons que $\alpha > 1$, alors nous avons :
   $\alpha > 1 \Leftrightarrow \sup_N I_N > 1 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}^*;\ I_N > 1.$

Donc la série $\sum_{p\geq 0} I_N^{-2p}$ converge vers $\frac{1}{1-I_N^{-2}}$, et d'après la formule (4.39), nous avons

$$\sup_n \left( \sum_{j\geq kN+1} \left|A_{n+1}^{n+j}\right|^{-2} \right) \leq D_N \cdot (I_N)^{-2k} \frac{1}{1-I_N^{-2}},$$

et lorsque $k$ tend vers l'infini, on a

$$\lim_{k\to\infty} D_N \cdot (I_N)^{-2k} \frac{1}{1-I_N^{-2}} = 0.$$

Donc

$$\lim_{k\to\infty} \sup_n \left( \sum_{j\geq kN+1} \left|A_{n+1}^{n+j}\right|^{-2} \right) = 0.$$

En utilisant le lemme 4.14, on déduit que la suite

$$V_n = -\sum_{j\geq 1} \left(A_{n+1}^{n+j}\right)^{-1} \xi_j.$$

est presque périodique dans $\mathcal{M}_\xi$, donc $X_n$ est presque périodiquement unitaire.

2. Si $\beta < 1 \Leftrightarrow \inf_N S_N < 1 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}^*;\ S_N < 1$.
   Donc la série $\sum_{p\geq 0} S_N^{2p}$ converge vers $\frac{1}{1-S_N^2}$, et d'après la formule (4.38), nous avons

$$\lim_{k\to\infty} \sup_n \left( \sum_{j\geq kN+1} \left|A_{n+1}^{n+j}\right|^{2} \right) \lim_{k\to\infty} C_N \cdot (S_N)^{2k} \frac{1}{1-S_N^2} = 0,$$

   et d'après le lemme 4.14, la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que

$$W_n = \sum_{j\geq 1} A_{n+1-j}^{n} \xi_{-j}.$$

   est presque périodique dans $\mathcal{M}_\xi$, par conséquent, $X_n$ est presque périodiquement unitaire.

□

**Remarque 4.17.** *Comme les suites périodiques sont aussi presque périodiques, on peut appliquer le théorème précédent si les $a_n$, $n \in \mathbb{Z}$, sont périodiques.*
*Pour $N = k\tau + j$ tel que $k \geq 0$ et $1 \leq j \leq \tau$, on a $P = A_1^\tau$. D'où*

$$S_N = \sup_n \left|A_{n+1}^{n+N}\right| = \sup_n \left|A_{n+1}^{n+k\tau+j}\right| = \sup_n \left|P^k A_{n+1}^{n+j}\right| = |P|^k \sup_n \left|A_{n+1}^{n+j}\right|.$$

*et*

$$I_N = \inf_n \left|A_{n+1}^{n+N}\right| = \inf_n \left|A_{n+1}^{n+k\tau+j}\right| = \inf_n \left|P^k A_{n+1}^{n+j}\right| = |P|^k \inf_n \left|A_{n+1}^{n+j}\right|.$$

De plus, on a

$$\begin{cases} \alpha > 1 \Leftrightarrow |P| > 1\ ; \\ \\ \beta < 1 \Leftrightarrow |P| < 1. \end{cases}$$

En effet :

1. Si $\alpha > 1 \Leftrightarrow \sup_N I_N > 1 \Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N};\ I_N > 1 \Leftrightarrow |P|^k \inf_n \left|A_{n+1}^{n+j}\right| > 1$.
   On distingue deux cas
   - Si $\inf_n \left|A_{n+1}^{n+j}\right| \leq 1$, alors $(\alpha > 1) \Leftrightarrow |P|^k > \left(\inf_n \left|A_{n+1}^{n+j}\right|\right)^{-1} \geq 1$. Donc $|P|^k > 1$.
   - Si $\inf_n \left|A_{n+1}^{n+j}\right| > 1$, alors $(\alpha > 1) \Leftrightarrow |P| > 1$.
2. Si $\beta < 1 \Leftrightarrow \inf_N S_N < 1 \Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N};\ S_N < 1 \Leftrightarrow |P|^k \sup_n \left|A_{n+1}^{n+j}\right| < 1$.
   On a
   $$|P|^k \sup_n \left|A_{n+1}^{n+j}\right| < 1. \tag{4.40}$$
   - Si $\sup_n \left|A_{n+1}^{n+j}\right| \geq 1$, alors, d'après (4.40) on a $|P|^k < \left(\sup_n \left|A_{n+1}^{n+j}\right|\right)^{-1} \leq 1$. Donc $|P|^k < 1$.
   - Si $\sup_n \left|A_{n+1}^{n+j}\right| < 1$, alors $|P| < 1$.

**Lemme 4.18.** *Soit $X_n$ une solution presque périodiquement corrélée de l'équation (4.21). Si $X_{n-1} \perp \xi_n$ ou $X_n \perp \xi_n$, alors $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite presque périodique.*

*Démonstration.* Cette preuve est presque identique au cas de la solution périodiquement corrélée.
Soit $X_n$ une solution presque périodiquement corrélée de l'équation (4.21).

1. Supposons que $X_{n-1} \perp \xi_n, \forall n \in \mathbb{Z}$. Alors, comme dans le cas périodique (voir proposition 4.10, on conclut que la suite
   $$a_n = \frac{\langle X_n, X_{n-1}\rangle}{\|X_{n-1}\|^2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$
   est presque périodique car $\langle X_n, X_{n-1}\rangle$ et $\|X_{n-1}\|^2$ sont presque périodique et que $\|X_{n-1}\|^2 \geq 1$.
2. Si $X_n \perp \xi_n, \forall n \in \mathbb{Z}$.
   On peut écrire alors, comme dans le cas périodique :
   $$a_n = \frac{\|X_n\|^2}{\langle X_n, X_{n-1}\rangle},$$

La suite $(a_n)_n$ est rapport de deux suites presque périodiques. Donc, pour conclure que $(a_n)_n$ est presque périodique, il suffit de prouver que $\inf |\langle X_n, X_{n-1}\rangle|$ est strictement positif.

Montrons alors que $\inf |\langle X_n, X_{n-1}\rangle| > 0$. On a

$$|a_n|^2 \|X_{n-1}\|^2 = \|X_n\|^2 + \|\xi\|^2 \geq 1,$$

on a aussi

$$\|X_{n-1}\|^2 = a_{n-1}\langle X_{n-1}, X_{n-2}\rangle,$$

d'où l'en déduit

$$1 \leq |a_n|^2 \|X_{n-1}\|^2 = |a_n|^2 a_{n-1}\langle X_{n-1}, X_{n-2}\rangle.$$

Comme $(a_n)_n$ bornée, cette dernière majoration entraîne que

$$\inf |\langle X_n, X_{n-1}\rangle| > 0.$$

$\square$

# Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudiés les processus périodiquement et presque périodiquement corrélés. Une attention particulière a été accordée à la représentation spectrale de tels processus. Un résultat de stabilité dans l'étude d'un modèle AR(1) est aussi présenté. Cette étude n'est qu'un premier pas vers la clarification d'un modèle autorégressif périodique et presque périodique particulier.

Pour conclure, nous donnons quelques suggestions et développements futurs possibles en vue d'améliorer et d'étendre notre étude. Ces développements concernent essentiellement les points suivants :

1. Des études récentes sur l'estimation de paramètres des processus PC et PPC ont été récemment effectuées afin de résoudre des problèmes de détection et d'identification [38], [47]. La théorie de la prévision des processus stationnaires est bien établie. Le cas des processus périodiquement corrélés a donné lieu à quelques travaux sous la contrainte de connaître exactement la période [5]. Les méthodes employées ne sont pas directement applicables dans un cadre plus général en particulier lorsque la période est inconnue. Il serait donc intéressant d'étudier le problème de prévision dans le cadre d'un processus presque périodiquement corrélé (modèles ARMA presque-périodique) ou d'un processus périodique de période inconnue.
2. Quelques problèmes d'estimations relatifs à la cyclostationnarité et presque périodicité.
3. Au vu les résultats théoriques présentés dans ce mémoire, il semble opportun voire nécessaire de tester le modèle étudié sur des données simulées d'une part puis sur un ensemble de données réelles.
4. Généralisation de notre étude à des modèles plus généraux.

# Bibliographie


[1] N. I. Akheizer and I. M. Glazman, *Theory of Linear Operators in Hilbert Space*, Dover publication, New York, 1993.

[2] L. Amerio and G.Prouse, *Almost periodic functions and differential equations*, Van, Nostrand-Reinhold co., 1971.

[3] F.Bedouhene, O. Mellah, P. Raynaud De Fitte, *Bochner-Almost periodicity for stochastic processes*, Stochastic analysis and applications, 30 :2, 322-342, 2012.

[4] W. R. Bennett, *Statistics of regenerative digital transmission*, Bell Syst Tech. J., 37, pp. 1501-1542, 1958.

[5] M. Bentarzi, *Model-Building Problem of Periodically Correlated m-Variate Moving Average Processes*, J. Multivariate Anal. 66 1-21, 1998.

[6] J. P. Bertrandias, *Espace de fonctions bornées et continues en moyenne asymptôtique d'ordre p*, Bull. Soc. Math. de France, 1966.

[7] A. S. Besicovitch, *Almost periodic functions,* Dover publications, New York, 1948.

[8] P. H. Bezandry, Toka Diagana, *Almost Periodic Stochastic Processes*, Springer (october 2010).

[9] S. Bochner, *Beutrage zur theorie der fastperiodische functionen I*, functionen einer variablen, Math. Ann. 96, 1927.

[10] S. Bochner, *Abstrakte fastperiodische Funktionen*, Acta Mathematica, vol. 61, pp. 149-184, 1933.

[11] S. Bochner, *A new approch to almost periodicity*, Proc. Nat. Acad. Sci USA 48, 2039-2043, 1962.

[12] H. Bohr, *Zur Theorie der fast periodischen Funktionen. I. Eine Verallgemeinerung der Theorie der Fourierreihen*, Acta math., 45, pp. 29-127, 1925.

[13] H. Bohr, *Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen, II, Zusammenhang der fastperiodischen funkionen mit funktionen von unendlich vielen variablen ; gleichmässing approximation durch trigonometriche summen*, Acta Math., 46 pp. 110-214, 1925.

[14] H. Bohr, *Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. III. Dirichletentwicklung analytischer Funktionen*, Acta math., v. 47, pp. 237-281, 1926.

[15] G. N. Boshnakov, *Periodically correlated solutions to a class of stochastic difference equations*, In : Csiszr, I., Michaletzky, G. Y. (Eds.), Stochastic Differential and Difference Equations. Birkhauser, Basel, pp. 1–9, 1997.

[16] N. Boyden, *Eléments de théorie des processus stochastiques et d'analyse harmonique*, Mémoire de Master 2, Université de Rouen, 2011.

[17] P.J. Brockwell and R. A. Davis, *Time series : theory and methods*, Springer Series in Statistics, Second Edition, November, 1990.

[18] E. Broszkiewieicz-Suwaj, A. Makagon, R. Weron, A. Wylomanska, *On detecting and modeling periodic correlation in financial data*, Physica A 336, pp. 196 – 205, 2004.

[19] S. Cambanis, C. Houdré, H. Hurd, J. Leskow, *Laws of large numbers for periodically and almost periodically correlated processes*, Stochastic Processes and their Applications 53, 37-54, 1994.

[20] C. Corduneanu, *Almost Periodic Functions*, Chelsea, New York 1989.

[21] C. Corduneanu, *Almost Periodic Oscillations and Waves*, Springer 2009.

[22] H. Cramér, *On some classes of nonstationary stochastic processes*, Proc. Fourth Berkeley Symp. Math. Stat. Prob., 2, pp. 55-77, 1961.

[23] D. Dehay and R. MochC, *Trace measures of a positive definite bimeasure*, J. Multivariate Anal., 40, pp. 115-131, 1992.

[24] D. Dehay, *Spectral analysis of the covariance of the almost periodically correlated processes*, Stoch. Proc. Appl., 50, pp. 315-330, 1994.

[25] D. Dehay and V. Monsan, *Random sampling estimation for almost periodically correlated processes*, J. Time Ser. Anal. 17 (5), pp. 425-445, 1996).

[26] D. Dehay and H. L. Hurd, *Spectral estimation for strongly periodically correlated random fields defined on* $\mathbb{R}^2$, Math. Methods Stat., 11, No. 2, pp. 135-151, 2002.

[27] D. Dehay, V. Monsan, *Discrete periodic sampling with jitter and almost periodically correlated processes*, Statistical Inference for Stochastic Processes 10, pp 223-253, 2007.

[28] K. Fan, Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques d'une variable entière et leur application à l'étude de l'itération des transformations continues, Math. Z. 48, pp 685-711, 1943.

[29] A. M. Fink, *Almost Periodic Differential Equations*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 377, Springer Verlag, New York, 1974.

[30] P. A. Fuhrmann, *Linear systems and operators in Hilbert space*, McGraw-Hill 1981.

[31] W. A. Gardner and L. E. Franks, *Characterization of cyclostationary random signal processes*, IEEE Trans. Inf. Theory, IT-21, pp. 4-14, 1975.

[32] W. A. Gardner, *Introduction to Random Processes with Application to Signals and Systems*, Macmillan, New York, 1985.

[33] W. A. Gardner, *Statistical Spectral Analysis : A Nonprobabilistic Theory*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.

[34] W. A. Gardner, *Signal interception : a unifying theoretical framework for feature detection*, IEEE Trans. Commun., COM-36, pp. 897-906, 1988.

[35] W. A. Gardner, *Two alternative philosophies for estimation of the parameters of time-series*, IEEE Trans. Inf. Theory, 37, pp. 216-218, 1991.

[36] 70. W. A. Gardner, *Exploiting spectral redundancy in cyclostationary signals*, IEEE ASSP Mag., 8, pp. 14-36, 1991.

[37] W. A. Gardner and C. M. Spooner, *Signal interception : performance advantages of cyclic feature detectors*, IEEE Truns. Commun., COM-40, pp. 149-159, 1992.

[38] W. A Gardner and A. Napolitano, L. Paura, *Cyclostationarity : Half a century of Research*, Signal Processing 86, pp. 639-697, 2006.

[39] D. Giraudo, *Fonctions presques périodiques*, Mémoire de Master 1, Université de Rouen, 2011.

[40] E. G. Gladyshev, *Periodically correlated random sequences,* Sow. Math., 2, pp. 385-388, 1961.

[41] E. G. Gladyshev, *Periodically and almost periodically correlated random processes with continuous time parameter*, Theory Probab. Appl., 8, pp. 173-177, 1963.

[42] P. R. Halmos, *Introduction to Hilbert Space*, Chelsea Publishing Company, Kew York, 1957.

[43] Y. Han, J. Hong, *Almost periodic random sequences in probability*, J. Math. Anal. Appl. 336, pp. 962-974, 2007.

[44] J. P. Huang, H. R. Cho, G.R North, *Application of the Spectral Analysis of the Surface Temperature Fluctuations in a Stochastic Climate Model and a GCM Simulation*, Atmosphere-Ocean 34 (4), pp. 627-646, 1996.

[45] H. L. Hurd, A. Russek and D. Surgailis, *Note on almost periodic distributed processes*, unpublished manuscript, 1992.

[46] H. L. Hurd , A. Makagon, A. G. Miamee. *On AR(1) models with periodic and almost periodic coefficients*, Stochastic Processes and their Applications 100, pp. 167-185, 2002.

[47] H. L. Hurd and A. G. Miamee, *Periodically correlated random sequences, Spectral Theory and Practice*, Wiley-Interscience, 2007.

[48] H. L. Hurd, *Representation of strongly harmonizable periodically correlated processes and their covariances*, J. Multivariate Anal., 29, pp. 53-67, 1989.

[49] H. L. Hurd, *Almost periodically unitary stochastic processes*, Stochastic Processes and their Applications 43, pp. 99-113, 1992.

[50] B. M. Levitan and V. V. Zhikov, *Almost periodic functions and differential equations.* Cambridge University press, 1983.

[51] M. Loève, *Fonctions Aléatoires du Second Ordre*, in P. Lévy's Processus Stochastiques et Mouvement Brownien, pp. 228-252 Gauthier-Villars, Paris, 1948.

[52] W. Maak : *fastperiodische Funktionen,* Springer verlag, New York, 1967.

[53] A. Makagon, A. Miamee and H. Salehi, *Continuous time periodically correlated processes ( spectrum and prediction)*, Stochastic Process. Appl. 49, 277-295, 1994.

[54] M. Métivier, *Notions fondamentales de la théorie des probabilités*, deuxième édition, Dunod, Paris, 1972.

[55] A. G. Miamee and H. Salehi, *Harmonizability V-boundedness and stationary dilation of stochastic processes*, Indiana Univ. Math. J., 27, pp. 37-50, 1978.

[56] T. Morozan and C. Tudor, *Almost periodic solutions of affine Itô equation*, Stoch. Anal. Appl. 7(4), pp. 451-474, 1989.

[57] E. Moulines et François Roueff, *Analyse des Séries Temporelles et Applications*, Télécom. Paris-Tech. , 15 septembre 2010.

[58] A. Muchnik , A. Semenov and M. Ushakov, *Almost periodic sequences*, Theoretical Computer Science 304, pp. 1-33, 2003.

[59] H. Ogura, *Spectral Representation of periodic nonstationary random processes*, IEEE Trans. Inf. Theory, IT-17, pp. 143-149, 1971.

[60] O. Onicescu and V. Istrate̍scu, *Approximation theorems for random functions*, Rendiconti di mathematica, Roma, 8, pp. 65-81, 1975.

[61] A. Precupanu, *On the almost periodic in probability,* Rendiconti di mathematca ed applicaziono, series VII, 2 , pp. 613-626, 1982.

[62] M. Pagano, *On periodic and multiple autoregressions*, Ann. Statist. 6, pp. 1310–1317, 1978.

[63] E. Pardoux, *Processus de Markov et application.*

[64] G. Da Prato and C. Tudor, *Periodic and Almost Periodic Solutions for Semilinear Stochastic Evolution Equations*, Stoch. Anal. Appl. 13(1), pp. 13-33, 1995.

[65] H. Radjavi and P. Rosenthal, *Invariant Subspaces*, Springer-Verlag, New York, 1973.

[66] Y. A. Rozanov, *Spectral analysis of abstract functions*, Theory Probab. Appl., 4, pp.271-287, 1959.

[67] H. Sakai, *On the spectral density matrix of a periodic ARMA process.* J. Time Ser. Anal. 12 (1), 73–82, 1991.

[68] E. Serpedin, F. Panduru, I. Sari, G. B. Giannakis, *Bibliography on cyclostationarity*, Signal Processing 85, pp. 2233–2303, 2005.

[69] C. C. A. Spencer, P. Deloukas, S. Hunt, J. Mullikin, S. Myers, B. Silverman, P. Donnelly, D. Bentley, G. McVean, *The influence of recombination on Human Genetic Diversity*, PLoS Genetics 2(9), pp. 1375-1385, 2006.

[70] W. Stepanov, *Ueber einige verallgemeinerungen der fastperiodischen functionen.* Math. Ann., 95, pp. 473-498, 1926.

[71] C. Tudor, *Almost periodic solutions of affine stochastic evolution equations.* Stochastics and Stochastic Reports 38, pp .251-266, 1992.

[72] C. Tudor, *Almost periodic stochastic processes. Qualitative problems for differential equations and control theory*, World Sci. Publ., River Edge, NJ, pp. 289-300, 1995.

[73] A. Walther, *Fastperiosche Folgen und ihre Fouriersche Analyse*, Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna, 2, 1928.

[74] A. M. Yaglom, *Correlation theory of stationary and related random functions*, Springer-Verlag, New-York, 1987.

[75] T. Yoshizawa, *Stability theory and the existence of periodic solutions and almost periodic solutions*, Springer, New-york, 1975.

[76] R. Yuan, J. Hong, *The existence of almost periodic solutions for a class of differential equations with piecewise constant argument*, Nonlinear Anal. 28, pp. 1439-1450, 1997.

[77] C. Zhang, *Almost Periodic Type Functions and Ergodicity*, Science Press, Beijing, 2003.

[78] S. Zaidman, *Almost periodic functions in abstract spaces*, Pitman publishing, 1985.