RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE.
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE.
UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU.

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE DE MASTER II

SPÉCIALITÉ: MATHÉMATIQUES

OPTION: MODÉLISATION MATHÉMATIQUE

Méthodes asymptotiques en Électromagnétisme.

Présenté par :

AKEB Tassadit

Dirigé par:

M^{me} RAHMANI Leila.

Devant le jury d'examen composé de:

Morsli	Mohamed	Professeur	UMMTO	Président
Rahmani	Leila	Professeur	UMMTO	Rapporteur
Smaali	Mannal	MCA	UMMTO	Examinatrice
Menguelti	Ali	MAA	UMMTO	Examinateur

Soutenu le: 13/10/2016.

Remerciements

Je remercie tout d'abord le bon dieu de m'avoir donné la santé, la volonté et le courage pour pouvoir atteindre mes objectifs.

Je tiens à adresser ma profonde gratitude à ma promotrice ***Rahmani Leila*** qui m'a fait l'honneur de diriger ce travail, qui m'a apportée son aide, sa disponibilité et qui m'a orientée tout au long de ce travail.

Mes sincères remerciements s'adressent aux membres de jury d'avoir examiné et évalué mon travail.

Mes remerciements s'adressent aussi à l'ensemble des enseignants du département de mathématiques et ceux de l'université ***MOULOUD MAMEMRI***.

Merci à tous.

Table des matières

Introduction générale

Dans ce mémoire, nous nous intéressons au problème de diffraction d'une onde électromagnétique par un objet recouvert d'une couche mince. La simulation numérique de la solution d'un problème posé sur un domaine qui comporte une couche mince est difficile car elle nécessite une discrétisation à l'échelle de l'épaisseur de celle-ci. Le maillage du domaine doit être alors très fin, ce qui rend les calculs très difficiles et très coûteux. Pour contourner ces difficultés numériques, plusieurs auteurs ont proposé des modèles approchés qui ne font pas intervenir la couche mince, mais qui rendent compte de son effet par de nouvelles conditions aux limites, dites "conditions approchées" ou "conditions d'impedance". L'identification de ces modèles se base essentiellement sur les méthodes asymptotiques, le petit paramètre pris en considération étant l'épaisseur de la couche mince.

Parmi les travaux effectués pour le problème de diffraction, nous pouvons citer celui de Enguist-Nedelec [4], où des conditions d'impedance ont été justifiées par un développement de Taylor de la solution. Ensuite, Bendali-Lemrabet [3] ont retrouvé ces conditions grâce à une analyse asymptotique du problème.

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'étude faite par Habib Ammari et Chiraz Latiri-Grouz [1] , qui concerne le problème de diffraction par une couche mince, quand la perméabilité de celle-ci est variable ou périodique.

Après avoir rappelé quelques notions d'analyse fonctionnelle et de géométrie différentielle nécessaires à la compréhension de cette étude, nous avons considéré, au chapitre 2, le problème de la diffraction de l'onde électromagnétique par une couche mince de perméabilité variable. L'identification des conditions aux limites approchées se base sur l'écriture d'un développement asymptotique de la solution, par rapport à l'épaisseur de la couche mince. Pour ce faire, un changement d'échelle est effectué afin de ramener le domaine de référence à un domaine fixe.

Dans le chapitre 3, nous avons considéré le cas où la perméabilité de la couche mince est périodique. Avec une analyse asymptotique similaire, on a identifié des problèmes approchés et donné des estimations d'erreur entre la solution exacte et la solution approchée.

Chapitre 1

Préliminaires

L'objectif de ce chapitre est de rappeler quelques éléments d'analyse et de géométrie nécessaires pour la compréhension des deux chapitres qui suivent. Le lecteur pourra consulter les références [7], [15] pour plus de détails.

1.1 Théorie de Lax Milgram

Soit V un espace de Hilbert réel muni d'un produit scalaire $< .,. >$ dont la norme associée est notée $\|.\|$. Considérons une formulation variationnelle du type:

$$\left\{ \begin{array}{rl} \text{trouver} & u \in V, \\ a(u,v) = l(v) & \forall v \in V. \end{array} \right. \tag{1.1}$$

On suppose que:

1. l est une forme linéaire continue sur V i,e
$$\exists c > 0 \quad |l(v)| \leq \|v\|, \quad \forall v \in V.$$
2. $a(.,.)$ est une forme bilinéaire sur V.
3. $a(.,.)$ continue i,e
$$\exists M > 0 \quad |a(u,v)| \leq M\|u\|\|v\|, \quad \forall u,v \in V.$$
4. $a(.,.)$ est coercive (ou elliptique) i,e
$$\exists \beta > 0 \quad |a(u,u)| \geq \beta\|u\|^2 \quad \forall u \in V.$$

Sous les hypothèses énnoncées ci-dessus, le problème (1.1) admet une unique solution.

1.2 Espaces $L^p(\Omega)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$

Définition 1.2.1. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.
On désigne par $L^p(\Omega)$ l'espace des classes de fonctions définies et mesurables sur Ω (pour la mesure de Lebesgue) telles que:
$$\int_\Omega |f(x)|^p dx < +\infty.$$

On munit $L^p(\Omega)$ de la norme
$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx\right]^{1/p}.$$
$L^\infty(\Omega)$ désigne l'espace des classes de fonctions f définies, mesurables et bornées presque partout sur Ω.
On note:
$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} ess|f(x)|.$$
Théorème 1.2.1. $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach, séparable si $1 \leq p < +\infty$ et réflexif si $1 < p < +\infty$.

Proposition 1.1. *(Inégalité de Hölder)*
Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec: $1 \leq p \leq +\infty$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
Alors $fg \in L^1(\Omega)$ et
$$\int_\Omega |fg|dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

1.3 Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 1.3.1. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Pour $m \in \mathbb{N}$ et $p \geq 1$, on pose
$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega); \quad \partial^\alpha f \in L^p(\Omega),\ |\alpha| \leq m\},$$
$W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme
$$\|f\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m}\int_\Omega |\partial^\alpha f|^p\right)^{1/p}.$$
Si $p = 2,W^{m,p}(\Omega)$ est noté $H^m(\Omega)$. C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire:
$$\langle f,g\rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m}\langle \partial^\alpha f,\partial^\alpha g\rangle_{L^2(\Omega)}.$$
Proposition 1.2. *On suppose Ω borné de classe $\mathcal{C}^1$. On a:*

- *si $p < n$, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),\forall q \in [1,p^*[$ où $\frac{1}{p^*}=\frac{1}{p}-\frac{1}{n}$*
- *si $p = n$, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),\forall q \in [1,+\infty[$,*
- *si $p > n$, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$,*

avec injections compactes.
En particulier, si $n = 2$, l'injection
$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega),$$
est compacte $\forall p,\ 1 \leq p < +\infty$.

Théorème 1.3.1. Soit Ω un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$, on définit l'application trace γ_0
$$\begin{aligned}\gamma_0 : H^1(\Omega)\cap\mathcal{C}(\bar{\Omega}) &\longrightarrow L^2(\partial\Omega)\\ v &\longmapsto \gamma_0(v) = v|_{\partial\Omega},\end{aligned}$$

cette application se prolonge par continuité en une application linéaire de H^1 dans $L^2(\partial\Omega)$ notée encore γ_0.
En particulier, il existe une constante $c > 0$ telle que pour toute fonction $v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Ce théorème permet de donner un sens à la valeur d'une fonction sur le bord $\partial\Omega$.

1.4 Espaces de Sobolev $W^{s,p}(\Omega)$

Pour Ω un domaine de $\mathbb{R}^d$, $m < s < m+1$ et $1 \leq p < +\infty$, $W^{s,p}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions v de $W^{m,p}(\Omega)$ telles que

$$|v|^p_{W^{s,p}} = \sum_{|\alpha|=n} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|D^\alpha v(x) - D^\alpha(y)|}{|x-y|^{(s-m)p+d}} < +\infty.$$

Cet espace est muni de la norme

$$\|v\|_{W^{s,p}} = \left(\|v\|^p_{W^{m,p}} + \|v\|^p_{W^{s,p}}\right)^{1/p}.$$

Si $p = 2$, on note l'espace $W^{s,p}(\Omega)$ par $H^s(\Omega)$.

Définition 1.4.1. Soit Ω un domaine Lipshitzien. L'image de $H^1(\Omega)$ par l'opérateur de trace γ_0 est l'espace $H^{1/2}(\partial\Omega)$. On peut définir une norme sur $H^{1/2}(\partial\Omega)$ par

$$\|v\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \inf_{\gamma_0 w = W} \|W\|_{H^1(\Omega)},$$

qui est équivalente à la norme $H^{1/2}$ obtenue plus haut, adaptée à $\partial\Omega$.
Définition 1.4.2. Le dual de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ (l'ensemble des formes linéaires continues sur $H^{1/2}(\partial\Omega)$) est l'espace $H^{-1/2}(\partial\Omega)$.

1.5 Courbure et formules de Frenet

Abscisse curviligne:

Définition 1.5.1. Soit Σ une courbe de $\mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^2$ et (I,M) une représentation paramétrique de Σ $(I \subset \mathbb{R})$. Pour tout $t \in I$, le nombre réel

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|M(\zeta)\| d\zeta,$$

est appelé abscisse curviligne du point $m = M(t)$ avec $m_0 = M(t_0)$ pour origine.

Remarque:

1) L'application $s : I \longrightarrow s(I)$ est un homeomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$.
2)L'abscisse curviligne s mesure la longueur de la courbe Σ du point m_0 au point m et elle est indépendante de la paramétrisation choisie.

3)L'application p définie de $s(I)$ dans Σ par $p = M \circ s^{-1}$ est un reparamétrage de Σ par l'abscisse curviligne s.

Théorème 1.5.1. Soit Σ une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^2$. Le reparamétrage $p = M \circ s^{-1}$ est un $\mathcal{C}^2$ paramétrage et on a:

$$\left\| \frac{dp}{ds} \right\| = 1.$$

Courbure et rayon de courbure:

Soit (Σ,M) une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^2$ et p un reparamétrage de Σ par une abscisse curviligne s.

Définition 1.5.2. La courbe Σ est dite birégulière au point $m = M(t)$ si $M'(t)$ et $M''(t)$sont linéairement indépendants.

Définition 1.5.3. On appelle courbure au point m le nombre réel, noté

$$c(s) = \left\| \frac{d^2p}{ds^2} \right\|,$$

si Σ est birégulière au point m, on appelle rayon de courbure en m l'inverse de la courbure en m. Le rayon de courbure se note:

$$r(s) = \frac{1}{c(s)}.$$

Formules de Frenet:

Soit (Σ,M) une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^2$ et birégulière en tout point $p(s)$ (p désignant le paramétrage de Σ par une abscisse curviligne s.)

On pose

$$\tau(s) = \frac{dp}{ds},$$

$\tau(s)$ est donc un vecteur unitaire tangent à Σ au point $p(s) = M \circ s^{-1}(s)$.

On désigne par $n(s)$ le vecteur se déduisant de $\tau(s)$ par une rotation de $\Pi/2$ dans le sens direct.

En dérivant le produit scalaire $\|\tau(s)\|^2 = 1$, on obtient

$$\tau \frac{d\tau}{ds} = 0,$$

Il existe alors une fonction $c_1(s) : s(I) \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\frac{d\tau}{ds} = c_1 n(s).$$

Par comparaison avec la définition de la courbure on déduit que

$$c(s) = |c_1(s)|.$$

Définition 1.5.4. La fonction c_1 est appelée courbure algébrique de Σ.

En dérivant la relation $\tau(s)n(s) = 0$ on obtient:

$$\frac{d\tau}{ds} n(s) + \tau(s) \frac{dn}{ds}(s) = 0,$$

ce qui donne alors

$$\frac{d\tau}{ds}(s) = c(s)n(s),$$

$$\frac{dn}{ds}(s) = -c(s)\tau(s).$$

Ces formules s'appellent formules de Frenet.

1.6 Formules de Green

Théorème 1.6.1. Soit Ω un ouvert borné ou non de l'espace $\mathbb{R}^n$, dont le bord est noté $\partial\Omega$. On suppose que le bord est régulier de classe $\mathcal{C}^1$, soit $w \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ à support borné dans le fermé $\bar{\Omega}$. Alors on a

$$\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i}(x)dx = \int_{\partial\Omega} w(x)n_i(x)ds,$$

où $n_i(x)$ est la $i^{ème}$ composante de la normale extérieure unité de Ω.

Corollaire 1.6.1. *Soit Ω un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$, soient u et v deux fonctions de $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ à support borné dans $\bar{\Omega}$. Alors elles vérifient la formule d'integration par parties*

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)n_i(x)ds.$$

Corollaire 1.6.2. *Soit Ω un ouvert régulier de classe $\mathcal{C}^1$, soient $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ et $v \in \mathcal{C}^1$, toutes deux à support borné dans le fermé $\bar{\Omega}$ alors, elles vérifient la formule d'integration par partie*

$$\int_\Omega \Delta u \ v \ dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla v \ dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \ v \ ds.$$

où $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_{1\leq i\leq N}$ est le vecteur gradient de u et $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u.n$.

Chapitre 2

Condition aux limites approchées pour le problème de la diffraction d'une onde par une couche mince de perméabilité variable

Dans ce chapitre, on s'interesse au problème de la diffraction d'une onde électromagnétique par une couche mince de perméabilité variable.

Pour des raisons numériques, la couche mince sera modélisée par des conditions aux limites approchées. En d'autres termes, on construira des modèles approchés posés uniquement sur le domaine extérieur (sans la couche mince), l'effet de celle-ci se traduira par ces nouvelles conditions.

2.1 Problème de diffraction avec condition aux limites de type Neumann

2.1.1 Position du problème

Soit Ω un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^2$, de bord $\Gamma = \partial\Omega$ de classe C^∞. Soit $\Omega_i^\delta = \{x \in \Omega \text{ tel que } d(x,\Gamma) < \delta\}$ le domaine occupé par la couche mince, δ étant un paramètre positif destiné à tendre vers 0. Le bord de Ω_i^δ est défini par $\partial\Omega_i^\delta = \Gamma \cup \Gamma_0$.
On note Ω_e le complémentaire de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^2$.
On s'interesse au problème de transmission suivant:

$$\begin{cases} \Delta u_i^\delta + k^2 q\left(s, \frac{n}{\delta}\right) u_i^\delta = 0 & \text{dans } \Omega_i^\delta, \\ \Delta u_e^\delta + k^2 u_e^\delta = 0 & \text{dans } \Omega_e, \\ \partial_n u_i^\delta = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ u_i^\delta|_{n\to 0-} = u_e^\delta|_{n\to 0+}, \quad \partial_n u_i^\delta|_{n\to 0-} = \partial_n u_e^\delta|_{n\to 0+}, & \\ u_e^\delta - u^{in} \quad \text{satisfait la condition de radiation sortante.} & \end{cases} \tag{2.1}$$

Ce problème représente la diffraction d'une onde électromagnétique par la couche mince Ω_i^δ, où k est une constante strictement positive et $q(s, n/\delta)$ est une fonction de la variable s et n/δ. u^{in} désigne une onde incidente plane.

Condition de radiation sortante: cette approche consiste à garantir l'unicité de la solution de l'équation de Helmholtz en imposant à l'infini à la solution de l'équation de Helmhotz la condition d'onde sortante ou de radiation de Sommereld.

$$\lim_{|x|\to\infty} |x| \left(\nabla u.x/|x| - iku\right) = 0.$$

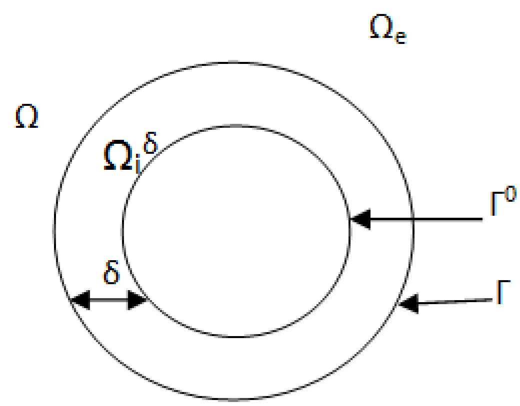

FIG. 2.1 – Le problème avec couche mince

On souhaite remplacer l'effet de la couche mince par des conditions aux limites approchées qui modélisent son effet. Ces conditions seront établies par une méthode basée sur un changement d'échelle et un développement asymptotique par rapport à l'épaisseur de la couche mince δ.

2.1.2 Changement d'échelle

Coordonnées locales:

Soient $\vec{S}$ le vecteur unitaire tangent et $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal, tels que:

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} n_2 \\ -n_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}.$$

Les formules de Frénet qui définissent la courbure $c(s)$ au point d'abscisse curviligne s sont données par:

$$\frac{d\vec{S}}{ds} = -c(s)\vec{n} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = c(s)\vec{S}. \tag{2.2}$$

Expression du Laplacien en coordonnées locales:

Les formules de Frénet entraînent:

$$\begin{pmatrix} \partial_s \\ \partial_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+nc(s))n_2 & -(1+nc(s))n_1 \\ n_1 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix}.$$

L'inversion de ce dernier système donne:

$$\begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{n_2}{(1+nc(s))} & n_1 \\ \\ \dfrac{-n_1}{(1+nc(s))} & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_s \\ \partial_n \end{pmatrix}.$$

Le Laplacien Δ étant donné par l'expression:

$$\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2,$$

les dérivées secondes s'écrivent en coordonnées locales:

$$\partial_1^2 = \partial_1(\partial_1) = \frac{n_2}{1+nc(s)}\partial_s\left(\frac{n_2}{1+nc(s)}\partial_s + n_1\partial_n\right) + n_1\partial_n\left(\frac{n_2}{1+nc(s)}\partial_s + n_1\partial_n\right),$$

$$\partial_2^2 = \partial_2(\partial_2) = \frac{-n_1}{1+nc(s)}\partial_s\left(\frac{-n_1}{1+nc(s)}\partial_s + n_2\partial_n\right) + n_2\partial_n\left(\frac{-n_1}{1+nc(s)}\partial_s + n_2\partial_n\right).$$

Ceci donne:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{n_2}{1+nc(s)}\left[\frac{n_2'}{1+nc(s)}\partial_s + n_2\partial_s\left(\frac{1}{1+nc(s)}\partial_s\right) + n_1'\partial_n + n_1\partial_n\partial_s\right] + n_1n_2\partial_n\left(\frac{1}{1+nc(s)}\partial_s\right) + n_1^2\partial_n^2 \\ &- \frac{n_1}{1+nc(s)}\left[\frac{-n_1'}{1+nc(s)}\partial_s - n_1\partial_s\left(\frac{1}{1+nc(s)}\partial_s\right) + n_2'\partial_n + n_2\partial_n\partial_s\right] - n_1n_2\partial_n\left(\frac{1}{1+nc(s)}\partial_s\right) + n_2^2\partial_n^2. \end{aligned}$$

D'où

$$\Delta = \frac{n_1^2+n_2^2}{1+nc(s)}\partial_s\left(\frac{1}{1+nc(s)}\partial_s\right) + (n_1^2+n_2^2)\partial_s^2 + \frac{n_2n_2'}{(1+nc(s))^2}\partial_s + \frac{n_1n_1'}{(1+nc(s))^2}\partial_s + \frac{n_2n_1'}{1+nc(s)}\partial_n - \frac{n_1n_2'}{1+nc(s)}\partial_n.$$

En tenant compte du fait que $n_1^2 + n_2^2 = 1$, $n_1'(s) = c(s)n_2$ et $n_2'(s) = -c(s)n_1$ on aura

$$\Delta = \frac{1}{1+c(s)n}\partial_s\left(\frac{1}{1+c(s)n}\partial_s\right) + \partial_n^2 + c(s,n)\partial_n, \tag{2.3}$$

avec

$$c(s,n) = \frac{c(s)}{1+c(s)n}.$$

Développement asymptotique:

Afin de faire une analyse asymptotique par rapport au petit paramètre δ, il convient de faire une dilatation de la couche mince Ω_i lorsque δ varie. Avec le changement de variable $y = n/\delta$, l'opérateur ∂_n devient $\dfrac{1}{\delta}\partial_y$ et ∂_n^2 devient $\dfrac{1}{\delta^2}\partial_y^2$ par conséquent l'opérateur Laplacien (2.3) s'écrit:

$$\frac{1}{\delta^2}\partial_y^2 + \frac{1}{\delta}c(s,\delta y)\partial_y + \frac{1}{1+\delta c(s)y}\partial_s\left(\frac{1}{1+\delta c(s)y}\partial_s\right),$$

où $c(s,n)$ est la courbure au point (s,n) et $c(s) = c(s,0)$.
Nous écrivons un développement asymptotique de la solution u_i^δ dans la couche mince Ω_i^δ:

$$u_i^\delta(s,n) = u_i^0(s,y) + \delta\ u_i^1(s,y) + \delta^2\ u_i^2(s,y) + \dots. \tag{2.4}$$

De même nous écrivons un développement asymptotique de u_e^δ à l'extérieur de la couche Ω_i^δ:

$$u_e^\delta(s,n) = u_e^0(s,n) + \delta u_e^1(s,n) + \delta^2 u_e^2(s,n) + \dots. \tag{2.5}$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\delta} c(s,\delta y)\partial_y &= \frac{1}{\delta}\frac{c(s)}{1+\delta c(s) y}\partial_y \\
&= \frac{1}{\delta} c(s)\left[1 - \delta c(s) y + \delta^2 y^2 c(s)^2 - \delta^3 y^3 c(s)^3 + \dots\right]\partial_y,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\delta c(s)y}\partial_s\left(\frac{1}{1+\delta c(s)y}\partial_s\right) &= \frac{1}{1+\delta c(s)y}\left[\frac{1}{1+\delta c(s)y}\partial_s^2 + \partial_s\left(\frac{1}{1+\delta c(s)y}\right)\partial_s\right] \\
&= \frac{1}{1+\delta c(s)y}\left[\frac{1}{1+\delta c(s)y}\partial_s^2 + \frac{-\delta c'(s)y}{(1+\delta c(s)y)^2}\partial_s\right],
\end{aligned}$$

et

$$\frac{-\delta c'(s)y}{(1+\delta c(s)y)^2}\partial_s = -\delta c'(s)y\left[1 - 2\delta c(s)y + 3(\delta c(s)y)^3 + \cdots\right].$$

On injecte le développement asymptotique (2.4) de u_i^δ dans le problème (2.1) mis à l'échelle.
On obtient:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{\delta^2}\partial_y^2\left[u_i^0 + \delta u_i^1 + \delta^2 u_i^2 + \dots\right] + \frac{1}{\delta} c(s,\delta y)\partial_y\left(u_i^0 + \delta u_i^1 + \delta^2 u_i^2 + \dots\right) + \\
\frac{1}{1+\delta c(s)y}\partial_s\left(u_i^0 + \delta u_i^1 + \delta^2 u_i^2 + \dots\right)\left(\frac{1}{1+\delta c(s)y}\partial_s\left(u_i^0 + \delta u_i^1 + \delta^2 u_i^2 + \dots\right)\right) + \\
k^2 q\left(s,\frac{n}{\delta}\right)\left(u_i^0 + \delta u_i^1 + \delta^2 u_i^2 + \dots\right) = 0.
\end{gathered}$$

En identifiant les puissances successives de δ on trouve les équations suivantes:

- Termes de rang δ^{-2}:

$$\partial_y^2 u_i^0 = 0. \tag{2.6}$$

- Termes de rang δ^{-1}:

$$\partial_y^2 u_i^1 + c(s)\partial_y u_i^0 = 0. \tag{2.7}$$

- Termes de rang δ^0:

$$\partial_y^2 u_i^2 + c(s)\partial_y u_i^1 + \partial_s^2 u_i^0 + \partial_n c(s,0) y \partial_y u_i^0 + k^2 q(s,y) u_i^0 = 0. \tag{2.8}$$

Pour trouver l'expression de u_i^0 , u_i^1 et de u_i^2, on utilise la condition aux limites de type Neumann c'est à dire $\partial_y u_i^j(s,y)|_{y=-1} = 0$ pour $j = 0,1,2$.
L'équation (2.6) implique

$$\partial_y u_i^0(s,y) = \partial_y u_i^0(s,-1),$$

la condition aux limites de type Neumann entraîne

$$\partial_y u_i^0(s,-1) = 0,$$

ce qui donne

$$\partial_y u_i^0(s,y) = 0.$$

Ceci a pour conséquence:

$$u_i^0(s,y) = u_i^0(s,0).$$

L'équation (2.7) donne

$$\partial_y^2 u_i^1(s,y) = -c(s)\partial_y u_i^0(s,y) = 0,$$

et ceci signifie que

$$\partial_y u_i^1(s,y) = \partial_y u_i^1(s,-1).$$

En utilisant la condition aux limites de type Neumann, on aura

$$\partial_y u_i^1(s,y) = \partial_y u_i^1(s,-1) = 0,$$

ce qui donne

$$u_i^1(s,y) = u_i^1(s,0).$$

En tenant compte de l'expression de $u_i^0(s,y)$ et celle de $u_i^1(s,y)$, l'équation (2.8) devient

$$\partial_y^2 u_i^2(s,y) = -\partial_s^2 u_i^0(s,0) - k^2 q(s,y) u_i^0(s,0),$$

on a

$$\partial_y u_i^2(s,y) = \partial_y u_i^2(s,-1) + \int_{-1}^{y} \partial_{y'}^2 u_i^2(s,y')\ dy' = \int_{-1}^{y} \left(-\partial_s^2 u_i^0(s,0) - k^2 q(s,y') u_i^0(s,0)\right) dy',$$

ce qui implique

$$\partial_y u_i^2(s,y) = -(y+1)\partial_s^2 u_i^0(s,0) - k^2 u_i^0(s,0) \int_{-1}^{y} q(s,y')\ dy'.$$

D'autre part, on a

$$u_i^2(s,y) = u_i^2(s,0) + \int_0^y \partial_{y'} u_i^2(s,y')\ dy',$$

donc

$$u_i^2(s,y) = u_i^2(s,0) + \int_0^y -(y'+1)\partial_s^2 u_i^0(s,0)\ dy' - k^2 u_i^0(s,0) \int_0^y \int_{-1}^{y'} q(s,y'')\ dy'' dy',$$

on a alors

$$u_i^2(s,y) = u_i^2(s,0) - \frac{1}{2} y(y+2)\partial_s^2 u_i^0|_{y=0} - k^2 \left(\int_0^y \int_{-1}^{y'} q(s,y'') dy'' dy' \right) u_i^0|_{y=0},$$

ce qui donne:

$$u_i^2(s,y) = -\frac{1}{2}y(y+2)\partial_s^2 u_i^0|_{y=0} \quad - \quad k^2\left(\int_{-1}^{y}\int_{-1}^{y'} q(s,y'')dy''dy'\right)u_i^0|_{y=0} + u_i^2|_{y=0}$$
$$+ \quad k^2\left(\int_{-1}^{0}\int_{-1}^{y'} q(s,y'')dy''dy'\right)u_i^0|_{y=0}.$$

2.1.3 Conditions aux limites approchées

On utilise la technique des développements asymptotiques pour identifier des conditions aux limites approchées sur $\partial\Omega$ qui rendent compte de l'effet de la couche mince.L'idée consiste à approcher la solution par son développement asymptotique qu'on tronque à un ordre donné. Les conditions vérifiées par cette approximation sur $\partial\Omega$ fournissent les conditions aux limites approchées qui traduiront l'effet de la couche mince.

On définit le développement asymptotique tronqué à l'ordre j de u_i^δ par:

$$u_i^{\delta,j}(s,n) = u_i^0(s,y)|_{y=n/\delta} + \delta u_i^1(s,y)|_{y=n/\delta} + \ldots + \delta^j u_i^j(s,y)|_{y=n/\delta}, \tag{2.9}$$

De même on définit le développement asymptotique tronqué à l'ordre j de u_e^δ par:

$$u_e^{\delta,j}(s,n) = u_e^0(s,n) + \delta u_e^1(s,n) + \ldots + \delta^j u_e^j(s,n). \tag{2.10}$$

D'après le problème de transmission (2.1) on a

$$u_i^\delta|_{n\to 0-} = u_e^\delta|_{n\to 0+}.$$

En remplaçant $u_i^\delta|_{n\to 0-}$ par son développement asymptotique (2.4) on aura:

$$u_e^\delta|_{n\longrightarrow 0^+} = u_i^0(s,y)|_{y=0} + \delta u_i^1(s,y)|_{y=0} + \delta^2 u_i^2(s,y)|_{y=0} + \ldots.$$

On a aussi d'après le problème de transmission (2.1):

$$\partial_n u_i^\delta|_{n\to 0-} = \partial_n u_e^\delta|_{n\to 0+}.$$

En injectant le développement asymptotique de u_i^δ dans cette dernière on obtient:

$$\begin{aligned}
\partial_n u_e^\delta|_{n\longrightarrow 0^+} &= \partial_n u_i^\delta|_{n\longrightarrow 0^-} \\
&= \partial_n \left\{u_i^0|_{n\to 0-} + \delta u_i^1|_{n\to 0-} + \ldots\right\} \\
&= \frac{1}{\delta}\partial_y \left\{u_i^0(s,y)|_{y=0} + \delta u_i^1(s,y)|_{y=0} + \ldots\right\} \\
&= \frac{1}{\delta}\partial_y u_i^0(s,y)|_{y=0} + \partial_y u_i^1(s,y)|_{y=0} + \ldots
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Condition aux limites approchée d'ordre 0:

Pour obtenir une condition aux limites d'ordre 0, on tronque le développement asymptotique (2.9) de u_i^δ à l'ordre 1:

$$u_i^{\delta,1} = u_i^0 + \delta u_i^1.$$

Donc
$$\partial_n u_i^{\delta,1} = \partial_n(u_i^0 + \delta u_i^1) = \frac{1}{\delta}\partial_y(u_i^0 + \delta u_i^1). \tag{2.12}$$
En $y = 0$, on aura
$$\partial_n u_i^{\delta,1} = \frac{1}{\delta}\partial_y u_i^0 + \partial_y u_i^1 = 0. \tag{2.13}$$
D'après la relation (2.11), on a:
$$\partial_y u_i^1 = \partial_n u_e^0 \;\text{ et }\; \partial_y u_i^2 = \partial_n u_e^1,$$
donc
$$\partial_n u_e^{\delta,1} = \partial_n u_e^0 + \delta\ \partial_n u_e^1 = \underbrace{\partial_y u_i^1}_{0} + \delta\ \partial_y u_i^2 \quad \text{sur} \;\; \partial\Omega,$$
donc
$$\partial_n u_e^{\delta,1} = O(\delta) \quad \text{sur} \;\; \partial\Omega.$$
Pour obtenir la condition aux limites approchée d'ordre 0, on néglige le terme en $O(\delta)$ et ceci donne alors
$$\partial_n u_e^{\delta,1} = 0.$$
Ainsi, le problème avec condition approchée d'ordre 0 est donné par:
$$\begin{cases} \Delta\tilde{u}_e^{\delta,1} + k^2\ \tilde{u}_e^{\delta,1} = 0 & \text{dans} \;\; \Omega_e, \\ \partial_n\ \tilde{u}_e^{\delta,1} = 0 & \text{sur} \;\; \partial\Omega, \\ \tilde{u}_e^{\delta,1} - u^{in} \;\; \text{satisfait la condition de radiation sortante.} \end{cases} \tag{2.14}$$

Condition aux limites approchée d'ordre 1:
Calculons maintenant $\partial_n u_i^{\delta,2}$ pour obtenir la condition aux limites approchée d'ordre 1:
$$\partial_n u_i^{\delta,2} = \partial_n\left(u_i^0 + \delta u_i^1 + \delta^2 u_i^2\right) = \frac{1}{\delta}\partial_y\left(u_i^0 + \delta u_i^1 + \delta^2 u_i^2\right) = \frac{1}{\delta}\underbrace{\partial_y u_i^0}_{0} + \underbrace{\partial_y u_i^1}_{0} + \delta\partial_y u_i^2,$$
donc
$$\partial_n u_i^{\delta,2} = \delta\partial_y u_i^2 = \delta\left(-(y+1)\partial_s^2 u_i^0 - k^2 u_i^0 \int_{-1}^{y} q(s,y')\ dy'\right),$$
en $y = 0$, on aura:
$$\partial_n u_i^{\delta,2} = \delta\left(-\partial_s^2 u_i^0 - k^2 u_i^0 \int_{-1}^{0} q(s,y')\ dy'\right),$$
ceci donne
$$\partial_n u_i^{\delta,2} + \delta\partial_s^2 u_i^0 + \delta k^2 u_i^0 \int_{-1}^{0} q(s,y')\ dy' = 0,$$
d'après la relation (2.9) on a:
$$u_i^0 = u_i^{\delta,2} - \delta\ u_i^1 - \delta^2\ u_i^2.$$
En remplaçant cette dernière dans la formule précédente on aura:
$$\partial_n u_i^{\delta,2} + \delta\partial_s^2\left(u_i^{\delta,2} - \delta\ u_i^1 - \delta^2\ u_i^2\right) + \delta k^2 \int_{-1}^{0} q(s,y')\ dy' \left(u_i^{\delta,2} - \delta\ u_i^1 - \delta^2\ u_i^2\right) = 0,$$

donc

$$\partial_n u_i^{\delta,2}+\delta\partial_s^2 u_i^{\delta,2}-\delta^2\partial_s^2 u_i^1-\delta^3\partial_s^2 u_i^2+\delta k^2\int_{-1}^0 q(s,y')\,dy' u_i^{\delta,2}-\delta^2 u_i^1 k^2\int_{-1}^0 q(s,y')\,dy'-\delta^3 u_i^2 k^2\int_{-1}^0 q(s,y')\,dy'=0,$$

soit encore

$$\partial_n u_i^{\delta,2}+\delta\ k^2\int_{-1}^0 q(s,y')dy'\ u_i^{\delta,2}+\delta\ \partial_s^2 u_i^{\delta,2}=O(\delta^2),$$

ceci suggère l'idée de négliger le terme en $O(\delta^2)$, on obtient donc

$$\partial_n\ u_i^{\delta,2}+\delta\ k^2\ \tilde{q}(s)\ u_i^{\delta,2}+\delta\ \partial_s^2\ u_i^{\delta,2}=0 \qquad \text{sur} \qquad \partial\Omega,$$

où le coefficient de perméabilité magnétique effectif est donné par:

$$\tilde{q}(s)=\int_{-1}^0 q(s,y)\ dy. \tag{2.15}$$

Sur $\partial\Omega$ on a:

$$u_i^0=u_e^0 \Longrightarrow \partial_s u_i^0=\partial_s u_e^0,$$
$$u_i^1=u_e^1 \Longrightarrow \partial_s u_i^1=\partial_s u_e^1,$$
$$u_i^2=u_e^2 \Longrightarrow \partial_s u_i^2=\partial_s u_e^2.$$
$$\vdots$$

$$\begin{aligned}\partial_s^2 u_e^{\delta,2} &= \partial_{s^2}^2\left[u_e^0+\delta\ u_e^1+\delta^2\ u_e^2\right]\\ &= \partial_{s^2}^2 u_i^0+\delta\ \partial_{s^2}^2 u_i^1+\delta^2\ \partial_{s^2}^2 u_i^2\\ &= \partial_{s^2}^2 u_i^{\delta,2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_n\ u_i^{\delta,2} &= \partial_n\left[u_i^0+\delta\ u_i^1+\delta^2\ u_i^2\right]\\ &= \partial_n\ u_i^0+\delta\ \partial_n u_i^1+\delta^2\ \partial_n u_i^2,\end{aligned}$$

or, $\partial_n u_i^0=0$ donc

$$\partial_n u_i^{\delta,2}=\delta\ \partial_n u_i^1+\delta^2\ \partial_n u_i^2.$$

D'après la relation (2.11) on a:

$$\partial_y u_i^0=0$$
$$\partial_y u_i^1=\partial_n u_e^0,$$
$$\partial_y u_i^2=\partial_n u_e^1,$$
$$\partial_y u_i^3=\partial_n u_e^2,$$
$$\vdots$$

Alors

$$\partial_n u_e^{\delta,2}=\partial_y u_i^1+\delta\ \partial_y u_i^2+\delta^2\ \partial_y u_i^3=\delta\ \partial_n u_i^1+\delta^2\partial_n u_i^2+\delta^3\partial_n u_i^3.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\partial_n u_e^{\delta,2} + \delta\ k^2\ \tilde{q}\ u_e^{\delta,2} + \delta\ \partial_s^2 u_e^{\delta,2} &= \delta\ \partial_n u_i^1 + \delta^2 \partial_n u_i^2 + \delta^3 \partial_n u_i^3 + \delta\ k^2\ \tilde{q}\ u_i^{\delta,2} + \delta\ \partial_s^2 u_i^{\delta,2} \\
&= O(\delta^2) + \underbrace{\delta^3 \partial_n u_i^3}_{O(\delta^3)} \\
&= O(\delta^2).
\end{aligned}$$

D'où on obtient:

$$\partial_n u_e^{\delta,2} + \delta k^2 \tilde{q}(s) u_e^{\delta,2} + \delta \partial_s^2 u_e^{\delta,2} = 0 \qquad \text{sur} \quad \partial\Omega.$$

Ainsi, le problème avec condition approchée d'ordre 1 dans Ω_e est donné par:

$$\begin{cases}
\Delta \tilde{u}_e^{\delta,2} + k^2\ \tilde{u}_e^{\delta,2} = 0 & \text{dans} \ \ \Omega_e, \\
\partial_n\ u_e^{\delta,2} + \delta\ k^2\ \tilde{q}(s)\ u_e^{\delta,2} + \delta\ \partial_s^2\ u_e^{\delta,2} = 0 & \text{sur} \ \ \partial\Omega, \\
\tilde{u}_e^{\delta,2} - u^{in} \quad \text{satisfait la condition de radiation sortante.} &
\end{cases} \tag{2.16}$$

2.2 Problème de diffraction avec condition aux limites de type Dirichlet

D'une façon similaire au problème de diffraction avec condition de Neumann, on peut identifier des conditions aux limites approchées pour le problème de transmission, avec condition de Dirichlet.

Ainsi, on considère le problème (2.1), mais avec la condition $u_i^\delta = 0$ sur Γ_0. Un raisonnement analogue à celui de la section précédente permet de trouver l'expression des premiers termes du développement asymptotique de la solution du problème mis à l'échelle.

On obtient alors les problèmes résolus par u_i^0, u_i^1 et u_i^2, en utilisant les formules (2.6),(2.7) et (2.8).

D'après la formule (2.6) on a:

$$\partial_y^2 u_i^0(s,y) = 0,$$

ceci signifie que

$$\partial_y u_i^0(s,y) = \partial_y u_i^0(s,0).$$

On a

$$u_i^0(s,y) = u_i^0(s,-1) + \int_{-1}^{y} \partial_{y'} u_i^0(s,y')\ dy',$$

donc

$$u_i^0(s,y) = 0 + \int_{-1}^{y} \partial_y u_i^0(s,0) dy',$$

ce qui donne

$$u_i^0(s,y) = (y+1)\ \partial_y u_i^0(s,0). \tag{2.17}$$

D'après l'équation (2.7) on a

$$\partial_y^2 u_i^1(s,y) = -c(s)\ \partial_y u_i^0(s,y),$$

en remplaçant l'expression de u_i^0 dans cette dernière on obtient

$$\partial_y^2 u_i^1(s,y) = -c(s)\ \partial_y u_i^0(s,0),$$

on a

$$\partial_y u_i^1(s,y) = \partial_y u_i^1(s,0) + \int_0^y \partial_{y'}^2 u_i^1(s,y')dy',$$

donc

$$\partial_y u_i^1(s,y) = \partial_y u_i^1(s,0) + \int_0^y -c(s)\ \partial_y u_i^0(s,0)dy',$$

ce qui donne

$$\partial_y u_i^1(s,y) = \partial_y u_i^1(s,0) - c(s)y\ \partial_y u_i^0(s,0). \tag{2.18}$$

On a

$$u_i^1(s,y) = u_i^1(s,-1) + \int_{-1}^y \partial_{y'} u_i^1(s,y')dy',$$

donc

$$u_i^1(s,y) = \int_{-1}^y \left(\partial_y u_i^1(s,0) - c(s)y'\ \partial_y u_i^0(s,0)\right) dy',$$

ce qui donne

$$u_i^1(s,y) = (y+1)\ \partial_y u_i^1(s,y)|_{y=0} + \frac{c(s)}{2}(-y^2+1)\ \partial_y u_i^0|_{y=0}. \tag{2.19}$$

D'après l'équation (2.8) on a

$$\partial_y^2 u_i^2(s,y) = -c(s)\partial_y u_i^1(s,y) - \partial_s^2 u_i^0(s,y) - \partial_n c(s,0)\ y\ \partial_y u_i^0(s,y) - k^2\ q(s,y)\ u_i^0(s,y),$$

on injecte les formules (2.17) et (2.18) dans cette dernière équation, on obtient

$$\begin{aligned}\partial_y^2 u_i^2(s,y) = &- c(s)\left\{\partial_y u_i^1(s,0) - c(s)y\ \partial_y u_i^0(s,0)\right\} - \partial_s^2 (y+1)\ \partial_y u_i^0(s,0)\\ &- \partial_n\ c(s,0)\ y\ \partial_y u_i^0 - k^2\ q(s,y)\ (y+1)\ \partial_y\ u_i^0(s,0),\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\partial_y^2 u_i^2(s,y) = &- (y+1)\ \partial_s^2 \partial_y u_i^0(s,y)|_{y=0} - c(s)\partial_y\ u_i^1(s,y)|_{y=0} + c^2(s)\ y\ \partial_y\ u_i^0(s,y)|_{y=0}\\ &- \partial_n\ c(s,0)\ y\ \partial_y u_i^0 - k^2\ q(s,y)\ (y+1)\ \partial_y\ u_i^0(s,y)|_{y=0}.\end{aligned} \tag{2.20}$$

2.2.1 Conditions aux limites approchées

Pour obtenir la condition aux limites approchée d'ordre deux, on tronque le développement asymptotique de u_i^δ à l'ordre 2. Celle ci s'écrit alors

$$\left(1+\frac{\delta}{2}c(s)\right)\tilde{u}_e^{\delta,2} + \delta\partial_n \tilde{u}_e^{\delta,2} + \frac{\delta}{3}\left\{-\partial_{s^2}^2 \tilde{u}_e^{\delta,2} - \left(\frac{1}{4}c^2(s) - \partial_n c(s,0) - k^2\tilde{q}(s)\right)\tilde{u}_e^{\delta,2}\right\} = 0,$$

où

$$\tilde{q}(s) = -3\int_{-1}^0 \left(\int_{-1}^y q(s,y')(y'+1)dy'\right)dy + 3\int_{-1}^0 q(s,y)(y+1)dy. \tag{2.21}$$

Chapitre 3

Couches minces périodiques

L'objectif de ce chapitre est de construire des conditions aux limites approchées qui prendront compte l'effet de la couche mince dans le cas où la perméabilité magnétique de celle ci est périodique sur la diffraction d'une onde électromagnétique.

3.1 Position du problème

Soit donc Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^2$, son bord $\partial\Omega$ de classe C^∞. Soit δ un paramètre destiné à tendre vers zéro, et qui décrit l'épaisseur de la couche mince. $\Omega_i^\delta = \partial\Omega\times]-\delta,0[$ et Ω_e le complémentaire de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^2$.
On considère le problème de transmission suivant:

$$\begin{cases} \Delta u_i^\delta + k^2 q\left(s,\frac{s}{\delta},\frac{n}{\delta}\right) u_i^\delta = 0 & \text{dans } \Omega_i^\delta, \\ \Delta u_e^\delta + k^2 u_e^\delta = 0 & \text{dans } \Omega_e, \\ \partial_n u_i^\delta = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ u_i^\delta|_{n\to 0-} = u_e^\delta|_{n\to 0+}, \;\; \partial_n u_i^\delta|_{n\to 0-} = \partial_n u_e^\delta|_{n\to 0+}, & \\ u_e^\delta - u^{in} \quad \text{satisfait la condition de radiation sortante.} & \end{cases} \tag{3.1}$$

Où le coefficient de perméabilité magnétique q est périodique en la variable s/δ de période un et égal à 1 à l'extérieur de la couche Ω_i^δ.
L'expression du Laplacien en coordonnées locales (s,n)**:**

$$\Delta = \frac{1}{1+c(s)n}\partial_s\left(\frac{1}{1+c(s)n}\partial_s\right) + \partial_n^2 + c(s,n)\partial_n, \tag{3.2}$$

avec

$$c(s,n) = \frac{c(s)}{1+c(s)n}.$$

En effectuant le changement de variable $x = s/\delta$, on aura

$$\partial_s v_i^j = \frac{\partial v_i^j}{\partial s}\frac{ds}{ds} + \frac{\partial v_i^j}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial v_i^j}{\partial y}\frac{dy}{ds},$$

ceci donne:

$$\partial_s v_i^j = \frac{\partial v_i^j}{\partial_s} + \frac{1}{\delta}\frac{\partial v_i^j}{\partial x}.$$

L'expression du Laplacien (3.2) avec ce changement de variale devient alors:

$$\Delta = \frac{1}{1+c(s)n}\left(\partial_s + \frac{1}{\delta}\partial_x\right)\left(\frac{1}{1+c(s)n}\left(\partial_s + \frac{1}{\delta}\partial_x\right)\right) + \frac{1}{\delta^2}\partial_{y^2}^2 + c(s,n)\frac{1}{\delta}\partial_n,$$

ce qui donne en regroupant les mêmes puissances de δ:

$$\frac{1}{\delta^2}\left[\frac{1}{(1+\delta c(s)y)^2}\partial_x^2 + \partial_y^2\right] + \frac{1}{\delta}\left[\frac{1}{(1+\delta c(s)y)^2}\partial_x\partial_s + \frac{1}{1+\delta c(s)y}\partial_s\left(\frac{1}{1+\delta c(s)y}\partial_x\right) + c(s,\delta y)\partial_y\right]$$
$$+\frac{1}{1+\delta c(s)y}\partial_s\left(\frac{1}{1+\delta c(s)y}\partial_s\right). \tag{3.3}$$

On écrit le développement asymptotique de u_i^δ dans Ω_i^δ comme suit:

$$u_i^\delta(s,n) = u_i^0(s,x,y) + \delta u_i^1(s,x,y) + \delta^2 u_i^2(s,x,y) + \ldots, \tag{3.4}$$

avec $x = s/\delta$, $y = n/\delta$ et u_i^j est périodique en la variable $x = s/\delta$ de période 1 pour tout entier naturel j.

De même on écrit le développement asymptotique de u_e^δ à l'extérieur de la couche mince périodique

$$u_e^\delta(s,n) = u_e^0(s,n) + \delta u_e^1(s,n) + \delta^2 u_e^2(s,n) + \ldots.$$

On pose

$$v_i^\delta(s,n) = u_i^\delta(s,n) - u_e^\delta(s,n)|_{n=0}. \tag{3.5}$$

Le développement asymptotique de $v_i^\delta(s,n)$ s'écrit

$$v_i^\delta(s,n) = v_i^0(s,x,y) + \delta v_i^1(s,x,y) + \delta^2 v_i^2(s,x,y) + \ldots, \tag{3.6}$$

avec $y = n/\delta$.

Le développement asymptotique de u_e^δ s'écrit:

$$u_e^\delta(s,n)|_{n=0} = u_e^0(s,n)|_{n=0} + \delta u_e^1(s,n)|_{n=0} + \ldots \tag{3.7}$$

On applique l'opérateur Laplacien à v_i^δ dans la couche mince Ω_i^δ:

$$\begin{aligned}
\Delta v_i^\delta(s,n) &= \Delta\left[u_i^\delta(s,n) - u_e^\delta(s,n)|_{n=0}\right]\\
&= \Delta\left[u_i^\delta\right] - \Delta\left[u_e^\delta(s,n)|_{n=0}\right]\\
&= -k^2 q\left(s,\frac{s}{\delta},\frac{n}{\delta}\right)u_i^\delta - \Delta\left[u_e^\delta(s,n)|_{n=0}\right]\\
&= -k^2 q\left(s,\frac{s}{\delta},\frac{n}{\delta}\right)u_i^\delta - \left(\partial_s^2+\partial_n^2\right)\left[u_e^\delta(s,n)|_{n=0}\right]\\
&= -k^2 q\left(s,\frac{s}{\delta},\frac{n}{\delta}\right)u_i^\delta - \partial_s^2\left(u_e^\delta(s,n)|_{n=0}\right) - \underbrace{\partial_n^2\left(u_e^\delta(s,n)|_{n=0}\right)}_{0},
\end{aligned}$$

donc

$$\Delta v_i^\delta(s,n) = -k^2 q\left(s,\frac{s}{\delta},\frac{n}{\delta}\right)u_i^\delta - \partial_s^2 u_e^\delta(s,n)|_{n=0}. \tag{3.8}$$

On injecte les développements asymptotiques (3.4) ,(3.6) et (3.7) dans (3.8)

$$\begin{aligned}
\Delta\left[v_i^0(s,x,y)+\delta v_i^1(s,x,y)+\ldots\right] = &- k^2 q\left(s,\frac{s}{\delta},\frac{n}{\delta}\right)\left(u_i^0(s,x,y)+\delta u_i^1(s,x,y)+\ldots\right)\\
&- \partial_s^2\left[u_e^0(s,n)|_{n=0}+\delta u_e^1(s,n)|_{n=0}+\ldots\right].
\end{aligned}$$

En identifiant les puissances successives de δ on obtient:

– Termes de rang δ^{-2}:
$$(\partial_x^2+\partial_y^2)v_i^0 = 0. \tag{3.9}$$

– Termes de rang δ^{-1}:
$$(\partial_x^2+\partial_y^2)v_i^1 = 0. \tag{3.10}$$

– Termes de rang δ^{0}:
$$(\partial_x^2+\partial_y^2)v_i^2 = -\partial_s^2 u_e^0(s,n)|_{n=0} - k^2 q(s,x,y)u_i^0. \tag{3.11}$$

On a l'équation (3.9) avec les conditions aux limites en $y=0$ et $y=-1$:

$$\begin{cases}
\Delta_{x,y} v_i^0 = 0,\\
v_i^0(s,x,0) = 0,\\
\partial_n v_i^0(s,x,-1) = 0,
\end{cases} \tag{3.12}$$

d'après Lax-Milgram on a existence et unicité de la solution v_i^0 et comme on a la solution 0 vérifie le problème (3.12), on déduit alors que $v_i^0 = 0$.

De même, l'équation (3.10) avec les conditions aux limites en $y = 0$ et $y = -1$:

$$\begin{cases} \Delta_{x,y} v_i^1 = 0, \\ v_i^1(s,x,0) = 0, \\ \partial_n v_i^1(s,x,-1) = 0, \end{cases} \tag{3.13}$$

d'après Lax-Milgram on a existence et unicité de la solution v_i^1, comme on a la solution 0 vérifie le problème (3.13) on déduit que $v_i^1 = 0$.

Du fait que $v_i^0 = 0$ donc

$$u_i^0(s,n) - u_e^0(s,n)|_{n=0} = 0,$$

ceci donne

$$u_i^0(s,n) = u_e^0(s,n)|_{n=0}.$$

L'équation (3.11) devient alors:

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2) v_i^2 = -\partial_s^2 u_e^0(s,n)|_{n=0} - k^2\ q(s,x,y)\ u_e^0(s,n)|_{n=0}. \tag{3.14}$$

3.2 Condition aux limites approchée

On définit $\tilde{u}_i^j(s,y)$ comme la moyenne par rapport à la variable x de la fonction $u_i^j(s,x,y)$

$$\tilde{u}_i^j(s,y) = \int_0^1 u_i^j(s,x,y) dx.$$

On définit le développement asymptotique tronqué à l'ordre j de $\tilde{u}_i^{\delta,j}$ et de $u_e^{\delta,j}$ comme suit:

$$\tilde{u}_i^{\delta,j}(s,y) = \tilde{u}_i^0(s,y) + \delta \tilde{u}_i^1(s,y) + \ldots + \delta^j \tilde{u}_i^j(s,y), \tag{3.15}$$

$$u_e^{\delta,j}(s,n) = u_e^0(s,n) + \delta u_e^1(s,n) + \ldots + \delta^j u_e^j(s,n). \tag{3.16}$$

Nous allons maintenant écrire des conditions aux limites approchées d'ordre 0 et d'ordre 1 pour le problème (3.1), pour cela nous écrivons $\partial_y \tilde{u}_i^{\delta,j}(s,y)|_{y=0}$ en fonction de $\tilde{u}_i^{\delta,j}|_{y=0}$ et de ses dérivées par rapport à la variable tangentielle s.

On exploite l'équation (3.9) qui est donnée par

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2) v_i^0(s,x,y) = 0,$$

ceci donne

$$\partial_x^2 u_i^0(s,x,y) - \partial_x^2 u_e^0(s,n)|_{n=0} + \partial_y^2 u_i^0(s,x,y) - \partial_y^2 u_e^0(s,n)|_{n=0} = 0,$$

ce qui implique donc

$$\partial_x^2 u_i^0(s,x,y) + \partial_y^2 u_i^0(s,x,y) = 0.$$

En prenant la moyenne par rapport à x dans cette dernière équation, on obtient

$$\int_0^1 \partial_x^2 u_i^0(s,x,y)\ dx + \int_0^1 \partial_y^2 u_i^0(s,x,y)\ dx = 0,$$

ceci donne

$$\partial_x u_i^0(s,1,y) - \partial_x u_i^0(s,0,y) + \partial_y^2 \int_0^1 u_i^0(s,x,y)dx = 0.$$

Par hypothèse u_i^0 est périodique par rapport à x de période égale à 1 alors de même $\partial_x u_i^0$ est périodique en x de période égale à 1. Alors on déduit que:

$$\partial_x u_i^0(s,1,y) = \partial_x u_i^0(s,0,y),$$

ce qui donne

$$\partial_y^2 \int_0^1 u_i^0(s,x,y)\ dx = 0,$$

i,e

$$\partial_y^2 \tilde{u}_i^0(s,y) = 0. \tag{3.17}$$

En utilisant la condition aux limites

$$\partial_y v_i^0(s,x,y) = 0 \quad \text{pour} \quad y = -1,$$

on aura

$$\partial_y u_i^0(s,x,-1) - \partial_y u_e^0(s,n)|_{n=0} = 0,$$

et ceci implique

$$\partial_y u_i^0(s,x,-1) = 0,$$

en prenant la moyenne par rapport à x dans cette dernière équation, on obtient

$$\partial_y \tilde{u}_i^0(s,-1) = 0.$$

L'équation (3.17)

$$\partial_y^2 \tilde{u}_i^0(s,y) = 0,$$

signifie que

$$\partial_y \tilde{u}_i^0(s,y) = \partial_y \tilde{u}_i^0(s,-1) = 0, \tag{3.18}$$

ceci donne

$$\partial_y \tilde{u}_i^0(s,y)|_{y=0} = 0. \tag{3.19}$$

D'après l'équation (3.10) on a

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2) v_i^1(s,x,y) = 0,$$

ceci implique

$$\partial_x^2 u_i^1(s,x,y) - \partial_x^2 u_e^1(s,n)|_{n=0} + \partial_y^2 u_i^1(s,x,y) - \partial_y^2 u_e^1(s,n)|_{n=0} = 0,$$

ceci donne

$$\partial_x^2 u_i^1(s,x,y) + \partial_y^2 u_i^1(s,x,y) = 0.$$

En prenant la moyenne par rapport à x dans cette dernière équation, on obtient

$$\int_0^1 \partial_x^2 u_i^1(s,x,y)\ dx + \int_0^1 \partial_y^2 u_i^1(s,x,y)\ dx = 0,$$

ce qui donne

$$\partial_x u_i^1(s,1,y) - \partial_x u_i^1(s,0,y) + \partial_y^2 \int_0^1 u_i^1(s,x,y)\ dx = 0.$$

Par hypothèse u_i^1 est périodique par rapport à x de période égale à 1 alors de même $\partial_x u_i^1$ est périodique en x de période égale à 1, on déduit alors

$$\partial_x u_i^1(s,1,y) = \partial_x u_i^1(s,0,y),$$

ce qui implique

$$\partial_y^2 \int_0^1 u_i^1(s,x,y)\ dx = 0.$$

i,e

$$\partial_y^2 \tilde{u}_i^1(s,y) = 0. \tag{3.20}$$

D'après la condition aux limites

$$\partial_y v_i^1(s,x,y) = 0 \quad \text{pour } y = -1,$$

on déduit que

$$\partial_y u_i^1(s,x,-1) - \partial_y u_e^1(s,n)|_{n=0} = 0,$$

ceci implique

$$\partial_y u_i^1(s,x,-1) = 0,$$

on prend la moyenne par rapport à x dans cette dernière équation

$$\int_0^1 \partial_y u_i^1(s,x,-1) dx = 0,$$

ceci donne

$$\partial_y \int_0^1 u_i^1(s,x,-1) dx = 0,$$

i,e

$$\partial_y \tilde{u}_i^1(s,-1) = 0.$$

L'équation (3.20) signifie que

$$\partial_y \tilde{u}_i^1(s,y) = \partial_y \tilde{u}_i^1(s,-1) = 0, \tag{3.21}$$

ce qui donne

$$\partial_y \tilde{u}_i^1(s,y)|_{y=0} = 0. \tag{3.22}$$

3.2.1 Condition aux limites approchée pour le problème de Neumann

Condition aux limites approchée d'ordre 0:

$$\partial_n \tilde{u}_i^{\delta,0} = \partial_n \tilde{u}_i^0 = \frac{1}{\delta} \partial_y \tilde{u}_i^0.$$

En $y = 0$,

$$\partial_n \tilde{u}_i^{\delta,0}(s,y)|_{y=0} = \frac{1}{\delta}\ \partial_y \tilde{u}_i^0(s,y)|_{y=0} = 0,$$

i,e:

$$\partial_n \tilde{u}_i^{\delta,0}(s,y) = 0 \qquad \text{sur} \ \ \partial\Omega.$$

$$\partial_n \tilde{u}_e^{\delta,0} = \partial_n u_e^0 = \partial_y u_i^1 = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega.$$

$$\partial_n \tilde{u}_i^{\delta,1} = \partial_n \ \left(\tilde{u}_i^0 + \delta \tilde{u}_i^1\right) = \frac{1}{\delta}\ \partial_y \left(\tilde{u}_i^0 + \delta\ \tilde{u}_i^1\right) = \frac{1}{\delta}\ \partial_y\ \tilde{u}_i^0 + \partial_y\ \tilde{u}_i^1.$$

En $y = 0$,

$$\partial_n \tilde{u}_i^{\delta,1} = \frac{1}{\delta}\ \partial_y\ \tilde{u}_i^0|_{y=0} + \partial_y\ \tilde{u}_i^1|_{y=0} = 0,$$

on obtient donc

$$\partial_n \tilde{u}_i^{\delta,1} = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega,$$

$$\partial_n \tilde{u}_e^{\delta,1} = \partial_n (u_i^0 + \delta u_e^1) = \partial_n u_e^0 + \delta \partial_n u_e^1 = \partial_y u_i^1 + \delta \partial_y u_i^2 = \delta \partial_y u_i^2,$$

donc

$$\partial_n \tilde{u}_e^{\delta,1} = \delta \partial_y u_i^2 = O(\delta).$$

Ceci suggère l'idée de négliger le terme $O(\delta)$ pour obtenir une condition aux limites approchée d'ordre 0. Cette condition s'écrit alors

$$\partial_n \tilde{u}_e^{\delta,1} = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega.$$

Ainsi, le problème avec condition aux limites approchée d'ordre 0 est donné par:

$$\begin{cases} \Delta \tilde{u}_e^{\delta,1} + k^2 \tilde{u}_e^{\delta,1} = 0 & \text{dans } \Omega_e, \\ \partial_n \tilde{u}_e^{\delta,1} = 0 \ \text{ et } \ \partial_n \tilde{u}_e^{\delta,0} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \tilde{u}^{\delta,1} - u^{in} \quad \text{satisfait la condition de radiation sortante.} \end{cases} \tag{3.23}$$

Condition aux limites approchée d'ordre 1:

On rappelle l'équation (3.14)

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2) v_i^2 = -\partial_s^2 u_e^0(s,n)|_{n=0} - k^2\ q(s,x,y)\ u_e^0(s,n)|_{n=0}.$$

Pour obtenir la condition aux limites approchée d'ordre 2, on prend la moyenne par rapport à x dans l'équation (3.14)

$$\int_{-1}^0 \partial_x^2 v_i^2(s,x,y)dx + \int_{-1}^0 \partial_y^2 v_i^2(s,x,y)dx = \int_{-1}^0 \left(-\partial_s^2 u_e^0(s,n)|_{n=0}\right) dx + \int_{-1}^0 \left(-k^2\ q(s,x,y)\ u_e^0(s,n)|_{n=0}\right),$$

ceci donne:

$$\partial_x v_i^2(s,-1,y) - \partial_x v_i^2(s,0,y) + \partial_y^2 \int_{-1}^{0} v_i^2(s,x,y)dx = -\partial_s^2 u_e^0(s,n)|_{n=0} - k^2 \left(\int_{-1}^{0} q(s,x,y)dx \right) u_e^0(s,n)|_{n=0},$$

or on a v_i^2 est périodique en x de période égale à 1 ce qui implique que $\partial_x v_i^2$ est de période égale à 1 donc

$$\partial_x v_i^2(s,-1,y) = \partial_x v_i^2(s,0,y),$$

ce qui donne:

$$\partial_y^2 \tilde{v}_i^2(s,y) = -\partial_s^2 u_e^0(s,n)|_{n=0} - k^2 \left(\int_{-1}^{0} q(s,x,y)dx \right) u_e^0(s,n)|_{n=0}.$$

Par ailleurs on a

$$v_i^2(s,x,y) = u_i^2(s,x,y) - u_e^0(s,n)|_{n=0},$$

ceci entraîne

$$\partial_y^2 v_i^2(s,x,y) = \partial_y^2 u_i^2(s,x,y) - \partial_y^2 u_e^0(s,n)|_{n=0},$$

donc

$$\partial_y^2 v_i^2(s,x,y) = \partial_y^2 u_i^2(s,x,y).$$

En prenant la moyenne par rapport à x dans cette dernière on aura:

$$\int_{-1}^{0} \partial_y^2 v_i^2(s,x,y)dx = \int_{-1}^{0} \partial_y^2 u_i^2(s,x,y)dx,$$

ceci donne

$$\partial_y^2 \int_{-1}^{0} v_i^2(s,x,y)dx = \partial_y^2 \int_{-1}^{0} u_i^2(s,x,y)dx,$$

on obtient alors

$$\partial_y^2 \tilde{v}_i(s,y) = \partial_y^2 \tilde{u}_i^2(s,y),$$

du coût on aura:

$$\partial_y^2 \tilde{u}_i^2(s,y) = \partial_y^2 \tilde{v}_i^2(s,y) = -\partial_s^2 u_e^0(s,n)|_{n=0} - k^2 \left(\int_{-1}^{0} q(s,x,y)dx \right) u_e^0(s,n)|_{n=0}. \tag{3.24}$$

Calculons maintenant:

$$\begin{aligned}
\partial_n \tilde{u}_i^{\delta,2} &= \partial_n \left(\tilde{u}_i^0 + \delta \tilde{u}_i^1 + \delta^2 \tilde{u}_i^2 \right) \\
&= \frac{1}{\delta} \left(\tilde{u}_i^0 + \delta \tilde{u}_i^1 + \delta^2 \tilde{u}_i^2 \right) \\
&= \frac{1}{\delta} \partial_y \tilde{u}_i^0 + \partial_y \tilde{u}_i^1 + \delta \partial_y \tilde{u}_i^2.
\end{aligned}$$

En $y = 0$, on aura:

$$\partial_n \tilde{u}_i^{\delta,2} = \delta \partial_y \tilde{u}_i^2,$$

grace à (3.24) on obtient:

$$\partial_n \tilde{u}_i^{\delta,2} = \delta \left(-\partial_s^2 u_e^0(s,n)|_{n=0} - k^2 \left(\int_{-1}^{0} \int_{-1}^{0} q(s,x,y)dxdy \right) u_e^0(s,n)|_{n=0} \right).$$

On aura donc:

$$\partial_n \tilde{u}_i^{\delta,2} + \delta \partial_s^2 u_e^0(s,n)|_{n=0} + \delta k^2 \tilde{q}(s) u_e^0(s,n)|_{n=0} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

où le coefficient de perméabilité magnétique est donné par:

$$\tilde{q}(s) = \int_{-1}^{0} \int_{0}^{1} q(s,x,y) dx dy.$$

En tenant compte de l'identité:

$$\tilde{u}_i^0(s,y)|_{y=0} = u_e^0(s,n)|_{n=0},$$

on aura alors:

$$\partial_n \tilde{u}_i^{\delta,2} + \delta \partial_s^2 \tilde{u}_i^0 + \delta k^2 \tilde{q}(s) \tilde{u}_i^0 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{3.25}$$

On tronque le développement asymptotique (3.15) de u_i^δ à l'ordre 2, on aura:

$$\tilde{u}_i^{\delta,2} = \tilde{u}_i^0 + \delta \tilde{u}_i^1 + \delta^2 \tilde{u}_i^2,$$

ceci nous donne:

$$\tilde{u}_i^0 = \tilde{u}_i^{\delta,2} - \delta \tilde{u}_i^1 - \delta^2 \tilde{u}_i^2.$$

En injectant cette dernière dans (3.25), on aura:

$$\partial_n \tilde{u}_i^{\delta,2} + \delta \partial_s^2 \left(\tilde{u}_i^{\delta,2} - \delta \tilde{u}_i^1 - \delta^2 \tilde{u}_i^2 \right) + \delta k^2 \tilde{q}(s) \left(\tilde{u}_i^{\delta,2} - \delta \tilde{u}_i^1 - \delta^2 \tilde{u}_i^2 \right) = 0,$$

ceci donne:

$$\partial_n \tilde{u}_i^{\delta,2} + \delta \partial_s^2 \tilde{u}_i^{\delta,2} - \delta^2 \partial_s^2 \tilde{u}_i^1 - \delta^3 \partial_s^2 \tilde{u}_i^2 + \delta k^2 \tilde{q}(s) \tilde{u}_i^{\delta,2} - \delta^2 k^2 \tilde{q}(s) \tilde{u}_i^1 - \delta^3 k^2 \tilde{q}(s) \tilde{u}_i^2 = 0,$$

soit encore:

$$\partial_n \tilde{u}_i^{\delta,2} + \delta \partial_s^2 \tilde{u}_i^{\delta,2} + \delta k^2 \ \tilde{q}(s) \tilde{u}_i^{\delta,2} = O(\delta^2),$$

on a d'après le problème de transmission (3.1):

$$\begin{aligned} \partial_n \tilde{u}_e^{\delta,2} &= \partial_n u_e^0 + \delta \partial_n u_e^1 + \delta^2 \partial_n u_e^2 \\ &= \partial_y u_i^1 + \delta \partial_y u_i^2 + \delta^2 \partial_y u_i^3 \\ &= \delta \partial_n u_i^1 + \delta^2 \partial_n u_i^2 + \delta^3 \partial_n u_i^3, \end{aligned}$$

on aussi sur $\partial\Omega$:

$$\begin{aligned} \partial_s \tilde{u}_e^{\delta,2} &= \partial_s u_e^0 + \delta \partial_s u_e^1 + \delta^2 \partial_s u_e^2 \\ &= \partial_s u_i^0 + \delta \partial_s u_i^1 + \delta^2 \partial_s u_i^2 \\ &= \partial_s \tilde{u}_i^{\delta,2}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \partial_n \tilde{u}_e^{\delta,2} + \delta \ \partial_s^2 \tilde{u}_e^{\delta,2} + \delta k^2 \tilde{q}(s) \tilde{u}_e^{\delta,2} &= \delta \partial_n u_i^1 + \delta^2 \partial_n u_i^2 + \delta^3 \partial_n u_i^3 + \delta \partial_s^2 \tilde{u}_i^{\delta,2} + \delta k^2 \tilde{q}(s) \tilde{u}_i^{\delta,2} \\ &= \partial_n \tilde{u}_i^{\delta,2} + \delta^3 \partial_n u_i^3 + \delta \partial_s^2 \tilde{u}_i^{\delta,2} + \delta k^2 \tilde{q}(s) \tilde{u}_i^{\delta,2} \\ &= O(\delta^2) + \delta^3 \partial_n u_i^3 \\ &= O(\delta^2). \end{aligned}$$

En négligeant le terme en $O(\delta^2)$, on obtient:

$$\partial_n \tilde{u}_e^{\delta,2} + \delta k^2 \tilde{q}(s)\tilde{u}_e^{\delta,2} + \delta\partial_s^2 \tilde{u}_e^{\delta,2} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \tag{3.26}$$

Par conséquent le problème avec condition approchée d'ordre 1 est donné par:

$$\begin{cases} \Delta\tilde{u}_e^{\delta,2} + k^2\tilde{u}_e^{\delta,2} = 0 & \text{dans} \quad \Omega_e, \\ \partial_n \tilde{u}_e^{\delta,2} + \delta k^2 \tilde{q}(s)\tilde{u}_e^{\delta,2} + \delta\partial_s^2 \tilde{u}_e^{\delta,2} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \\ \tilde{u}^{\delta,2} - u^{in} \quad \text{satisfait la condition de radiation sortante.} \end{cases} \tag{3.27}$$

3.2.2 Cas d'une condition aux limites de type Dirichlet

Des calculs semblables dans le cas des conditions de Dirichlet permettront d'écrire des conditions aux limites approchées d'ordre 0,1 et 2 suivantes:

– Condition aux limites approchées d'ordre 0

$$\tilde{u}_e^{\delta,0} = 0.$$

– Condition aux limites approchées d'ordre 1

$$\left(1 + \frac{\delta}{2}c(s)\right)\tilde{u}_e^{\delta,2} + \delta\ \partial_n \tilde{u}_e^{\delta,1} = 0.$$

– Condition aux limites approchées d'ordre 2

$$\left(1 + \frac{\delta}{2}c(s)\right)\tilde{u}_e^{\delta,2} + \delta\ \partial_n\ \tilde{u}_e^{\delta,2} + \frac{\delta^2}{3}\left\{-\partial_{s^2}^2\ \tilde{u}_e^{\delta,2} - \left(\frac{1}{4}c^2(s) - \partial_n c(s,0) + \tilde{q}(s)\partial_s^2\right)\tilde{u}_e^{\delta,2}\right\} = 0,$$

où

$$\tilde{q}(s) = -3\int_{-1}^{0}\left\{\int_{-1}^{y} q(s,y')(y'+1)dy'\right\}dy + 3\int_{-1}^{0} q(s,y)(y+1)dy.$$

3.3 Estimation d'erreur

Dans cette section, nous essayons d'estimer l'erreur entre la solution du problème initial u^δ et les solutions des problèmes approchés $\tilde{u}_e^{\delta,0}$ et $\tilde{u}_e^{\delta,1}$. En d'autres termes, il s'agit d'évaluer les différences $u^\delta - \tilde{u}_e^{\delta,0}$ et $u^\delta - \tilde{u}_e^{\delta,1}$ en norme H^1. Soient Ω_e^R et Ω_δ^R deux domaines définis par :

$$\Omega_e^R = \Omega_e \cap \{|x| < R\}, \;\; \Omega_\delta^R = \Omega_e^R \cup \Omega_i^\delta \cup \partial\Omega,$$

où R désigne un réel positif assez grand.
Soient (r,θ) un système de coordonnées polaires associé à une origine $O \in \Omega_i$, où $r = |x|$, $S_R = \{r = R\}$ est le cercle de rayon R et de centre O.

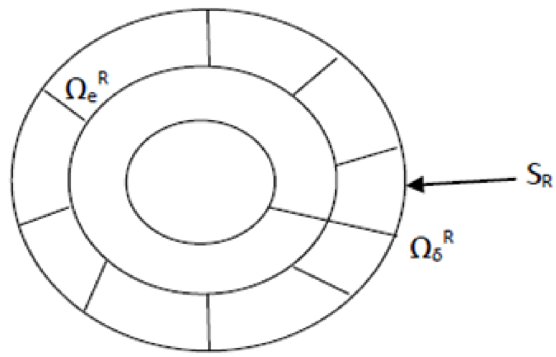

FIG. 3.1 – Le domaine tronqué.

On note

$$u^\delta = \begin{cases} u_i^\delta & \text{dans } \Omega_i^\delta, \\ \\ u_e^\delta & \text{dans } \Omega_e. \end{cases}$$

Définition 3.1. On définit l'opérateur électromagnétique extérieur comme suit:

$$\begin{cases} T_R : H^{1/2}(S_R) & \to H^{-1/2}(S_R) \\ \qquad u\mid_{S_R} & \mapsto \partial_n u|_{S_R} \end{cases}$$

où u est solution de l'équation de Helmholtz $(\Delta + k^2)u = 0$ (plus la condition de radiation sortante) dans le domaine extérieur $\{|x| > R\}$.

Lemme 3.1. *L'opérateur T_R est continu de $T_R : H^{1/2}(S_R) \mapsto H^{-1/2}(S_R)$ Il vérifie les inégalités suivantes :*

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{L^2(S_R)} & \leq -\mathfrak{Re}(T_R u, \overline{u}) \leq & \|u\|^2_{H^{1/2}(S_R)}, \\ 0 & \leq \mathfrak{Im}(T_R u, \overline{u}) \leq & k\|u\|^2_{L^2(S_R)}. \end{aligned}$$

Où (,) le crochet de dualité $H^{-1/2}(s_R)$,$H^{1/2}(s_R)$.

3.3.1 Formulation variationnelle du problème (3.1)

On multiplie la première et la deuxième équation du problème (3.1) par une fonction test $u^t \in H^1(\Omega_\delta^R)$ avec

$$u^t = \begin{cases} u_e^t & \text{dans } \Omega_e^R, \\ \\ u_i^t & \text{dans } \Omega_i^\delta, \end{cases}$$

et puis on intègre sur Ω_δ^R:

$$\int_{\Omega_i^\delta} \Delta u_i^\delta u_i^t + \int_{\Omega_i^\delta} k^2 q^\delta u_i^\delta u_i^t + \int_{\Omega_e^R} \Delta u_e^\delta u_e^t + \int_{\Omega_e^R} k^2 u_e^\delta u_e^t = 0,$$

en appliquant la formule de Green (formule d'integration par partie), on aura:

$$-\int_{\Omega_i^\delta} \nabla u_i^\delta \nabla u_i^t + \int_{\partial\Omega_i^\delta} \partial_n u_i^\delta u_i^t + k^2 \int_{\Omega_i^\delta} q\left(s,\frac{s}{\delta},\frac{n}{\delta}\right) u_i^\delta u_i^t - \int_{\Omega_e^R} \nabla u_e^\delta \nabla u_e^t + \int_{\partial\Omega_e^R} \partial_n u_e^\delta u_e^t + k^2 \int_{\Omega_e^R} u_e^\delta u_e^t = 0,$$

ceci donne

$$\int_{\Omega_i^\delta} \nabla u_i^\delta \nabla u_i^t - k^2 \int_{\Omega_i^\delta} q\left(s,\frac{s}{\delta},\frac{n}{\delta}\right) u_i^\delta u_i^t + \int_{\Omega_e^R} \nabla u_e^\delta \nabla u_e^t - \int_{S_R} \partial_n u_e^\delta u_e^t - k^2 \int_{\Omega_e^R} u_e^\delta u_e^t = 0,$$

d'où

$$\int_{\Omega_i^\delta} \nabla u_i^\delta \nabla u_i^t - k^2 \int_{\Omega_i^\delta} q\left(s,\frac{s}{\delta},\frac{n}{\delta}\right) u_i^\delta u_i^t + \int_{\Omega_e^R} \nabla u_e^\delta \nabla u_e^t - \left\langle T_R(u_e^\delta),u_e^t\right\rangle - k^2 \int_{\Omega_e^R} u_e^\delta u_e^t = 0,$$

on obtient

$$\int_{\Omega_e^R} \nabla u_e^\delta \nabla u_e^t - k^2 \int_{\Omega_e^R} u_e^\delta u_e^t - \left\langle T_R(u_e^\delta),u_e^t\right\rangle + \int_{\Omega_i^\delta} \nabla u_i^\delta \nabla u_i^t - k^2 \int_{\Omega_i^\delta} q^\delta u_i^\delta u_i^t = (f^{in},u^t), \tag{3.28}$$

si on pose

$$q^\delta = q(s,s/\delta,n/\delta) \quad \text{et} \quad f^{in} = T_R(u^{in}) - \partial_r u^{in}\,|_{S_R}\,.$$

Changement d'échelle:

Pour toute fonction $u_i \in \Omega_i^\delta$ on note $\hat{u}_i(y) = u_i(\delta y)$, pour tout $y \in]-1,0[$, on écrit:

$$\int_{\Omega_i^\delta} \nabla u_i^\delta \nabla u_i^t = \delta \int_{\partial\Omega}\int_{-1}^{0} (1+\delta y c(s))^{-1}\,\partial_s\,\hat{u}_i^\delta\,\partial_s\,\hat{u}_i^t\,dyds + \delta^{-1}\int_{\partial\Omega}\int_{-1}^{0} (1+\delta y c(s))\,\partial_y\hat{u}_i^\delta\partial_y\hat{u}_i^t\,dyds,$$

et

$$\int_{\Omega_i^\delta} q u_i^\delta u_i^t = \delta \int_{\partial\Omega}\int_{-1}^{0} (1+\delta y c(s))\,q\left(s,\frac{s}{\delta},y\right)\hat{u}_i^\delta \partial_s \hat{u}_i^t\,dyds,$$

donc l'équation variationnelle (3.28) devient:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_e^\delta} \nabla u_e^\delta \nabla u_e^t \quad &- \quad k^2 \int_{\Omega_e^R} u_e^\delta u_e^t - \left\langle T_R\left(u_e^\delta\right),u_e^t\right\rangle + \delta \int_{\partial\Omega}\int_{-1}^{0} (1+\delta y c(s))^{-1}\,\partial_s\hat{u}_i^\delta\partial_s\hat{u}_i^t\,dyds \\ &+ \quad \delta^{-1}\int_{\partial\Omega}\int_{-1}^{0} (1+\delta y c(s))\,\partial_y\hat{u}_i^\delta\partial_y\hat{u}_i^t - \delta k^2 \int_{\partial\Omega}\int_{-1}^{0}(1+\delta y c(s))\,q\left(s,\frac{s}{\delta},y\right)\hat{u}_i^\delta\hat{u}_i^t \\ &= \quad \left(f^{in},u_e^t\right).\end{aligned} \tag{3.29}$$

La formulation variationnelle (3.29) admet une unique solution $(u_e^\delta,\hat{u}_i^\delta) \in H^1(\Omega_e^R)\times H^1(]-1,0[\times\partial\Omega)$ telle que $u_e^\delta\,|_{n=0} = \hat{u}_i^\delta\,|_{y=0}$ et $\partial_n u_e^\delta\,|_{n=0} = \delta\partial_y \hat{u}_i^\delta\,|_{y=0}$.

3.3.2 Formulation variationnelle du problème (3.23)

Soit $u_e^t \in H^1(\Omega_e^R)$ une fonction test. On multiplie la première équation du problème (3.23) par la fonction test u_e^t et on intègre sur Ω_e^R:

$$\int_{\Omega_e^R} \Delta u_e^0 u_e^t + \int_{\Omega_e^R} k^2 u_e^0 u_e^t = 0,$$

on applique la formule de Green (la formule d'integration par partie):

$$-\int_{\Omega_e^R} \nabla u_e^0 \nabla u_e^t + \int_{\partial\Omega_e^R} \partial_n u_e^0 u_e^t + \int_{\Omega_e^R} k^2 u_e^0 u_e^t = 0,$$

ceci donne

$$-\int_{\Omega_e^R} \nabla u_e^0 \nabla u_e^t + \int_{S_R} T_R(u_e^0) u_e^t + k^2 \int_{\Omega_e^R} \tilde{u}_e^0 u_e^t = 0,$$

soit donc

$$\forall u_e^t \in H^1(\Omega_e^R), \quad \int_{\Omega_e^R} \nabla\, u_e^0 . \nabla\, u_e^t - k^2 \int_{\Omega_e^R} u_e^0\, u_e^t - \langle T_R(u_e^0), u_e^t \rangle = (f^{in}, u_e^t), \tag{3.30}$$

l'équation variationnelle (3.30) admet une unique solution, on note u_e^0 cette solution.
La fonction $\hat{u}_i^0$ est donnée par

$$\hat{u}_i^0(s,y) = u_e^0(s,n)|_{n=0} \quad y \in]-1,0[. \tag{3.31}$$

Théorème 3.3.1. Il existe deux constantes strictement positives δ_0 et C tel que pour tout $\delta \in]0,\delta_0]$, nous avons l'estimation d'erreur suivante:

$$\|u_e^\delta - u_e^0\|_{H^1(\Omega_e^R)} + \|\hat{u}_i^\delta - \hat{u}_i^0\|_{H^1(-1,0;L^2(\partial\Omega))} \le C\delta^{1/2}. \tag{3.32}$$

Pour pouvoir prouver l'estimation (3.32), on aura besoin du théorème de stabilité suivant, qui a été donné et démontré dans [3].
On notera par $a(\hat{u}_i^\delta, \hat{u}_i^t)$ la forme donnée par

$$\begin{aligned} a(\hat{u}_i^\delta, \hat{u}_i^t) \quad &= \int_{\Omega_e^\delta} \nabla u_e^\delta \nabla u_e^t - k^2 \int_{\Omega_e^R} u_e^\delta u_e^t - \left\langle T_R\left(u_e^\delta\right), u_e^t \right\rangle \\ &+ \delta \int_{\partial\Omega} \int_{-1}^0 (1 + \delta y c(s))^{-1} \partial_s \hat{u}_i^\delta \partial_s \hat{u}_i^t \; dyds \\ &+ \delta^{-1} \int_{\partial\Omega} \int_{-1}^0 (1 + \delta y c(s))\, \partial_y \hat{u}_i^\delta \partial_y \hat{u}_i^t - \delta k^2 \int_{\partial\Omega} \int_{-1}^0 (1 + \delta y c(s))\, q\left(s, \frac{s}{\delta}, y\right) \hat{u}_i^\delta \hat{u}_i^t. \end{aligned}$$

Théorème 3.3.2. Soit L_δ une famille de formes linéaires sur X satisfaisant

$$|\mathrm{L}_\delta \hat{u}_i^t| \le l(\delta) \left\{ \delta^{1/\delta} \|\nabla u_e^t\| + \delta^{-1/2} \|\partial_t u_e^t\| + \|u_i^t\| \right\},$$

alors il existe une constante c indépendante de δ; $\delta > 0$ telle que la solution u_δ du problème variationnel

$$a(\hat{u}_i^\delta, \hat{u}_i^t) = L_\delta \hat{u}_i^t,$$

satisfait

$$\|\hat{u}_i^\delta\| \le c l(\delta),$$

où $l(\delta)$ est une fonction de $\delta > 0$ peut ne pas être bornée quand δ tend vers 0.

Démonstration. du théorème 3.5.1

On évalue la différence entre les équations variationnelles (3.29) et (3.30)

$$\int_{\Omega_e^R} \nabla(u_e^\delta - u_e^0).\nabla u_e^t - k^2 \int_{\Omega_e^R} (u_e^\delta - u_e^0) u_e^t - \Big(T_R(u_e^\delta - u_e^0), u_e^t\Big) + \delta \int_{\partial\Omega}\int_{-1}^0 (1+\delta yc(s))^{-1} \partial_s \hat{u}_i^\delta \partial_s \hat{u}_i^t \; dyds$$

$$+\delta^{-1} \int_{\partial\Omega}\int_{-1}^0 (1+\delta yc(s)) \partial_y \hat{u}_i^\delta \partial_y \hat{u}_i^t - \delta k^2 \int_{\partial\Omega}\int_{-1}^0 (1+\delta yc(s)) q\left(s, \frac{s}{\delta}, y\right) \hat{u}_i^\delta \hat{u}_i^t = 0.$$

$$\int_{\Omega_e^R} \nabla(u_e^\delta - u_e^0).\nabla u_e^t - k^2 \int_{\Omega_e^R} (u_e^\delta - u_e^0) u_e^t - \Big(T_R(u_e^\delta - u_e^0), u_e^t\Big) + \delta \int_{\partial\Omega}\int_{-1}^0 (1+\delta yc(s))^{-1} \partial_s (\hat{u}_i^\delta - \hat{u}_i^0) \partial_s \hat{u}_i^t \; dyds$$

$$+\delta^{-1} \int_{\partial\Omega}\int_{-1}^0 (1+\delta yc(s)) (\partial_y \hat{u}_i^\delta - \partial_y \hat{u}_i^0) \partial_y \hat{u}_i^t - \delta k^2 \int_{\partial\Omega}\int_{-1}^0 (1+\delta yc(s)) q\left(s, \frac{s}{\delta}, y\right) \hat{u}_i^\delta \hat{u}_i^t =$$

$$-\delta \int_{\partial\Omega}\int_{-1}^0 (1+\delta yc(s))^{-1} \partial_s \hat{u}_i^0 \; \partial_s \hat{u}_i^t \; dyds - \delta^{-1} \int_{\partial\Omega}\int_{-1}^0 (1+\delta yc(s)) \partial_y \hat{u}_i^0 \partial_y \hat{u}_i^t.$$

On a

$$\int_{\partial\Omega}\int_{-1}^0 (1+\delta yc(s)) \int_0^1 q(s,x,y) dx (\hat{u}_i^\delta - \hat{u}_i^0) \hat{u}_i^t =$$

$$\int_{\partial\Omega}\int_{-1}^0 (1+\delta yc(s)) \int_0^1 q(s,x,y) dx \; \hat{u}_i^\delta \hat{u}_i^t - \int_{\partial\Omega}\int_{-1}^0 (1+\delta yc(s)) \int_0^1 q(s,x,y) dx \; \hat{u}_i^0 \hat{u}_i^t +$$

$$\int_{\partial\Omega}\int_{-1}^0 (1+\delta yc(s)) q(s,x,y) \hat{u}_i^\delta \hat{u}_i^t - \int_{\partial\Omega}\int_{-1}^0 (1+\delta yc(s)) q(s,x,y) \hat{u}_i^\delta \hat{u}_i^t,$$

ceci implique

$$\int_{\partial\Omega}\int_{-1}^0 (1+\delta yc(s)) q(s,x,y) \hat{u}_i^\delta \hat{u}_i^t = \int_{\partial\Omega}\int_{-1}^0 (1+\delta yc(s)) \int_0^1 q(s,x,y) dx (\hat{u}_i^\delta - \hat{u}_i^0) \hat{u}_i^t$$

$$- \int_{\partial\Omega}\int_{-1}^0 (1+\delta yc(s)) \int_0^1 q(s,x,y) dx \; \hat{u}_i^\delta \hat{u}_i^t + \int_{\partial\Omega}\int_{-1}^0 (1+\delta yc(s)) \int_0^1 q(s,x,y) dx \; \hat{u}_i^0 \hat{u}_i^t +$$

$$\int_{\partial\Omega}\int_{-1}^0 (1+\delta yc(s)) q(s,x,y) \hat{u}_i^\delta \hat{u}_i^t + \int_{\partial\Omega}\int_{-1}^0 (1+\delta yc(s)) q(s,x,y) \hat{u}_i^0 \hat{u}_i^t - \int_{\partial\Omega}\int_{-1}^0 (1+\delta yc(s)) q(s,x,y) \hat{u}_i^0 \hat{u}_i^t.$$

$$+ \int_{\partial\Omega}\int_{-1}^0 q(s,x,y) \hat{u}_i^0 \hat{u}_i^t - \int_{\partial\Omega}\int_{-1}^0 q(s,x,y) \hat{u}_i^0 \hat{u}_i^t.$$

Ce qui permet d'avoir:

$$\int_{\Omega_e^R} \nabla(u_e^\delta - u_e^0).\nabla u_e^t - k^2 \int_{\Omega_e^R} (u_e^\delta - u_e^0) u_e^t - \Big(T_R(u_e^\delta - u_e^0), u_e^t\Big) + \delta \int_{\partial\Omega}\int_{-1}^0 (1+\delta yc(s))^{-1} \partial_s (\hat{u}_i^\delta - \hat{u}_i^0) \partial_s \hat{u}_i^t \; dyds$$

$$+\delta^{-1} \int_{\partial\Omega}\int_{-1}^0 (1+\delta yc(s)) \partial_y (\hat{u}_i^\delta - \hat{u}_i^0) \partial_y \; \hat{u}_i^t - \delta k^2 \int_{\partial\Omega}\int_{-1}^0 (1+\delta yc(s)) \int_0^1 q(s,x,y) dx (\hat{u}_i^\delta - \hat{u}_i^0) \hat{u}_i^t$$

$$= \delta \int_{\partial\Omega}\int_{-1}^0 (1+\delta yc(s))^{-1} \partial_s \hat{u}_i^0 \; \partial_s \hat{u}_i^t \; dyds$$

$$+\delta k^2 \int_{\partial\Omega}\int_{-1}^0 (1+\delta yc(s)) \left[\left(\int q(s,x,y) dx\right) - q\left(s, \frac{s}{\delta}, y\right)\right] (\hat{u}_i^\delta - \hat{u}_i^0) \hat{u}_i^t + \delta k^2 \int_{\partial\Omega}\int_{-1}^0 q(s,x,y) \hat{u}_i^0 \hat{u}_i^t. \quad (3.33)$$

En d'autres termes, on obtient

$$a(\hat{u}_i^\delta - \hat{u}_i^0, \hat{u}_i^t) = L_\delta \hat{u}_i^t,$$

avec

$$L_\delta \hat{u}_i^t = \delta \int_{\partial\Omega} \int_{-1}^{0} (1+\delta y c(s))^{-1} \partial_s \hat{u}_i^0 \ \partial_y \hat{u}_i^t \ dyds + \delta k^2 \int_{\partial\Omega} \int_{-1}^{0} q(s,x,y) \hat{u}_i^0 \hat{u}_i^t.$$

Par hypothèse, la fonction $q(s,s/\delta,y)$ est uniformément bornée en δ, ce qui permet de déduire

$$\begin{aligned}
&\left| \delta \int_{\partial\Omega} \int_{-1}^{0} (1+\delta y c(s))^{-1} \partial_s \hat{u}_i^0 \ \partial_y \hat{u}_i^t \ dyds + \delta k^2 \int_{\partial\Omega} \int_{-1}^{0} q(s,x,y) \hat{u}_i^0 \hat{u}_i^t \right| \\
&\quad \leq \delta \left\| \partial_s \hat{u}_i^0 \right\|_{L^2(\partial\Omega)} \left\| \partial_s \hat{u}_i^t \right\|_{L^2(\partial\Omega)} + \delta \left\| \hat{u}_i^0 \right\|_{L^2(\partial\Omega)} \left\| \hat{u}_i^t \right\|_{L^2(\partial\Omega)} \\
&\quad \leq c \left\{ \delta \left\| \partial_s \hat{u}_i^t \right\|_{L^2(\partial\Omega)} + \delta \left\| \hat{u}_i^t \right\|_{L^2(\partial\Omega)} \right\}. \qquad (3.34)
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\hat{u}_i^t(x,y) &= \hat{u}_i^t(x,0) + 1/\delta \int_0^y \partial_y \hat{u}_i^t dy \\
&= \hat{u}_e^t(x,0) + \frac{1}{\delta} \int_0^y \partial_y \hat{u}_i^t dy,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\left| \hat{u}_i^t(x,y) \right| &\leq \left| \hat{u}_e^t(x,0) \right| + \frac{1}{\delta} \int_0^y \left| \partial_y \hat{u}_i^t \right| dy, \\
\int_{\partial\Omega} \left| \hat{u}_i^t(x,y) \right|^2 &\leq c \int_{\partial\Omega} \left| \hat{u}_e^t(x,0) \right|^2 + \frac{1}{\delta^2} \int_{\partial\Omega} \int_{-1}^{0} \left| \partial_y \hat{u}_i^t \right|^2 dydx, \\
\int_{-1}^{0} \int_{\partial\Omega} \left| \hat{u}_i^t(x,y) \right|^2 &\leq c \int_{\partial\Omega} \left| \hat{u}_e^t(x,0) \right|^2 + \frac{1}{\delta^2} \int_{\partial\Omega} \int_{-1}^{0} \left| \partial_y \hat{u}_i^t \right|^2 dydx, \\
\left(\int_{-1}^{0} \int_{\partial\Omega} \left| \hat{u}_i^t(x,y) \right|^2 \right)^{1/2} &\leq \left\| \hat{u}_e^t(x,0) \right\|_{L^2(\partial\Omega)} + \frac{1}{\delta} \left(\int_{\partial\Omega} \int_{-1}^{0} \left| \partial_y \hat{u}_i^t \right|^2 dydx \right)^{1/2}, \\
\left(\int_{-1}^{0} \int_{\partial\Omega} \left| \hat{u}_i^t(x,y) \right|^2 \right)^{1/2} &\leq \left\| \hat{u}_e^t(x,0) \right\|_{H^1(\Omega_e^R)} + \frac{1}{\delta} \left(\int_{\partial\Omega} \int_{-1}^{0} \left| \partial_y \hat{u}_i^t \right|^2 dydx \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

En multipliant par δ cette dernière inégalité, on obtient:

$$\begin{aligned}
\delta \| \hat{u}_i^t \| &\leq c\delta \| \hat{u}_e^t \|_{H^1(\Omega_e^R)} + \left(\int_{\partial\Omega} \int_{-1}^{0} \left| \partial_y \hat{u}_i^t \right|^2 dydx \right)^{1/2}, \\
&\leq c \| \hat{u}_e^t \|_{H^1(\Omega_e^R)} + \left(\int_{\partial\Omega} \int_{-1}^{0} \left| \partial_y \hat{u}_i^t \right|^2 dydx \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Ceci entraîne

$$L_\delta \hat{u}_i^t \leq \delta^{1/2} \left\{ \delta^{1/2} \left(\int_{\partial\Omega} \int_{-1}^{0} |\partial_s \hat{u}_i^t|^2 \right)^{1/2} + \delta^{-1/2} \left(\int_{\partial\Omega} \int_{-1}^{0} |\partial_y \hat{u}_i^t|^2 \right)^{1/2} + \| \hat{u}_e^t \|_{H^1(\Omega_R^e)} \right\}.$$

En appliquant le théorème de stabilité 3.5.2, on aboutit à l'estimation

$$\| u_e^\delta - u_e^0 \|_{H^1(\Omega_e^R)} + \| \hat{u}_i^\delta - \hat{u}_i^0 \|_{H^1(-1,0;L^2(\partial\Omega))} \leq C\delta^{1/2}.$$

$\square$

A présent on va estimer la quantité $u^\delta - \tilde{u}_e^{\delta,1}$ dans l'espace $H^1(-1{,}0; L^2(\partial\Omega))$, on écrit alors la formulation variationnelle du problème suivant

$$\triangle u_e^\delta + k^2 u_e^\delta = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega.$$

Soit $u_e^t \in H^1(\Omega_e^R)$ une fonction test

$$\int_{\Omega_e^R} \Delta u_e^1 u_e^t + \int_{\Omega_e^R} k^2 u_e^1 u_e^t = 0,$$

on applique la formule de Green (la formule d'integration par partie):

$$-\int_{\Omega_e^R} \nabla u_e^1 \nabla u_e^t + \int_{\partial\Omega_e^R} \partial_n u_e^1 u_e^t + \int_{\Omega_e^R} k^2 u_e^1 u_e^t = 0,$$

$$-\int_{\Omega_e^R} \nabla u_e^1 \nabla u_e^t + \int_{S_R} T_R(u_e^1) u_e^t + k^2 \int_{\Omega_e^R} \tilde{u}_e^1 u_e^t = 0,$$

ceci donne

$$\begin{aligned} \forall u_e^t \ \in \ H^1(\Omega_e^R), \qquad \int_{\Omega_e^R} \nabla\ u_e^1 . \nabla\ u_e^t \ &- \ k^2 \int_{\Omega_e^R} u_e^1\ u_e^t - \left\langle T_R(u_e^1), u_e^t \right\rangle \int_{\partial\Omega} \partial_s^2 u_e^0(s,n)|_{n=0} \\ &= \ k^2 \int_{\partial\Omega} \left(\int_{-1}^0 \int_0^1 q(s,x,y) dx dy \right) u_e^0(s,n)|_{n=0}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Théorème 3.3.3. La paire

$$\left(\frac{u_e^\delta - (u_e^0 + \delta u_e^1)}{\delta}, \frac{\hat{u}_i^\delta - (\hat{u}_i^0 + \delta \hat{u}_i^1)}{\delta} \right) \tag{3.36}$$

converge fortement vers $(0{,}0)$ dans $H^1(\Omega_e^R) \times H^1(-1{,}0; L^2(\partial\Omega))$

Démonstration. Soient $u_e^t \in H^1(\Omega_e^R)$ une fonction test vérifiant $u_e^t|_{n=0} = \hat{u}_i^t$ et

$$\hat{u}_i^t(s,y) = \hat{u}_i^t|_{y=0}.$$

On introduit les quantités $u_e^\delta - (u_e^0 + \delta u_e^1)$, $\hat{u}_i^\delta - (\hat{u}_i^0 + \delta \hat{u}_i^1)$ dans l'équation variationnelle 3.29 , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e^R} \nabla(u_e^\delta - u_e^0 - \delta u_e^1) . \nabla u_e^t \ &- \ k^2 \int_{\Omega_e^R} (u_e^\delta - u_e^0 - \delta u_e^1) . u_e^t - (T_R(u_e^\delta - u_e^0 - \delta u_e^1)) \\ &+ \ \delta \int_{\partial\Omega} \int_{-1}^0 (1 + \delta y c(s))^{-1} \partial_s (\hat{u}_i^\delta - \hat{u}_i^0 - \delta \hat{u}_i^1) \partial_s \hat{u}_i^t dy ds \\ &+ \ \delta^{-1} \int_{\partial\Omega} \int_{-1}^0 (1 + \delta y c(s)) \underbrace{\partial_y (\hat{u}_i^\delta - \hat{u}_i^0 - \delta \hat{u}_i^1)}_{0} \partial_y \hat{u}_i^t \\ &- \ \delta k^2 \int_{\partial\Omega} \int_{-1}^0 (1 + \delta y c(s)) q(s, \frac{s}{\delta}, y) (\hat{u}_i^\delta - \hat{u}_i^0 - \delta \hat{u}_i^1) \hat{u}_i^t \ dy ds \\ &= \ 0 \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega_e^R} \nabla(u_e^\delta - u_e^0) \nabla u_e^t - \delta \int_{\Omega_e^R} \nabla u_e^1 . \nabla u_e^t - k^2 \int_{\Omega_e^R} (u_e^\delta - u_e^0) u_e^t + \delta k^2 \int_{\Omega_e^R} u_e^1 u_e^t - \left\langle T_R(u_e^\delta - u_e^0), u_e^t \right\rangle$$

$$+\delta\left\langle T_R(u_e^1),u_e^t\right\rangle+\delta\int_{\partial\Omega}\int_{-1}^{0}(1+\delta yc(s))^{-1}\partial_s(\hat{u}_i^\delta-\hat{u}_i^0)\partial_s\hat{u}_i^t\ dyds$$

$$-\delta^2\int_{\partial\Omega}\int_{-1}^{0}(1+\delta yc(s))^{-1}\partial_s\hat{u}_i^1\partial_s\hat{u}_i^t\ dyds+\delta^2k^2\int_{\partial\Omega}\int_{-1}^{0}(1+\delta yc(s))q(s,\frac{s}{\delta},y)(\hat{u}_i^\delta-\hat{u}_i^1)\hat{u}_i^t\ dyds$$

$$+\delta k^2\int_{\partial\Omega}\int_{-1}^{0}(1+\delta yc(s))q\left(s,\frac{s}{\delta},y\right)\hat{u}_i^0\hat{u}_i^t\ dyds=0.$$

En utilisant l'équation variationnelle (3.35), on obtient:

$$\int_{\Omega_e^R}\nabla(u_e^\delta-u_e^0-\delta u_e^1).\nabla u_e^t-k^2\int_{\Omega_e^R}(u_e^\delta-u_e^0-\delta u_e^1).\nabla u_e^t-(T_R(u_e^\delta-u_e^0-\delta u_e^1))+$$

$$\delta\int_{\partial\Omega}\int_{-1}^{0}(1+\delta yc(s))^{-1}\partial_s(\hat{u}_i^\delta-\hat{u}_i^0-\delta\hat{u}_i^1)\partial_s\hat{u}_i^t dyds$$

$$-\delta k^2\int_{\partial\Omega}\int_{-1}^{0}(1+\delta yc(s))q(s,\frac{s}{\delta},y)(\hat{u}_i^\delta-\hat{u}^0-\delta\hat{u}_i^1)dy\ ds$$

$$=\delta\int_{\partial\Omega}\int_{-1}^{0}(1+\delta yc(s))^{-1}\partial_s\hat{u}_i^0\partial_s\hat{u}_i^t dyds-\delta\int_{\partial\Omega}\partial_s^2u_e^0(s,n)\mid_{n=0}u_e^t$$

$$-\delta k^2\int_{\partial\Omega}\int_{-1}^{0}(1+\delta yc(s))q(s,\frac{s}{\delta},y)\hat{u}_i^0\hat{u}_i^t dy\ ds+\delta k^2\int_{\partial\Omega}(\int_{-1}^{0}\int_{0}^{1}q(s,x,y)dxdy)u_e^0(s,n)\mid_{n=0}u_e^t$$

$$+\delta^2\int_{\partial\Omega}\int_{-1}^{0}(1+\delta yc(s))^{-1}\partial_s\hat{u}_i^1\partial_s\hat{u}_i^t dy\ ds.$$

Etudions le terme:

$$\int_{\partial\Omega}\int_{-1}^{0}q\left(s,\frac{s}{y},y\right)\ \hat{u}_i^\delta\ \hat{u}_i^t\ dyds.$$

On a $q\left(s,s/\delta,y\right)$ converge faiblement vers $\displaystyle\int_0^1 q(s,x,y)dx$ dans L^2, $\hat{u}_i^\delta$ converge fortement vers $\hat{u}_i^0$ et du fait que $u_e^\delta|_{n=0}=\hat{u}_i^\delta|_{y=0}$ on aura

$$\int_{\partial\Omega}\int_{-1}^{0}q\left(s,\frac{s}{y},y\right)\ \hat{u}_i^\delta\ \hat{u}_i^t\ dyds-\int_{\partial\Omega}\left[\int_{-1}^{0}\int_{0}^{1}q(s,x,y)\ dxdy\right]u_e^0(s,n)|_{n=0}\hat{u}_i^t\ ds$$

$$=\int_{\partial\Omega}\int_{-1}^{0}q\left(s,\frac{s}{\delta},y\right)\left[\hat{u}_i^\delta-u_e^0(s,n)|_{n=0}\right]\hat{u}_i^t\ dyds.$$

Calculons $\left\|\left[\hat{u}_i^\delta-u_e^0\right]\hat{u}_i^t\right\|_{L^2}$,

$$\left\|\left[\hat{u}_i^\delta-u_e^0\right]\hat{u}_i^t\right\|_{L^2}^2=\int_{\Omega}[\hat{u}_i^\delta-u_e^0]^2(\hat{u}_i^t)^2\leq\left\|[\hat{u}_i^\delta-u_e^0]^2\right\|_{L^2}\left\|(\hat{u}_i^t)^2\right\|_{L^2}\leq\left\|\hat{u}_i^\delta-u_e^0\right\|_{L^4}^2\left\|(\hat{u}_i^t)^2\right\|_{L^4}.$$

On a $H^1\hookrightarrow L^4$ on aura donc

$$\left\|\hat{u}_i^\delta-u_e^0\right\|_{L^4}\leq C\left\|\hat{u}_i^\delta-u_e^0\right\|_{H^1}.$$

D'après l'estimation (3.32)

$$\hat{u}_i^\delta-u_e^0\longrightarrow 0\ \text{ quand }\ \delta\to 0,$$

ce qui donne

$$\left\|\hat{u}_i^\delta-u_e^0\right\|_{L^4}\to 0\qquad\text{fortement dans } H^1,$$

et puisque $\left\|(\hat{u}_i^t)^2\right\|_{L^4}$ ne dépend pas de δ on aura alors

$$\left\|\left[\hat{u}_i^\delta - u_e^0\right]\hat{u}_i^t\right\|_{L^2} \longrightarrow 0,$$

et donc

$$(\hat{u}_i^\delta - u_e^0)\hat{u}_i^t,$$

converge fortement vers 0 dans L^2.

Par ailleurs, on montre que les autres termes convergent vers 0, en utilisant le théorème de stabilité démontré dans [3]. D'où la paire (3.36) converge fortement vers (0,0).

On a la quantité

$$q\left(s,\frac{s}{\delta},y\right) - \int_0^1 q(s,x,y)\; dx = 0,$$

on obtient

$$\left\|\frac{u_e^\delta - (u_e^0 + \delta u_e^1)}{\delta}\right\| + \left\|\frac{\hat{u}_i^\delta - (\hat{u}_i^0 + \delta\hat{u}_i^1)}{\delta}\right\| \leq c\delta^{1/2},$$

ceci donne

$$\frac{1}{\delta}\left(\left\|u_e^\delta - (u_e^0 + \delta u_e^1)\right\| + \left\|\hat{u}_i^\delta - (\hat{u}_i^0 + \delta\hat{u}_i^1)\right\|\right) \leq c\delta^{1/2},$$

ce qui implique

$$\left\|u_e^\delta - (u_e^0 + \delta u_e^1)\right\| + \left\|\hat{u}_i^\delta - (\hat{u}_i^0 + \delta\hat{u}_i^1)\right\| \leq c\delta^{1/2}\delta,$$

ce qui donne une approximation meilleure

$$\left\|u_e^\delta - (u_e^0 + \delta u_e^1)\right\| + \left\|\hat{u}_i^\delta - (\hat{u}_i^0 + \delta\hat{u}_i^1)\right\| \leq c\delta^{3/2}.$$

□

Conclusion

Dans ce travail nous nous sommes intéressés à l'étude faite par Habib Ammari et Chiraz LATIR-GROUZ [1] et qui concerne la modélisation asymptotique d'un problème de diffraction d'une onde électromagnétique par une couche mince de perméabilité variable ou périodique. Des conditions aux limites approchées ont été justifiées, traduisant ainsi l'effet de cette couche sur la diffraction de l'onde. La méthode utilisée peut s'appliquer à d'autres modèles (Maxwell par exemple) ou à d'autres géométries (couche avec coin,...).

Bibliographie

[1] HABIB AMMARI CHIRAZ LATIR-GROUZ *Conditions aux limites approchées pour les couches minces périodiques. M2ANMath.Model.Numer.Anal.,33(4):673-693,1999.*

[2] H. Ammari, Scattering of waves by thin periodic layers at high frequencies using the on-surface radiation condition method. IMA J. Appl. Math. 60 (1998) 199-214.

[3] A. Bendali et K. Lemrabet *The effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the Helmholtz equation. SIAM J. Appl. Math. 56 (1996) 1664-1693.*

[4] B.Engquist and J-C.Nédélec.Effective boundary conditions for acoustic and electromagnetic scattering in thin layers.Technical Report (278), Ecole Polytechnique (France),1993.

[5] Bjorn Engquist and Andrew Majda. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves.*Math.Comp.,31(139):629-651,1977.*

[6] Houssem Haddar, Patrick Joly, and Hoai-Minh Nguyen. Generalized impedence boundary conditions for scattering by strongly absorbing obstacles : the scalar case.*Math.Models Methods Appl.Sci.,15,no.8:1273-1300,2005.*

[7] Brézis H. : Analyse fonctionnelle, théorie et applications. Collection mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson (1983).

[8] Sanchez-hubert, et E-Sanchez Palencia. *Introduction aux methodes asymptotiques et à l'homogeneisation. Masson. 1992.*

[9] T. Abboud et H. Ammari, Diffraction at a curved grating: TM and TE cases, Homogenization.*J. Math. Anal. Appl. 202 (1996) 995-1026.*

[10] J.-C. Nédélec, Ondes acoustiques et électromagnétiques, Equations intégrales, Cours de DEA, Ecole Polytechnique (1996).

[11] B. Engquist et J.-C. Nédélec, Effective boundary conditions for acoustic and electromagnetic scattering thin layers. Rapport Interne du Centre de Mathématiques Appliquées de l'Ecole Polytechnique, 278 (1993).

[12] T. Abboud et H. Ammari, Diffraction at a curved grating: Approximation by an infinite plane grating. *J. Math. Anal. Appl.* 202 (1996) 1076-1100.

[13] H. Ammari et S. He, Effective impedance boundary conditions for an inhomogeneous thin layer on a curved metallic surface. IEEE Trans. Antennas Propag. 46 (1998) 710-715.

[14] S.N. Karp et F.C. Karal, Generalized impedance boundary conditions for surface wave structures, in Electromagnetic Wave Theory, Part I, J. Brown Ed., Pergamon Press, New York (1965) 479-483.

[15] Doneddu A., *Géometrie différentielle. Integrales multiples 6 Vuibert Paris. 1978.*