MINISTERE DE l'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE DE MASTER 2

SPÉCIALITÉ: MATHEMATIQUES

OPTION: RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

Présenté par:

MEDRAR LYNDA
SIFAOUI THIZIRI

Sujet:

Optimisation semi infinie.

Devant le jury composé de:

M. Aouane **Président**

M. Ouanes **Rapporteur**

M.Bouarab **Examinateur**

-Soutenue le: 12 / Juillet/2015

Remerciements

*Notre premiers remerciements pour le Dieu, le tout puissant qui nous a donné la santé, le courage et la volonté pour réaliser ce travail.

*Nous remercions également nos familles pour tous les sacrifices qu'elles ont fait pour nous.

*Nos remerciements vont aussi à notre encadreur: Mr "OUANES" pour avoir accepté de nous encadrer.

*Nos remerciements s'adresse aussi à tout les enseignants qui ont contribué à notre formation.

*Nous remercions aussi tous nos amis pour leur aide, leur patience, leur compréhension et leur encouragement.

Table des matières

Introduction générale

L'optimisation est une branche des mathématiques et de l'informatique en tant que disciplines, cherchant à modéliser, à analyser et à résoudre analytiquement ou numériquement les problèmes qui consistent à déterminer quelles sont la ou les solution(s) satisfaisant un objectif quantitatif(le profit, le temps, l'energie potentielle,...etc) tout en respectant d'eventuelles contraintes.

L'optimisation joue un rôle pertinent en recherche opérationnelle, dans les mathématiques appliquées, en analyse et analyse numérique , en statistiques , en théorie du contrôle et de la commande, et dans l'analyse des systèmes physiques.

Aujourd'hui, tous les systèmes succeptibles d'être décrits par un modèle mathématique sont optimisés. La qualité des résultats et des prédictions dépendent de la pertinence du modèle, de l'éfficacité de l'algorithme et des moyens pour le traitement numérique.

Pour les domaines d'application: ils sont extrêmement variés: optimisation d'un trajet, de la forme d'un objet, d'un prix de vente, d'une réaction chimique, du contrôl aérien, du rendement d'un appareil, du fonctionnement d'un moteur, de la gestion des lignes ferroviaires, du choix des investissements économiques,etc...

L'optimisation de ces systèmes permet de trouver une configuration idéale, d'obtenir un gains d'effort, de temps, d'argent, d'energie, de matière première, ou encore de satisfaction. Ces quelques exemples attestent de la variété des formulations et préfigure la diversité des outils mathématiques succeptibles et résoudre ces systèmes.

Il est important de bien connaitre les caractéristiques de problème posé, afin d'identifier la technique appropriée pour sa résolution.

L'optimisation est découpée en sous disciplines qui se chevauchent, suivant les caractéristiques mathématiques de la fonction objectif et celles des contraintes et des variables d'optimisation.

Les classes d'optimisation les plus importantes sont:
.Optimisation monovariable: une seule variable.
.Optimisation multivariable: plus d'une variable.
.Optimisation continue: variables réelles.
.Optimisation combinatoire: variables réelles et entières.
.Optimisation linéaire: la fonction objectif et les contraintes sont linéaires.
.Optimisation quadratique: fonction objectif quadratique.
.Optimisation non linéaire: l'objectif ou les contraintes(ou les deux) contiennent des parties non linéaires.
.Optimisation stochastique: on étudie le cas dans lequel certaines des contraintes dépendant de variables aléatoires, en optimisation robuste, les aléas sont supposés être situé dans des intervalles autour de position nominales et on cherche à optimiser le système soumis à de tel aléas, dans le pire des cas.
.Optimisation sans contraintes.
.Optimisation avec contraintes.

Parmi ces problèmes avec containtes , il y a ceux qui ont une infinité de containtes , ces problèmes sont appelés problèmes semi infinis.

Bien que l'origine de problème semi infini est lié à l'approximation de Chebyshev, le travail classique de Haar sur des systèmes semi infinis linéaires, et de Fritz John.

Le terme de PSI a été inventé en 1962 par Charnes, Hettich et Cooper Kortanek dans certaines articles consacrés à des problèmes semi infinis.

Notre modeste travail s'inscrit dans le cadre des problème semi infinis qui possèdent une certaine particularité de structure soit pour la fonction objectif, soit pour les contraintes.

Les différents chapitres de ce travail sont:
.Chapitre1: Rappels sur la programmation linéaire, la convexité et sa relation avec l'optimisation.
.Chapitre 2: Sera consacré à l'optimisation semi infinie linéaire et les méthodes de résolution.
.Chapitre 3: sera consacré dans la première partie à l'optimisation semi infinie non linéaire et nous présentons la méthode de lagrange pour la résolution de ce problème, la deuxième partie sera consacré à l'optimisation semi infinie convexe.
.Chapitre 4: nous présentons quelques application de l'optimisation semi infinie.
Nous terminons notre travail avec une conclusion.

Chapitre 1

Généralités

1.1 Programmation linéaire

La programmation linéaire fait partie des techniques quantitatives d'aide à la décision: c'est un ensemble d'outils mathématiques et informatiques facilitant la formulation et la résolution d'un grand nombre de problèmes de gestion de la production(par exemple: la maximisation d'un bénéfice de production ou la minimisation d'une perte), de transport, d'affectation...etc.

1.1.1 La forme standard d'un problème de programmation linéaire

Soit le programme linéaire:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{j=n} c_j x_j \longmapsto (\min) \\ \\ \sum_{j=1}^{j=n} t_{ij} x_j \geq d_i, \qquad i = 1,....,m \\ \\ x_j \geq 0, \qquad j = 1,.....,n \end{cases}$$

Pour la résolution d'un problème pratique il faut suivre les étapes suivantes:
1) La modélisation mathématique du problème sous forme d'un problème de programmation linéaire.
2) La formulation du problème.

3) La résolution du problème théorique par les algorithmes.
4) La détermination de la solution réelle.
5) La vérification de la validité de la solution.

1.1.2 Exemple d'un problème de programmation linéaire

Une usine fabrique 2 produits P_1 et P_2 nécéssitant des ressources d'équipement, de main d'oeuvre et de matières premières disponibles en quantité limitée.

	p_1	p_2	disponibilité
equipement	3	9	81
main d'oeuvre	4	5	55
matière première	2	1	20

P_1 et P_2 rapportent à la vente 6 euros et 4 euros par unité.
Quelle quantités(non entières) de produits P_1 et P_2 doit produire l'usine pour maximiser le bénéfice total venant de la vente des 2 produits?

Variables: soit x_1 et x_2 sont des quantités des produits P_1 et P_2 fabriqués $(x_1,x_2 \in \mathbb{R})$
Fonction objectif à maximiser :
La fonction objectif f correspond au bénéfice total: $f(x_1,x_2) = 6x_1 + 4x_2$.
On cherche donc:

$$\max_{(x_1,x_2)} [f(x_1,x_2) = 6x_1 + 4x_2]$$

Contraintes: Disponibilité de chacune des ressources:
1)$3x_1 + 9x_2 \leq 81$
2)$4x_1 + 5x_2 \leq 55$
3)$2x_1 + x_2 \leq 20$

En résumé: le problème de production se modélise sous la forme d'un programme linéaire:

$$\max_{(x_1,x_2)} [f(x_1,x_2) = 6x_1 + 4x_2]$$

Sous les contraintes:

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \leq 81. \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 55. \\ 2x_1 + x_2 \leq 20. \\ x_1,x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.2 Définitions et propriétés

Les problèmes dont les données sont convexes, constituent une classe importante en optimisation, car fréquemment rencontrés dans les applications et à la base de nombreuses méthodes développées pour des problèmes plus généraux.

Définition :
Une partie $F \subset \mathbb{R}^n$ est dite fermée si son complémentaire dans $\mathbb{R}^n$est ouvert.

Remarque:
$\mathbb{R}^n$ et $\varnothing$ sont ouverts et fermés en même temps.

Définition :
Un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ est dit borné si: $\forall P \in S$, $\exists M > 0$ tel que: $||P|| \leq M$.

Définition:
Un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ est dit compact s'il est fermé et borné en même temps.

Définition:

Un ensemble K est convexe si: $\forall x,y \in K$, $\forall \lambda \in [0,1]$

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in K$$

Autrement dit, toute combinaison convexe d'éléments de K est dans K.

Exemple:

$\forall x_i \in K$, $\forall \lambda_i \geq 0$, $i = \overline{1,n}$, avec:

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, alors: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in K$

Définition:

On appelle combinaison linéaire convexe de n vecteurs $(x_1,...,x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ la somme:

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n$, avec:

$\alpha_i \geq 0$, $i = 1,...,n$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Définition:

On appelle enveloppe convexe d'un ensemble S le plus petit ensemble convexe contenant S et on le note conv(S).

Remarque:

Si S est convexe alors: $conv(S) = S$.

Définition:

On définit un sommet de S ou bien un point extrême $x \in S$ si x ne peut pas s'écrire comme combinaison convexe de deux points de S.

Définition:
Soit $a = (a_1,...,a_n) \in \mathbb{R}^n$ alors l'ensemble $H = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad ax = \beta\}$ est appelé un Hyperplan de $\mathbb{R}^n$.

Remarque:
L'hyperplan est un ensemble convexe.

Définition:
Soient $a = (a_1,...,a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\beta \in \mathbb{R}$ on appelle:
.Demi espace positif fermé: l'ensemble $H_+ = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad ax \geq \beta\}$.
.Demi espace négatif fermé: l'ensemble $H_- = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad ax \leq \beta\}$.
.Demi espace positif ouvert: l'ensemble ${H_+}^0 = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad ax > \beta\}$.
.Demi espace négatif ouvert: l'ensemble ${H_-}^0 = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad ax < \beta\}$.

Définition:
L'intersection d'un nombre fini de demi-espace fermé de $\mathbb{R}^n$ est appelé polytope convexe.

Définition:
On appelle polyèdre un polytope convexe borné (compact de $\mathbb{R}^n$).

Remarque:
Chaque contrainte d'un problème de programmation linéaire définit un demi-espace fermé et l'ensemble des contraintes définit un polytope convexe.

Définition:
Soit $f : K \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, K convexe.
f est dit convexe si:

$$\forall x,y \in K, \qquad \forall \lambda \in [0,1], \qquad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Définition:
f est dit concave si $(-f)$ est convexe.

Remarque:
les fonctions lineaires sont convexes et concaves en même temps.

Résultats:
1/ f est de classe c^1, f est convexe ssi:
$f(x) \geq f(y) + (x-y)^T \nabla f(y)$, $\forall x,y \in K$.
2/ f de classe c^2, f est convexe sur $\mathbb{R}^n$ ssi:
sa matrice Hessienne est semi définie positif sur $\mathbb{R}^n$.

Chapitre 2

L'optimisation Semi infinie linéaire

2.1 Introduction

Un problème semi infini est un problème d'optimisation dans lequel un nombre fini de variables apparaissent dans un nombre infini de contraintes ou inversement.
Ce modèle se pose dans plusieurs applications dans différents domaines des mathématiques, de l'économie et l'ingénierie.
Citons un exemple dans notre vie quotidienne: la réduction de la pollution atmosphérique.
Ils existent plusieurs recherches consacré à ce domaine mais il reste toujours que l'approximation de Chebyshev est l'origine de ce problème.

2.2 Formulation d'un problème semi infini

Un problème semi infini est définit par:

$$(P) \Longrightarrow \begin{cases} f(x) \longmapsto \min \\ g(x,s) \geq b(s), \qquad \forall s \in S \\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

S: est un compact de $\mathbb{R}^m$.
f: $\mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$
$g(x,s)$: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longmapsto \mathbb{R}$

b: $\mathbb{R}^m \longmapsto \mathbb{R}$

Remarques:

1) On dit qu'un problème semi infini est linéaire si f et g sont linéaires par rapport à x.

2) On dit qu'un problème semi infini est convexe si f est convexe par rapport à x et g est concave par rapport à x.

3) On dit qu'un problème semi infini est non linéaire dans tous les autres cas.

2.3 Problème semi infini linéaire

On considère le problème semi infini linéaire suivant:

$$(P) \Longrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n} c_i x_i \longmapsto \min \\ \\ \sum_{i=1}^{i=n} a_i(s) x_i \geq b(s), \qquad \forall s \in S, \qquad i = 1, \ldots\ldots n. \\ \\ x_i \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$c_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, \ldots\ldots n$.

S: est un compact de $\mathbb{R}^m$.

$a_i(s)$: $\mathbb{R}^m \longmapsto \mathbb{R}$

b: $\mathbb{R}^m \longmapsto \mathbb{R}$

a_i et b sont de classe C^2

2.4 Exemple pratique d'un problème semi-infini linéaire

2.4.1 Position de problème

S représente une région; $a_i(s)$, $i = 1, \ldots\ldots, n$ représente des sources de pollution (moyens du transport par exemple).

y_i: représente la fonction de réduction de la pollution de la source a_i.
R_i: réduction de la pollution émise par la source a_i.
P_i: pollution totale émise par la source a_i alors:

$$y_i = \frac{R_i}{P_i}$$

$b(s)$: représente le seuil de la pollution toléré.
On veut que la pollution dans l'air ne dépasse pas $b(s)$ en point s quelconque.

2.4.2 Modélisation du problème

c_i: le cout de la réduction associé à a_i.
$\sum_{i=1}^{i=n} a_i(s)$: la pollution totale avant la réduction.
$\sum_{i=1}^{i=n} a_i(s)y_i$: la réduction totale de la pollution.
On veut minimiser le cout total de cette opération.
Le problème s'écrit comme suit:

$$(P) \Longrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n} c_i y_i \longmapsto \min \\ \\ \sum_{i=1}^{i=n} a_i(s) - \sum_{i=1}^{i=n} a_i(s)y_i \leq b(s), \qquad \forall s \in S. \\ \\ y_i \geq 0. \end{cases}$$

2.5 Problème dual d'un problème de programmation semi infinie linéaire

Soit le problème primal suivant:

$$(P) \Longrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n} c_i y_i \longmapsto \min \\ \\ \sum_{i=1}^{i=n} a_i(s)y_i \geq b(s), \qquad \forall s \in S. \\ \\ y_i \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Soit $\delta = \{s_1,........,s_n\}$ un sous ensemble de S.
Le problème dual correspendant au problème primal(P) est le suivant:

$$(D) \Longrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{j=n} b(s_j)x_j \longmapsto \max \\ \\ \sum_{j=1}^{j=n} a_i(s_j)x_j = c_i, \qquad i = 1,.......,n \\ \\ s_j \in S, \qquad x_j \geq 0, \qquad j = 1,......,n \end{cases}$$

$\{\delta,x\}$: une solution réalisable du problème (D) ou:
$\delta = \{s_1,.............,s_n\} \subset S$.
$X = (x_1,...............,x_n) \in \mathbb{R}$.
On pose:
$C = (c_1,...........,c_n)^T$
$a(s_j) = (a_1(s_j),............a_n(s_j))^T \in \mathbb{R}^n$, $j = 1,........,n$
Le problème (D) s'écrit comme suit:

$$(D) \Longrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{j=n} b(s_j)x_j \longmapsto \max \\ \\ \sum_{j=1}^{j=n} a(s_j)x_j = c,\delta = \{s_1,.............,s_n\} \subset S \\ \\ X = (x_1,...............,x_n)^T \geq 0 \end{cases}$$

2.5.1 Solution de base

$\{\delta,x\}$ une solution de base pour le problème (D) est dite de base si les vecteurs:
$(a(s_1),............a(s_n))$ sont linéairement indépendants.

2.5.2 Ensemble de base

Le sous ensemble $\{s_1,.............,s_n\}$ de S qui correspond à la solution de base $\{\delta,x\}$ est appellé ensemble de base.

2.5.3 Matrice de base

Soit $A_{n\times n}$ une matrice définit comme suit:

$$\mathbf{A}(\mathbf{s_1},.......,\mathbf{s_n}) = \begin{pmatrix} a_1(s_1) & \dots & a_1(s_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n(s_1) & \dots & a_n(s_n) \end{pmatrix}$$

Dans le cas ou $\{\delta,x\}$ une solution de (D), on dit que la matrice $A(s_1,.......,s_n)$ est de base, rang $A = n$

Le système d'équation: $A(s_1,.......,s_n)x = C$ a une solution unique qui est: $x = A(s_1,.......,s_n)^{-1} \times C$, $x \geq 0$.

2.5.4 Existence d'une solution de base optimale pour le problème dual

Proposition 1[5]

Parmi les vecteurs $a(s)$, $s \in S$, il y a un sous ensemble de vecteurs n qui sont linéairement indépendants.

Proposition 2:[5]
Si (D) est soluble, alors il existe une solution $\{s_j,x_j\}$ telle que: $q \leq n$ et $x_j > 0$,$j = 1,.......,q$, et les vecteurs: $(a(s_1),............a(s_q))$ sont linéairement indépendants.

Théorème 2.1. [5] *(Existence d'une solution de base optimale):*
Si (D) est soluble alors il existe toujours parmi ses solutions une qui est de base.

Théorème 2.2. [5] *Les solutions $\{\delta,x\}$ et y sont optimales pour (D) et (P) respectivement si et seulement si:*

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i(s)y_i \geq b(s), \qquad s \in S \tag{2.1}$$

$$\sum_{j=1}^{j=n} a_i(s_j)x_j = c_i, \qquad i = 1,.......n \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} y_j(\sum_{j=1}^{j=n} a_i(s_j)x_j - c_i) = 0, \qquad i = 1,......,n \\ \\ x_j(\sum_{i=1}^{i=n} a_i(s_j)y_i - b(s_j)) = 0, \qquad j = 1,......,n \end{cases} \tag{2.3}$$

Remarque:
Les équations (2,3) sont appelées les relations des écarts complémentaires. Donc: si on a une solution $\{\delta,x\}$ de (D), la solution y de (P) sera trouvée par les relations des écarts complémentaires, de même si on a une solution y de (P), la solution $\{\delta,x\}$ de (D) sera trouvée.

2.6 Résolution d'un problème semi infini linéaire par la discrétisation

2.6.1 Introduction

La discrétisation consiste à utiliser une règle pour trouver à partir d'un ensemble infini de points un sous ensemble fini de point et ensuite résoudre le problème avec les méthodes déja connus(comme la méthode de simplexe si on a un problème linéaire).
A la fin de l'opération on aura une suite de solutions qui se converge vers la solution optimale.

2.6.2 Formulation d'un problème semi infini discrétisé

Soit le problème semi infini linéaire suivant:

$$(P) \Longrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n} c_i y_i \longmapsto \min \\ \sum_{i=1}^{i=n} a_i(s) y_i \geq b(s), \qquad s \in S \\ y \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2.4}$$

Le problème discrétisé de (P) est:

$$(P_m) \Longrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n} c_i y_i \longmapsto \min \\ \sum_{i=1}^{i=n} a_i(s_j) y_i \geq b(s_j), \qquad s_j \in S_m \\ y \in \mathbb{R}^n, S_m = \{s_1, \ldots\ldots\ldots, s_m\} \subset S. \end{cases} \tag{2.5}$$

2.6.3 Principe de la méthode

Il s'agit de résoudre le problème discrétisé à chaque itération.
La résolution du problème linéaire discrétisé se fait avec la méthode de simplexe qu'on va expliquer plus tard.
Soit $y^m = (y_1^m, y_2^m, \dots\dots\dots y_n^m)$: la solution de (P_m).
Posons:
$D = \{y \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{i=n} a_i(s)y_i \geq b(s), s \in S\}$.
$D_m = \{y \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{i=n} a_i(s_j)y_i \geq b(s_j), s_j \in S_m\}$
$D \subset D_m$ du faite que: $S_m \subset S$.

2.6.4 Test d'optimalité

Calculons:

$$\min_{s \in S}[\sum_{i=1}^{i=n} a_i(s)y_i^m - b(s)].$$

On distingue deux cas:
Le premier cas:
Si:

$$\min_{s \in S}[\sum_{i=1}^{i=n} a_i(s)y_i^m - b(s)] \geq 0$$

Donc $y^m \in D$.
Notons par $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots\dots\dots y_n^*)$: la solution optimale de (P), on a alors:

$$\sum_{i=1}^{i=n} c_i y_i^* \leq \sum_{i=1}^{i=n} c_i y_i^m \tag{2.6}$$

Et d'autres part,on a $D \subset D_m$,alors:

$$\sum_{i=1}^{i=n} c_i y_i^m \leq \sum_{i=1}^{i=n} c_i y_i^* \tag{2.7}$$

D'aprés les deux dernières équations, on a y^m est la solution optimale du problème linéaire discrétisé.

Deuxième cas:

Si:

$$\min_{s \in S} [\sum_{i=1}^{i=n} a_i(s) y_i^m - b(s)] < 0.$$

alors y^m n'est pas dans D.

On doit trouver une autre solution pour le problème linéaire discrétisé qui sera réalisable et optimale.

Trouvons $s' \in S$ tel que:

$$\min_{s \in S} [a(s)^T y^m - b(s)] = [a(s')^T y^m - b(s')]$$

Posons:

$S_{m+1} = S_m \cup \{s'\}$, s' n'est pas dans S_m, et on passe à l'itération suivante:$(m+1)$.

On aura le problème discrétisé suivant:

$$(P_{m+1}) \Longrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n} c_i y_i \longmapsto \min \\ \\ \sum_{i=1}^{i=n} a_i(s_j) y_i \geq b(s_j), \qquad s_j \in S_{m+1} \\ \\ y \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2.8}$$

Soit l'ensemble :

$D_{m+1} = \{y \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{i=n} a_i(s_j) y_i \geq b(s_j), s_j \in S_{m+1}\}$

On a bien: $S_m \subset S_{m+1} \subset S$ et ainsi: $D \subset D_{m+1}$,$\forall m$, et soit: $y^{m+1} = (y_1^{m+1}, y_2^{m+1}, \ldots\ldots.. y_n^{m+1})$ la solution du problème (P_{m+1}).

On répète le même raisonnement pour vérifier l'optimalité de y^{m+1} pour le problème linéaire discrétisé jusqu'a l'obtention de la solution y^* du problème linéaire discrétisé.

Théorème 2.3. [13] *Soit* $(y^m)_m$ *la suite des solutions des problèmes discrétisés:* $P_1,..........P_m$.
Avec:$S_1 \subset S_2 \subset .... \subset S$ *du problème primal.*
La suite $(y^m)_m$ *va converger vers la solution optimale* y^* *du problème primal:*

$$\lim_{m\to\infty} (y^m) = y^*$$

2.6.5 Algorithme de résolution d'un problème semi infini linéaire par la discrétisation

Le cas: $S = [0,1]$:
1-Posons: $m = 1$.
2-Définir le sous ensemble fini S_m de S avec

$$S_m = \{\frac{j-1}{m-1}, j = 1,.....m\}$$

3-Résoudre le problème linéaire discrétisé:

$$(P) \Longrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n} c_i y_i \longmapsto \min \\ \sum_{i=1}^{i=n} a_i(s_j) y_i \geq b(s_j), \qquad s_j \in S_m \\ y \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

4-Calculer:

$$L^k = \min_{s\in S}[\sum_{i=1}^{i=n} a_i(s) y_i^m - b(s)]$$

$$L^k = \min_{s\in S}[\sum_{i=1}^{i=n} a_i(s_k) y_i^m - b(s_k)]$$

5-Si:$L^k \geq 0$, aller vers 6, sinon aller vers 7.
6-Ecrire: y^m est la solution optimale de (P), aller vers 8.
7-Posons: $m = m + 1$, posons $S_{m+1} = S_m \cup \{s_k\}$, aller vers 3.
8-Fin.

2.6.6 Exemple numérique

Soit le problème semi infini linéaire suivant:

$$(P) \Longrightarrow \begin{cases} 3y + 3 \longmapsto \min \\ \\ 2y + s \geq 1, \qquad s \in [0,1] \\ \\ y \geq 0. \end{cases}$$

1) On pose: $s_1 = 1$:
2) Le problème discrétisé correspondant est le suivant:

$$(P_1) \Longrightarrow \begin{cases} 3y + 3 \longmapsto \min \\ \\ y \geq 0. \end{cases}$$

3) La solution de ce problème est: $y^1 = 0$.
4) On a:
$\min_{s\in[0,1]}[2y^1 + s - 1] = \min_{s\in[0,1]}[(2*0) + s - 1] = \min_{s\in[0,1]}[s - 1] = -1 < 0$
Donc: le test d'arrêt n'est pas vérifié, c'est à dire que: y^1 n'est pas une solution pour (P).
5) On passe à l'étape suivante:
Puisque on a: $\min_{s\in[0,1]}[s - 1] = -1$; alors: $s^{'} = 0$.
6) Posons: $s_2 = s_1 \cup s^{'} = \{0,1\}$.
Le problème discrétisé correspondant est:

$$(P_2) \Longrightarrow \begin{cases} 3y + 3 \longmapsto \min \\ \\ 2y + s \geq 1, s \in \{0,1\} \end{cases}$$

Donc:

$$(P_2) \Longrightarrow \begin{cases} 3y + 3 \longmapsto \min \\ \\ y \geq \frac{1}{2} \\ \\ y \geq 0. \end{cases}$$

La solution de (P_2) est: $y^2 = \frac{1}{2}$
On a: $\min_{s\in[0,1]}[(y^2+s)-1] = \min_{s\in[0,1]}[(2*\frac{1}{2})+s-1] = \min_{s\in[0,1]}[1+s-1] = \min_{s\in[0,1]}[s] = 0$
Comme: $\min_{s\in[0,1]}[s] = 0 \geq 0$, donc: le test d'arrêt est vérifié.
Conclusion: y^2 est la solution optimale du problème (P), donc: $y^* = \frac{1}{2}$

2.6.7 L'algorithme de simplexe

Soit l'ensemble de base $\delta = \{s_1,...........,s_n\} \subset S$ donné.
On cherche à déterminer un ensemble de base $\delta^{'} \subset S$ en suivant les étapes définit comme suit:

Etape 1:
Calculer la solution unique positive du système d'équations linéaires suivantes:
$A(s_1,.......,s_n)x = C.$

Etape 2:
Calculer l'unique solution du système:
$A^T(s_1,.......,s_n)y = b(s_1,.......,s_n).$
Soit y la solution trouvée, on distingue deux cas:

Cas 1:

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i(s)y_i \geq b(s),s \in S.$$

Alors les deux solutions $\{\delta,x\}$ et y sont optimales pour (P) et (D) respectivement, donc on arrête.

Cas 2:

Si y ne vérifie pas toutes les containtes du problème primal alors: $\{\delta,x,y\}$ n'est pas une solution pour les systèmes (3.1) et(3.3) précédent , donc il faut chercher une autre solution $\{\delta^{'},x^{'},y^{'}\}$ qui sera meilleur que $\{\delta,x,y\}$ et qui vérifie:

$$\sum_{j=1}^{j=n} b(s_j)x_j < \sum_{j=1}^{j=n} b(s_j^{'})x_j^{'}$$

$\delta = \{s_1,........s_n\}$ va être remplacé par $\delta^{'} = \{s_1,........s_{i-1},s^{'},s_{i+1},.......s_n\} = (\delta \cup \{s^{'}\}) - \{s_i\}$

Quelle est la variable s_i qui va quitter δ et celle $(s^{'})$ qui va la remplacer?

Etape 3:

Chercher $s^{'} \in S$ tel que:

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i(s^{'})y_i \geq b(s^{'})$$

Etape 4:

Calculer l'unique solution $d \in \mathbb{R}^n$ du système d'équations linéaires:

$$A(s_1,.......,s_n)d = a(s^{'})$$

$a(s^{'})$ est une combinaison linéaire des vecteurs $a(s_j),s_j \in \delta$

Etape 5:

Si la solution d est telle que:

$d_j \leq 0,j = 1,.......,n$, dans ce cas les deux problèmes (P) et (D) n'admettent pas de solutions, l'algorithme va s'arrêter ici.

Etape 6:

Si dans l'étape 4, $\exists d_j > 0$, alors on a choisit un $i \in \{1,........,n\}$,$d_i > 0$ tel que:

$$\frac{x_i}{d_i} = min\{\frac{x_j}{d_j},d_j > 0\}$$

L'élément s_i correspendant va sortir de δ, alors:
$\delta^{'} = (\delta \cup \{s^{'}\}) - \{s_i\}$
Montrons que:
$\delta^{'} = (\delta \cup \{s^{'}\}) - \{s_i\}$ est un ensemble de base.
$\delta = \{s_1,........,s_n\}$ et $\delta^{'} = (\delta \cup \{s^{'}\}) - \{s_i\}$

Par Exemple:

$i = 1$:
$\delta^{'} = \{s^{'},........,s_n\}$ il s'agit de montrer que: $a(s^{'})$,$a(s_2)$,........$a(s_n)$ sont linéairement indépendants.
Comme $a(s_2)$,........$a(s_n)$ sont linéairement dépendants:
$\exists \alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 2,.......,n$ tels que: $a(s') = \sum(a(s_j))\alpha_j$
D'autres part on a:

$$a(s^{'}) = \sum_{i=1}^{i=n} a(s_j)d_j$$

En comparant les deux écritures du vecteurs $a(s^{'})$ on aura:

$$\begin{cases} d = 0. \\ \\ d_j = \alpha_j, j = 2,.....n. \end{cases}$$

On a une contradiction parce que: $d_i > 0$, donc les vecteurs $a(s^{'})$,$a(s_2)$,......$a(s_n)$ sont linéairement indépendants et donc l'ensemble $\delta^{'}$ est de base.

2.6.8 Exemple numérique

Soit le problème semi infini linéaire suivant:

$$(P) \Longrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=2} \frac{2+(-3)^{i-1}}{i} y_i \longmapsto \min \\ \\ \sum_{i=1}^{i=2} s^{i-1} y_i \geq 4^s, \qquad \forall s \in [-1,1] \\ \\ y_i \in \mathbb{R}, i = 1,2. \end{cases}$$

Soit le problème semi infini linéaire discrétisé suivant:

$$(P_m) \Longrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=2} \frac{2+(-3)^{i-1}}{i} y_i \longmapsto \min \\ \\ \sum_{i=1}^{i=2} s_j^{i-1} y_i \geq 4^{s_j}, s_j \in S = \{-1,0,1\} \\ \\ y_i \in \mathbb{R}, i = 1,2. \end{cases}$$

On aura:

$$(P_m) \Longrightarrow \begin{cases} 3y_1 - \frac{1}{2} y_2 \longmapsto \min \\ \\ y_1 - y_2 \geq \frac{1}{4}. \\ \\ y_1 \geq 1. \\ \\ y_1 + y_2 \geq 4. \\ \\ y_1, y_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On pose: $\delta = \{s_1, s_2, s_3\} = \{-1,0,1\}$.
On pose: $\delta_0 = \{s_1, s_2\} \subset S$: est un sous ensemble de S.

Le problème dual de (P_m) est le suivant:

$$(D_m) \Longrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{j=2} 4^{s_j} x_j \longmapsto \max \\ \\ \sum_{j=1}^{j=2} s_j^{i-1} x_j = \frac{2+(-3)^{i-1}}{i}, i = 1,2. \\ \\ s_j \in \delta_0 = \{s_1, s_2\}; x_j \geq 0, j = 1,2. \end{cases}$$

$$(D) \Longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x_1 + x_2 \longmapsto \max \\ \\ x_1 + x_2 = 3. \\ \\ -x_1 = \frac{-1}{2}. \\ \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

On a: $a(s_1) = \binom{1}{-1}$, $a(s_2) = \binom{1}{0}$, sont linéairement indépendants c'est à dire: la matrice $a(s_1,s_2)$ est une matrice de base.

Etape 1: On résoud le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3. \\ \\ -x_1 = \frac{-1}{2}. \end{cases}$$

La solution de ce système est:

$$(x_1^0, x_2^0) = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{2})$$

Etape 2: On résoud le système d'équations:

$$\begin{cases} y_1 - y_2 = \frac{1}{4}. \\ \\ y_1 = 1. \end{cases}$$

La solution de ce système est:

$$(y_1^0, y_2^0) = (1, \tfrac{3}{4})$$

Comme (y_1^0,y_2^0) ne vérifie pas la contrainte(3), donc on passe à l'étape suivante:

Etape 3: Déterminer $s^{'} \in S$, tel que:

$$\sum_{i=1}^{i=2}(s_j^{'})^{i-1}y_i^{'} < 4^{s_j{'}}$$

C'est clair que: $s^{'} = s_3$

Etape 4: Calculons la solution $d \in \mathbb{R}^2$:

$$A(s_1,s_2)\binom{d_1}{d_2} = a(s^{'})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\binom{d_1}{d_2} = \binom{1}{1}$$

On résoud le système suivant:

$$\begin{cases} d_1 + d_2 = 1. \\ \\ -d_1 = 1. \end{cases}$$

$$d = (d_1,d_2) = (-1,2)$$

Etape 5: On a: $d_1 < 0$, et $d_2 > 0$, donc on passe à l'étape suivante:

Etape 6: Puisque $d_2 > 0$, donc:

$$\frac{x_2}{d_2} = min\{\frac{x_j}{d_j},d_j > 0\} = \frac{5}{4}$$

Donc: c'est s_2 qui sortira de δ_0.
Posons: $\delta_1 = \{s_1,s_3\}$:
On a: $a(s_1) = \binom{1}{-1}$, $a(s_3) = \binom{1}{1}$, sont linéairement indépendants c'est à dire: la matrice $A(s_1,s_3)$ est une matrice de base, et on revient à l'étape 1:

Etape 1: Pour $\delta_1 = \{s_1,s_3\}$:le problème dual correspondant est :

$$(D) \Longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x_1 + 4x_2 \longmapsto \max \\ \\ x_1 + x_2 = 3. \\ \\ -x_1 + x_2 = \frac{-1}{2}. \end{cases}$$

On résoud le système:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3. \\ \\ -x_1 + x_2 = \frac{-1}{2}. \end{cases}$$

La solution de ce système est:

$$(x_1^1,x_2^1) = (\tfrac{7}{4},\tfrac{5}{4})$$

Etape 2: On résoud le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} y_1 - y_2 = \frac{1}{4}. \\ \\ y_1 + y_2 = 4. \end{cases}$$

La solution de ce système est:

$$(y_1^1,y_2^1) = (\tfrac{17}{8},\tfrac{15}{8})$$

(y_1^1,y_2^1) est réalisable pour (P).

Conclusion: (y_1^1,y_2^1) est la solution optimale pour le problème (P).

Le programme:

function simplex;

$A = [1 \quad 1; -1 \quad 0]$ $\quad b = [\frac{1}{4} \quad 1]$ $\quad c = [3; -0{,}5]$

$S = [-1; 0; 1]$ $\quad S_1 = [1; 2];$ $\quad S1 = \{s_1; s_2\};$

$S_2 = [3]$ $\quad S_2 = \{s_3\};$ $\quad S_3 = [1; 1]$

disp('********************Etape 1************************')
$x = inv(A) * c$;
disp('la solution de ce problème est: $x =$');
disp(x);
disp('********************Etape 2*************************')
$y = inv(A.') * b$;
disp('la solution de ce problème est: $y =$');
disp(y);
disp('********************Etape 3**************************')
for $i = 1 : length(S)$
for $I = 1 : length(S_2)$
for $j = 1 : 2$
$D(1,j) = (S(3)^{(j-1)})$;
$B(I) = D(1,j) * y(j)$;
$S(i) = 4^{(S(i))}$;
if $B(I) < S(i)$
$ent = S_2(I)$;
end;
end;
end;
end;
disp('$ent =$');
disp(ent);
disp('*******************Etape 4*****************************')
$d = inv(A) * S_3$;
disp('d=');
disp(d);
disp('********************Etape 5****************************')
for $i = 1 : length(d)$
if $(d(i) < 0)$
disp('la solution de ce problème est:')

else
if $(d(i) > 0)$
disp('********************Etape 6*****************************')
$a = (x(i)/d(i))$;
end;
end;
end;
$f = min(a)$;
disp('$f =$');
disp(f);
disp('La conclusion: s_2 sort de S_1');
disp('Prenons une autre base $S_1 = \{s_1,s_3\}$, on aura:')
$A = [1 \quad 1; -1 \quad 1] \qquad c = [3; -0{,}5] \qquad b = [\frac{1}{4}; 4]$
disp('********************Etape 1 *********************************')
$x = inv(A) * c$;
disp('$x =$');
disp(x);
disp('********************Etape 2 *********************************')
$y = inv(A.') * b$;
disp('$y =$');
disp('y');
disp('La conclusion: y est la solution optimale de problème (P)')

Exécution:

A=

$$\begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}$$

c=

$$3.0000$$

-0.5000

b=

0.2500

1.0000

s=

-1

0

1

************************ Etape 1:************************

La solution de ce problème est: x=

0.5000

2.5000

************************ Etape 2: ***********************

La solution de ce problème est: y=

1.0000

0.7500

************************Etape 3:**************************

ent=

3

d=

-1

2

********************Etape 4:************************************

d=

-1

2

On passe à l'étape 6:

*******************Etape 6 ************************************

f=

0.1250

La conclusion: s_2 sort de S_1.
Prenons une autre base $S_1 = \{s_1; s_3\}$, on aura:
A=

$$\begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix}$$

b=

$$\begin{matrix} 0.2500 \\ 4.0000 \end{matrix}$$

******************Etape 1:************************

x=

$$\begin{matrix} 1.7500 \\ 0.2500 \end{matrix}$$

******************Etape 2:**********************

y=

$$\begin{matrix} 2.1250 \\ 1.8750 \end{matrix}$$

La conclusion: y est une solution optimale de problème (P).

Chapitre 3

L'optimisation semi infinie non linéaire

3.1 Introduction

Au cours des cinq dernières décennies, le domaine de la programmation semi infinie a connu un formidable développement plus de 1000 articles et 10 livres ont été publiés sur la théorie, les méthodes et applications, donc ce problème attire beaucoup de chercheurs pour le developper.
Nous avons exposé précédemment des techniques de résolution d'un problème semi infini linéaire, citons un autre cas particulier qui est le problème semi infini non linéaire.

3.2 Position du problème

$$(P) \Longrightarrow \begin{cases} f(x) \longmapsto \min \\ \\ g(x,s) \geq 0, \forall s \in S \\ \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

S: Le produit cartésien de N intervalles fermés de $\mathbb{R}(S \subset \mathbb{R}^N)$.
$g(x,s)$: $\mathbb{R}^n \times S \longmapsto \mathbb{R}$, de classe C^2.

$f \colon \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$, de classe C^2.

3.3 Définitions et proprietés

Définition 1:
On pose:
$.\nabla f_j(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}$, $j = 1,....n$ sont les dérivées partielles de f par rapport à x_j.
$.\nabla g_j(x,s) = \frac{\partial g(x,s)}{\partial x_j}$, $j = 1,....n$ sont les dérivées partielles de g par rapport à x_j.

Définition 2:
Soit $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ une solution réalisable du problème (P).
$.\overline{x}$ est un point stationnaire du problème (P) si:
.Il existe $\overline{s_i} \in S$ tel que: $g(\overline{x},\overline{s_i}) = 0$, $i = 1,....,t$.
.Il existe $\overline{\lambda_i}$, $i = 1,...,t$, tel que:

$$\nabla f_j(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{t} \overline{\lambda_i} \nabla g_j(\overline{x},\overline{s_i}) = 0^T, \qquad j = 1,....n.$$

Définition 3:
Soit $\overline{x}$ la solution réalisable du problème (P) et soient les variables $\overline{s_i}$ tel que:
$g(\overline{x},\overline{s}_i) = 0, \quad i = 1,...,t$ représentent les points stationnaires de la fonction $g(x,s)$ au voisinage de $\overline{x}$.

Définition 4:
On définit $E(x)$ l'ensemble des points stationnaires de g (minimum) dans S.

Définition 5:
Pour $x = (x_1,x_2,....,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $S = \{s_1,......s_n\} \in E(x) \subset \mathbb{R}^N$.

On définit:
$.\nabla_1 g(x,s) = (\frac{\partial g(x,s)}{\partial s_1},......,\frac{\partial g(x,s)}{\partial s_l})$.

$.\nabla_2 g(x,s) = (\frac{\partial g(x,s)}{\partial s_{l+1}},......,\frac{\partial g(x,s)}{\partial s_n})$.

$.\nabla_2^2 g(x,s)$: matrice d'ordre $(n-l,n-l)$.

$$\nabla_2^2 \mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{s}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g(x,s)}{\partial^2 s_{l+1}} & \frac{\partial^2 g(x,s)}{\partial s_{l+1}\partial s_{l+2}} & \dots & \frac{\partial^2 g(x,s)}{\partial s_{l+1}\partial s_n} \\ \frac{\partial^2 g(x,s)}{\partial^2 s_{l+2}\partial s_{l+1}} & \frac{\partial^2 g(x,s)}{\partial^2 s_{l+2}} & \dots & \frac{\partial^2 g(x,s)}{\partial s_{l+2}\partial s_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \frac{\partial^2 g(x,s)}{\partial s_n\partial s_{l+1}} & \frac{\partial^2 g(x,s)}{\partial s_n\partial s_{l+2}} & \dots & \frac{\partial^2 g(x,s)}{\partial^2 s_n} \end{pmatrix}$$

Définition 6:

Soit B un sous ensemble ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ tel que:
1) $\exists s \in S$ qui vérifie: $\nabla_2 g(x,s) = 0$ (1).
2) A chaque point $s \in S$ qui vérifie (1) correspond un minimum local de g donc ${\nabla_2}^2 g$ est définie positive.

Définition 7:

1)Un point stationnaire $\overline{x}$ est un minimum local pour P s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que:

$$f(x) - f(\overline{x}) \geq 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \| x - \overline{x} \| < \varepsilon.$$

2) $\overline{x}$ est un minimum global si cette relation est valable pour tous les $\varepsilon > 0$.
3) $\overline{x}$ est un minimum local stricte d'ordre $\rho > 0$ s'il existe $q > 0$ et $\varepsilon > 0$ tel que:

$$f(x) - f(\overline{x}) \geq q \| x - \overline{x} \|^{\rho}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \| x - \overline{x} \| < \varepsilon.$$

L'ensemble des indices actives:

$$S_a(\overline{x}) = \{s \in S / g(\overline{x},s) = 0\}$$

Comme g est continue et S est un compact , le sous ensemble $S_a(\overline{x}) \subset S$ est aussi un compact.

Condition de qualification des contraintes:

1) Si les gradients actives $\nabla_x g(\overline{x},s)$, $s \in S_a(\overline{x})$ sont linéairement indépendant alors la qualification des contraintes est vérifié à $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ (ILCQ).
2) S'il existe la direction $d \in \mathbb{R}^n$ tel que:
$\nabla_x g(\overline{x},s)d > 0$, $\forall s \in S_a(\overline{x})$, alors: QC est vérifie $(MFCQ)$.

Remarque:
Le vecteur $d \in \mathbb{R}^n$ est une direction de descente si:
1) $\nabla f(\overline{x})d < 0$.
2) $\nabla_x g(\overline{x},s)d > 0$, $\forall s \in S_a(\overline{x})$.

Définition:
La solution du problème:

$$\begin{cases} d^T(\nabla f(x) + \frac{1}{2}d^T Hd) \longmapsto \min \\ \\ H_i(x) + d^T \nabla H_i(x) \leq 0, \qquad i = 1,....,t \end{cases}$$

est appelée la direction de descente de (P) ou:
$.H = \nabla^2 L(x,\lambda)$.
$.\nabla f(x) = \nabla(f_1(x),.....,f_n(x))$.

3.4 Méthode de Lagrange

3.4.1 Condition nécessaire du premier ordre

On définit le lagrangien par:

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{t} \lambda_i H_i(x) \tag{2}$$

Avec:

$$H_i(x) = g(x,s_i(x)), \qquad i = 1,....,t \tag{3}$$

Si: $\overline{x} \in B$

$$\nabla_x L(\overline{x},\overline{\lambda}) = 0. \tag{4}$$

3.4.2 Condition nécessaire de deuxième ordre

Théorème 3.1. [12] *Soit* $\overline{x} \in B$*, la solution du* (P) *tel que:* $\nabla_x L(\overline{x},\overline{\lambda}) = 0$ *est vérifiée alors:*

$$s^T[\nabla_x^2 L(\overline{x},\overline{\lambda})]s \geq 0, \qquad \forall s, \qquad s^T \nabla H_i(\overline{x}) = 0, \qquad i = 1,....,t.$$

Théorème 3.2. [12] *Soit* $\overline{x} \in B$*, une solution réalisable qui satisfait (4), si:*

$$s^T[\nabla_x^2 L(\overline{x},\overline{\lambda})]s \geq 0, \qquad \forall s, \qquad s^T \nabla H_i(\overline{x}) = 0, \qquad i = 1,....,t.$$

Alors: $\overline{x}$ *est une solution locale de* (P)*.*

3.5 Le problème semi infini convexe

3.5.1 Définitions

Définition:
Le problème semi infini est convexe si la fonction objectif $f(x)$ est convexe et pour chaque $s \in S$, $g(x,s)$ est concave $(-g(x,s))$ est convexe)par rapport à x.

Résultat:[12]
Dans un problème semi infini convexe un minimum local est aussi global.

3.5.2 Condition de Slater

On dit que (P) est satisfie la condition de Slater si:
$\exists \overline{x}$, tel que: $g(\overline{x},s) > 0$, $\forall s \in S(SCQ)$.

Lemme: [12]
(P) satisfait SCQ ssi MFCQ est vérifié.

Théorème 3.3. [12] *Si $\overline{x}$ est réalisable satisfait:*

$$\nabla f(\overline{x}) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j \nabla_x g(\overline{x},s_j) = 0^T$$

Alors: $\overline{x}$ est un minimum global de (P). $s_1,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,s_k \in S_a(\overline{x})$, $k \leq n$.

3.5.3 Exemple numérique

Soit le problème semi infini convexe suivant:

$$(P) \Longrightarrow \begin{cases} x^2 \longmapsto \min \\ 2x + s \geq 1, \qquad s \in [0,1] \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$g(x,s) = 2x + s - 1$ est linéaire alors d'aprés KARLIN tous les points sont réguliers.
On utilise la discrétisation:
1/ Posons: $s = 1$:

$$(P_1) \Longrightarrow \begin{cases} x^2 \longmapsto \min \\ 2x \geq 0 \end{cases}$$

La solution de ce système est: $x = 0$.
On applique la formule:

$$\nabla f(\overline{x}) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j \nabla_x g(\overline{x},s_j) = 0^T.$$

$$0 + 2\mu = 0 \Longrightarrow \mu = 0.$$

$x = 0$: n'est pas un minimum de (P) car:
$\min_{s\in[0,1]}[2x + s - 1] = \min_{s\in[0,1]}[s + 1] = -1 < 0$.

2/ Posons $s = \{0,1\}$:

$$(P_2) \Longrightarrow \begin{cases} x^2 \longmapsto \min \\ 2x \geq 1 \\ 2x \geq 0 \end{cases}$$

La solution de ce système est: $x = \frac{1}{2}$.
Donc:

$$(P_2) \Longrightarrow \begin{cases} 1 + 2\mu_1 + 2\mu_2 = 0 \\ 1 + 2\mu_2 = 0 \end{cases}$$

La solution de ce système d'équations est: $(\mu_1,\mu_2) = (0,\frac{-1}{2})$.
Conclusion: comme $x = \frac{1}{2}$ vérifie le test d'arrêt c'est à dire:
$\min_{s\in[0,1]}[2x + s - 1] = \min_{s\in[0,1]}[s] = 0 \geq 0$.
Donc: $x = \frac{1}{2}$ est un minimum global de (P).

Chapitre 4

Applications de l'optimisation semi infinie

4.1 Approximation de Chebyshev

Soit une fonction $f \in C(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ et l'ensemble des approximations $\rho(x,t) \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,\mathbb{R})$ paramétrisé par $x \in \mathbb{R}^n$.

On veut approximiser f par une fonction $\rho(x,t)$ en utilisant la norme maximum(norme de Chebyshev):

$$\| f \|_\infty = \max_{t \in T} | f(t) | .$$

On a un ensemble des compacts $T \subset \mathbb{R}^m$.

Le but c'est de minimiser l'erreur d'approximation: $\varepsilon = \| f - \rho \|_\infty$.

Le problème peut s'écrire comme un problème semi infini:

$$\begin{cases} \min_{x,\varepsilon} \varepsilon \\ \pm g(x,t) = \pm(f(t) - \rho(x,t)) \leq \varepsilon, \qquad \forall t \in T. \end{cases}$$

Pour plus de détails voir [16] et [6].

4.2 Problème de gestion de portefeuille

Dans un problème de portefeuille, nous souhaitons investir k euros en n parts.

Par exemple :

Pour une période d'un an, nous investissons x_i euros en part i et attendons à la fin de la période d'un retour de t_i pour 1 euro investi dans la part i.

Notre but: est de maximiser la valeur de portefeuille , $v = t^T x$, aprés une année, avec: $x = (x_1,.........,x_n)$ et $t = (t_1,.......,t_n)$.

Le problème est que les valeurs t_i ne sont pas connues à l'avance(sinon nous pourrait investir tout l'argent dans la part avec la valeur t_i maximale).
Cependant, la connaissance des modèles de l'économie, nous permettent de prédire que les coefficients de gains varient entre certaines bornes.
Nous pouvons donc supposer que le vecteur t sera contenu dans un compact $T \subset \mathbb{R}^m$.

Dans ce modèle d'optimisation robuste que nous souhaitons maximiser l'objectif v pour le pire des cas, le vecteur $t \in T$, nous a conduit à résoudre le problème semi infini suivant:

$$\begin{cases} \max_{x,v} v \\ t^T x - v \geq 0, \qquad \forall t \in T \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = k, \qquad x \geq 0. \end{cases}$$

Pour plus de détails voir [18].

Chapitre 5

Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans ce travail à une classe importante des problèmes d'optimisation qui est l'optimisation semi infinie, aprés avoir rappelé quelques définitions et notions de base sur la programmation linéaire et la convexité.

Nous avons étudié les problèmes semi infinis linéaires et non linéaires et aussi les méthodes de résolution de ces problèmes, tel que: la méthode de discrétisation qui nécessite l'application de l'algorithme de simplexe programmé par Matlab dans le cas linéaire, et pour le cas non linéaire on a présenté la méthode de lagrange, à la fin on a étudié le problème semi infini convexe.

On a constaté que la programmation semi infinie résout beaucoup de problèmes dans notre vie quotidienne par exemple: la réduction de pollution atmosphérique .

Comme perspectives, on peut résoudre le problème de gestion de portefeuille, ainsi l'approximation de Chebyshev en utilisant les techniques de la programmation DC et DCA.

Bibliographie

Bibliographie

[1] AIDENE.M, OUKACHA.B, Recherche opérationelle, programmation linéaire, UMMTO, 2005.

[2]J.Amaya, J.A. Géomez, Strong duality for inexact linear programming problems.Optimisation 49(2001)243 – 269.

[3]E.J.Anderson, P.Nash, Linear programming in infinite dimentional spaces, Wiley,New York, 1987.

[4]A.V.Fiacco, K,O.Kortanek(Eds), Semi- Infinite programming and applications, lecture Notes in Economics and Mathematical systems, 215,1983.

[5]K.Glashoff, S.A. Gustasfon, Linear optimization and Approximation, Springer-verlag, Berlin, 1983.

[6]Goberna and Lopez.Conditions for clossedness of the caracteristics cone associated with an infinite linear system, Depart de maths faculté des sciences Univ.Alicante Espagne. 1982.

[7] M.A.Goberna, M.A.Lopez, Linear semi-infinite programming theory: an updated survey, European Journal of Operations Research 143(2002)390 – 405.

[8] M.A.Goberna, M.A.Lopez, Linear semi-infinite programming theory: an updated survey, European Journal of Operations Research 143(2002)390 − 405.

[9]M.A.Goberna, M.A.Lopez, Optimal value function in semi-infinite programming, Journal of Optimization.Theory and Applications 59(1988)261 − 280.

[10]R.Hettich, K.O. Kortanek, Semi infinte programming: Theory, methods and applications, SIAM Review 35(1993),380 − 429.

[11]R.Hettich, P.Zencke, Numerische methoden der approximation und der semi -infiniten optimierung, Tenbner, Stuttgart, 1982.

[12]Macro Lopez , George Still, Semi infinite programming, 2005.

[13]Polak, Preserving descritization strategies for semi-infinite programming and optimal control(1989).

[14]Alexander Shapiro, Semi- infinite programming, duality, discretization and optimality conditions, School of Industial and System Enginnering, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia 30332 − 0205, USA.

[15]G.Still, Discretization in semi-infinite programming: the rate of convergence, Math.Program.91(2001), no.1, Ser.A, 53 − 69.

[16]G.Still, Approximation and Optimization: Classical results and new development, parametric optimization related topic V, Aportaciones Math.Investig.18, Soc.Math.Mexicana, 2004,*pp*.207 − 233

[17]O.Stein , G.Still , on optimality conditions for generalized semi-infinite programming problems, journal of optimization Theory and applications $104(2000)443 - 458$.

[18]O.Stein, G.Still, Solving semi infinite optimization problems with interior point thechniques SIAM journal on control and Optimization $42(3)(2003)769-788$.