

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE.
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE.
UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU.

FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE DE MASTER II

SPÉCIALITÉ: MATHÉMATIQUES
OPTION: MODÉLISATION MATHÉMATIQUE

Sujet:

Observateurs d'état pour les systèmes dynamiques non linéaires

Présenté par:

AMRANE SOUAD

Devant le jury

M^r. **MORSLI Mohamed** : Président

M^r. **MERAKEB Abdelkader** : Examineur

M^{me} **KHELLAS Fazia** : Directrice du mémoire

Soutenu le: 14/07/2015

Remerciements

Au premier lieu, je remercie Dieu le tout puissant, de m'avoir aidé à arriver au terme de ce travail qui présente le fruit de plusieurs années d'étude.

*Je tiens à exprimer mes remerciements à **Mme Khellas** pour avoir accepté de diriger ce modeste travail, et pour son aide, sa disponibilité, ses orientations, ses conseils et sa volonté qu'elle a manifesté tout au long de l'élaboration du présent mémoire. .*

Mes sincères remerciements et ma profonde gratitude s'adressent également aux membres de jury qui me feront l'honneur de juger mon travail

Je tient à remercier les enseignants du département Maths qui ont contribué à ma formation.

Il est un agréable devoir d'exprimer mes sentiments reconnaissants à tous ceux qui ont participé de loin ou de près à l'élaboration de ce mémoire et qui se sont dévoués pour me venir en aide

Merci à tous

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

Aux deux être les plus chers au monde, ma mère Fatma et mon père Mouloud, source de tendresse et sacrifice, qui m'ont soutenue depuis l'enfance à suivre le chemin du savoir, que Dieu les protège.

A mes très chers frères : Bachir, Ali, Hakim, Djamel, Ouahcene.

A mes très chères soeurs : Karima, Lamia.

A ma très chère belle soeur Samia.

A mon fiancé Lakhdar, et à toute sa famille.

A mes très chères amies avec lesquelles je garde les meilleurs souvenirs de ma vie :

Linda, Lamia, Noura, Nissa, Ouazna.

A tous ceux ou celles qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

A ceux que j'aime et m'aiment.

Souad

Table des matières

Table des matières	2
Introduction générale	3
1 Étude de la stabilité au sens de Lyapunov des systèmes dynamiques.	5
1.1 Introduction	5
1.1.1 Systèmes autonomes, non autonomes	5
1.1.2 Problème de Cauchy	6
1.2 Stabilité et théorie de Lyapunov	6
1.2.1 Notion de stabilité	6
1.2.2 Stabilité de Lyapunov	7
1.2.3 Fonction de Lyapunov	9
1.3 Inégalités linéaires matricielles	12
1.3.1 Définition et intérêts des LMIs	12
1.3.2 Lemmes utiles pour les LMIs	14
2 Observateur de Luenberger	16
2.1 Introduction:	16
2.2 Équations d'état des systèmes linéaires et non linéaires	16
2.2.1 Propriétés des systèmes contrôlés-observés	17
2.2.2 Principe d'estimation d'état	21
2.3 Observateur des systèmes linéaires et non linéaires	22
2.3.1 Observateur de Luenberger	22
2.3.2 Approche de Thau et ses généralisations pour la conception d'observateur de Luenberger	23
3 Approche de Rajamani et Cho pour la conception de l'observateur de Luenberger	26
3.1 Introduction	26
3.2 Approche de Rajamani et Cho [13]	27
3.2.1 Approche LMI standard	28
3.2.2 Approche LMI en utilisant la S-procedure	29
3.2.3 Approche basée sur l'équation de Riccati	31
3.2.4 Relation entre la conception d'observateur et la distance à l'inobservabilité	31

3.3	Version corrigée du résultat de Rajamani et Cho proposée par Aboky et al.	35
3.3.1	Caractérisation de la distance à la plus proche paire inobservable avec un mode purement imaginaire	42
3.3.2	Condition suffisante pour l'existence d'une solution symétrique définie positive de l'ARE	43
3.3.3	Résultat principal de Aboky et al.	44
3.3.4	Application au robot à joint flexible	47
Conclusion		51
Annexe		52
3.4	Programmation sous Matlab	52
3.4.1	Solution de l'équation de Riccati sous Matlab	52
3.4.2	Programmation de la LMI	54
3.4.3	Programme simulink de l'exemple du robot: approche de Rajamani & Cho	56
3.4.4	Résultat de Aboky et al. sur le calcul de $\delta(A,C)$, et la procedure de calcul du gain de l'observateur	59
Bibliographie		63

Introduction générale

Un observateur est un moyen de mesure "informatique" qui permet de retrouver tous les états d'un système industriel en disposant du minimum d'informations sur ces états. Ce minimum d'information est obtenue à l'aide d'un capteur.

Cependant, un usage exclusif de capteurs n'est pas toujours possible les certaines raisons suivantes:

- Le coût prohibitif du ou des capteurs comme par exemple une centrale inertielle permettant de déterminer un déplacement relatif,
- Le capteur trop lent par rapport à la dynamique de la variable à mesurer. Par exemple, l'utilisation d'un système de perception basée sur l'emploi d'une caméra nécessite la mise en oeuvre d'un traitement d'image sophistiqué qui peut se révéler être trop lent,
- L'inexistence de capteur pour la grandeur physique que l'on voudrait mesurer. C'est une situation typique dans certains secteurs industriels (chimie, agroalimentaires).

Un observateur est donc chargé d'estimer l'état du système tout en optimisant le nombre de capteurs dans une application industrielle; d'où son intérêt économique dans l'industrie.

Durant les dernières décennies beaucoup de travaux en théorie de contrôle et en automatique ont été menés sur la conception d'observateurs. Une manière brute d'estimer les états d'un système consiste à dériver numériquement l'information mesurée grâce aux capteurs. L'expérience a montré que cette méthode a l'inconvénient de donner des résultats erronés à cause de l'amplification du bruit dû aux imperfections des mesures.

Pour remédier à ce problème, Kalman & Bucy ont introduit en 1961 une solution pour les systèmes linéaires stochastiques. Leur résultat est connu actuellement par le filtre de Kalman. En 1964-1971, Luenberger a fondé la théorie d'un observateur qui porte son nom " Observateur de Luenberger ". Son idée est d'ajouter au modèle une correction à l'aide de la mesure fournie par les capteurs.

Pour les systèmes non linéaires, les ingénieurs utilisent le filtre de Kalman étendu qui malheureusement ne présente pas de bonnes propriétés de convergence. Pour cette raison, et en dépit d'une littérature surabondante sur le sujet, le problème de la synthèse d'observateur pour les systèmes non linéaires reste un sujet de recherche largement ouvert, et très actif. Ce mémoire a pour objectif d'étudier l'approche de Rajamani & Cho (1998) pour la conception d'un observateur du type Luenberger pour une classe de systèmes non linéaires Lipschitziens. Cette approche, consignée dans la référence [13], est basée sur l'équation algébrique de Riccati (ARE) et la distance d'inobservabilité du système. Cette dernière permet de mesurer la plus petite perturbation qui rend le système non observable. Les auteurs

ont démontré que si la constante de Lipschitz γ est plus petite qu'une quantité, δ , "présumée" être la distance la distance d'inobservabilité, alors il est possible de choisir le gain de l'observateur de sorte à assurer la convergence (exponentielle) de l'observateur. Malheureusement, Aboky et al. [2, (2002)] ont démontré que cette quantité δ ne caractérise pas la distance d'inobservabilité du système et que la condition $\delta < \gamma$ n'est réellement pas suffisante pour assurer la convergence de l'observateur proposé.

Le mémoire que nous présentons est rédigé comme suit:

Le premier chapitre est consacré à la présentation de quelques rappels sur la stabilité des systèmes dynamiques. Les théorèmes issus des techniques de Lyapunov conduisent en général à des inégalités linéaires matricielle (LMI), nous consacrons une section pour une brève représentation du problème des LMIs. Nous achevons ce chapitre par quelques notions mathématiques utiles pour la compréhension de ce mémoire.

Dans le deuxième chapitre, on donnera une brève description des systèmes linéaires et non linéaires, tout en présentant leurs principales caractéristiques et leurs propriétés: observabilité, contrôlabilité, stabilisabilité et le principe de l'estimation de l'état (observateur)). De plus, on décrit l'observateur de Luenberger dans le cas linéaire. On achèvera ce chapitre par une brève description de l'approche de Thau et celle de Rajamani pour la conception d'un observateur de type Luenberger pour une classe de systèmes non linéaires.

Le dernier chapitre est l'essentiel de notre travail. Ce chapitre est composé de deux parties, la première est dédiée à l'étude de l'approche de Rajamani et Cho [13] pour la conception d'un observateur de type Luenberger pour une classe de systèmes non linéaires lipschitziens. L'inégalité de Lyapunov assurant la stabilité de l'erreur d'estimation conduit à une inégalité linéaire matricielle bilinéaire (Inégalité de Riccati), d'inconnue $P = P^T > 0$. Grâce à la S-procedure et le Lemme de Schur, cette inégalité se traduit via une LMI implementable sous Matlab permettant de calculer le gain de l'observateur. On présentera ensuite la méthode basée sur la relation entre l'équation algébrique de Riccati et la distance à l'inobservabilité, δ , proposée dans [13]. Cette dernière stipule que si δ est plus grand que la constante de Lipschitz γ , alors l'équation de Riccati admet une solution $P = P^T > 0$. Le gain de l'observateur L assurant sa convergence est donnée par $L = \frac{1}{2\gamma^2}P^{-1}C^T$, où C est la matrice de la sortie mesurée du système. Comme nous l'avons signalé auparavant, ce résultat est en général incorrect. On consacre donc la deuxième partie de ce chapitre à l'énoncé de la version corrigée proposée par Aboky et al.[2]. Un des résultat les plus important que ces derniers ont établi est la caractérisation de la quantité δ via l'hyperbolicité de la matrice Hamiltonienne associée à l'équation ARE obtenue.

Enfin en annexe, nous présenterons les résultats de simulation que nous avons obtenus lors de l'application de l'approche de Rajamani à l'exemple classique de la dynamique du robot flexible. Comme langage de programmation, nous avons opté pour Matlab et Simulink. Pour la programmation des conditions LMI données dans le chapitre 3, nous avons utilisé le package Yalmip.

Chapitre 1

Étude de la stabilité au sens de Lyapunov des systèmes dynamiques.

1.1 Introduction

La notion de stabilité d'un système dynamique caractérise le comportement de ses trajectoires autour des points d'équilibre. L'analyse de la stabilité d'un système dynamique permet donc d'étudier l'évolution de sa trajectoire lorsque l'état initial est proche d'un point d'équilibre. La stabilité au sens de Lyapunov est une théorie générale valable pour toute équation différentielle. Cette notion signifie que la solution d'une équation différentielle initialisée au voisinage d'un point d'équilibre en reste suffisamment proche. Dans ce chapitre nous allons étudier quelque concept sur la stabilité des systèmes dynamiques autonomes à temps continus, nous présenterons les deux méthodes pour l'analyse de la stabilité (méthode directe et méthode indirecte). Nous passons ensuite à une présentation de l'approche LMIs, tout en précisant l'intérêt de son utilisation. Ce chapitre s'achève par quelques notions mathématiques nécessaires pour la compréhension de ce mémoire.

1.1.1 Systèmes autonomes, non autonomes

Soit le système dynamique suivant:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad (1.1)$$

que l'on écrit par abus d'écriture

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (1.2)$$

On dira qu'un tel système est autonome (par opposition au cas (1.2) non autonome) lorsque f ne dépend pas explicitement du temps. Dans ce cas l'équation s'écrit:

$$\dot{x} = f(x).$$

On peut noter qu'un système autonome peut devenir non autonome si le contrôle dépend explicitement du temps, c'est-à-dire par exemple $u = g(x, t)$.

La terminologie autonome/non-autonome vient de la physique: les lois fondamentales de la physique ne dépendent pas du temps. De ce fait, l'évolution d'un système physique isolé peut normalement être décrit par une équation autonome.

L'évolution d'un système physique ne sera pas décrit par une équation non-autonome que quand il est soumis à des forces extérieures au système, qu'il n'évolue donc pas de manière autonome, au sens courant du terme. Dans toute la suite de ce chapitre on considère le cas des systèmes autonomes.

1.1.2 Problème de Cauchy

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et U un ouvert de \mathbb{R}^n . Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

où f est une application de $I \times U$ dans \mathbb{R}^n , et $x_0 \in U$. Le théorème de Cauchy- Lipschitz usuel affirme l'existence et l'unicité d'une solution maximale pourvu que f soit continue, et localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième composante.

Définition 1.1. L'application f de l'ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R}^n est Lipschitzienne par rapport à x sur U si :

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}^+, \quad \forall (t, x_1) \in U, (t, x_2) \in U, \quad \text{alors} \quad \| f(t, x_2) - f(t, x_1) \| \leq \gamma \| x_2 - x_1 \| .$$

γ est appelé la constante de Lipschitz. Noter qu'elle ne dépend ni de x_1 , ni de x_2 .

Définition 1.2. L'application f de l'ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R}^n est localement Lipschitzienne par rapport à x sur U , si $\forall (t, x) \in U$, on peut trouver un voisinage ouvert de (t, x) dans U , dans lequel f est Lipschitzienne.

Bien sur si f est lipschitzienne, elle est aussi localement lipschitzienne.

Un résultat très important est que si f est de classe C^1 sur U , alors elle est localement lipschitzienne.

En particulier en dimension 1, la constante γ est égale à

$$\sup_{(t,x) \in U} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right|.$$

Dans la suite de ce mémoire, on s'intéressera aux systèmes autonomes.

1.2 Stabilité et théorie de Lyapunov

1.2.1 Notion de stabilité

On représente dans cette partie les notions de stabilité pour les systèmes dynamiques autonomes. Considérons alors le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.4)$$

avec $f \in C^1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Définition 1.3 (point d'équilibre). Le système (1.4) est dit en équilibre autour de x_e , si en absence d'influence externe, son état ne varie pas au cours du temps, x_e est alors point d'équilibre du système (1.4) si $f(x_e) = 0 \quad \forall t > 0$.

Définition 1.4 (Stabilité du point d'équilibre). l'état d'équilibre $x_e \in \mathbb{R}^n$ est dit stable si: $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tel que si:

$$\|x(0) - x_e\| < \delta \quad \text{alors} \quad \|x(t) - x_e\| < \epsilon.$$

Dans le cas contraire x_e est dit instable.

Cette définition signifie que la trajectoire d'état peut être gardé arbitrairement près de x_e , si l'on prend une condition initiale suffisamment proche de x_e .

Définition 1.5 (Attractivité). L'état d'équilibre x_e est attractif s'il existe $\delta > 0$ tel que si $\|x(0) - x_e\| < \delta$ alors pour tout $v > 0 \exists T > 0$ qui satisfait:

$$\|x(t) - x_e\| < v \quad \text{pour tout} \quad t \geq T.$$

Remarque 1.1. L'attractivité n'implique pas la stabilité ni l'inverse, la condition d'attractivité exprime que si l'état initial est dans un certains voisinage de l'état d'équilibre, alors l'état du système reviendra nécessairement à l'origine au bout d'un temps suffisant.

Définition 1.6 (Stabilité asymptotique). Un point d'équilibre x_e est asymptotiquement stable s'il est stable et s'il existe $\delta > 0$ tel que:

$$\|x(0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_e.$$

Un point d'équilibre est asymptotiquement stable s'il est stable et attractif, la stabilité asymptotique signifie que non seulement l'équilibre est stable, mais que de plus on est capable de déterminer un voisinage du point d'équilibre tel que n'importe qu'elle trajectoire issue x_0 appartenant à un voisinage de x_e tend vers x_0 quand $t \rightarrow \infty$.

Définition 1.7 (Stabilité exponentielle). Un équilibre x_e est exponentiellement stable s'il existe $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$ tels que:

$$\forall t > 0 \exists B_r(x_e, r), \quad \forall x_0 \in B_r, \quad \|x(t) - x_e\| < \alpha \Rightarrow \|x(0) - x_e\| < \exp(-\lambda t)$$

Cela signifie que vecteur d'état, pour une condition initial $x_0 \in B_r$ converge vers x_e plus rapidement qu'une fonction exponentielle, λ est appelé le taux de convergence, d'autre part la stabilité exponentielle implique la stabilité asymptotique qui implique la stabilité.

Remarque 1.2. dans chacune des définitions précédentes, la stabilité est définie d'une manière local puisque relié à la notion de voisinage. En utilisant les définition précédentes, il n'est pas possible à priori de prédire le comportement du système pour une condition initial prise loin du point d'équilibre.

Définition 1.8 (Stabilité globale). Si la propriété de stabilité asymptotique (exponentielle) est vérifiée quelque soit $x(0)$ dans \mathbb{R}^n , le point d'équilibre est globalement asymptotiquement (exponentiellement) stable.

1.2.2 Stabilité de Lyapunov

La définition de la stabilité présente certains désavantages importants:

- Il est nécessaire de pouvoir calculer de manière explicite chaque solution correspondant à chacune des conditions initiales.

– Le maniement de la définition est fastidieux.

Par conséquent, des résultats permettant de déterminer la stabilité sans devoir intégrer les équations différentielles seraient les bienvenues.

Le comportement stable ou instable d'un système est relié à la fois à la caractéristique et à l'évolution de sa fonction d'énergie, la présence d'un maximum ou minimum d'énergie possède une influence critique. De plus la présence des perturbation est responsable de la croissance d'énergie complète, et influence donc la stabilité. Le comportement est stable lorsque:

1. Énergie E diminue et E est minimum au point d'équilibre.
2. Énergie E est conservée et E est minimum à l'équilibre.

Par contre, le comportement est instable lorsque:

1. L'énergie augmente.
2. L'énergie E est conservé, mais elle ne correspond pas à un minimum à l'équilibre.

Exemple 1.1 (le système masse-ressort-amortisseur). En appliquant le principe fondamental de la dynamique au centre de gravité de la masse on obtient:

Equation du mouvement:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + k_0x + k_1x^3 = 0$$

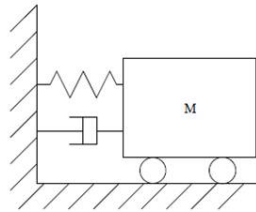


FIG. 1.1 – *Système masse-ressort*

Représentation d'état:

$$\text{Posons } \begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases} \quad \text{on obtient} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{b}{m}x_2 + \frac{k_0}{m}x_1 - \frac{k_1}{m}x_1^3. \end{cases}$$

Point d'équilibre (0,0)

La question de savoir si ce point d'équilibre est stable. La masse est tirée loin de sa position (longueur naturelle du ressort), puis lâché. Reprendra-t-elle sa position d'équilibre?.

Etude de l'énergie mécanique totale:

$$\text{Énergie cinétique: } E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2.$$

$$\text{Énergie potentielle: } E_{pot} = \int_0^x (k_0\beta + k_1\beta^3) d\beta = \frac{1}{2}k_0x_1^2 + \frac{1}{4}k_1x_1^4.$$

$$\text{Énergie mécanique total: } E_m = V(x) = \frac{1}{2}k_0x_1^2 + \frac{1}{4}k_1x_1^4 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2.$$

Etude de la variation:

$$\frac{d}{dt}[V(x(t))] = (m\ddot{x}(t) + k_0x(t) + k_1x^3(t))\dot{x}(t) = -b |\dot{x}|^3 < 0.$$

L'énergie du système à partir d'une valeur initiale est continûment dissipée par l'amortisseur jusqu'au point d'équilibre.

La théorie de Lyapunov et en particulier la méthode directe de Lyapunov (dite aussi deuxième méthode) est fondée sur l'extension de ses concepts, la procédure de base est de générer une fonction scalaire "de type énergie" pour le système dynamique, et d'en examiner la dérivée temporelle, ces fonctions sont notées V .

Si une fonction de Lyapunov existe pour un système donné alors ce système est stable. Si la fonction de Lyapunov est strictement décroissante c'est-à-dire que $\dot{V} < 0 \quad \forall \varepsilon \neq 0$ alors la stabilité est en plus asymptotique. On peut ainsi conclure quant à la stabilité sans avoir recours à la solution explicite des équations différentielles.

1.2.3 Fonction de Lyapunov

Définition 1.9. Une fonction de Lyapunov est une fonction continue $V : R^n \rightarrow R$ telle que:

$$V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \quad \text{et} \quad V(x) = 0 \quad \text{si} \quad x = 0,$$

ayant en plus la propriété:

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \neq 0 \quad \text{et} \quad \dot{V}(x) = 0 \quad \text{si} \quad x = 0.$$

Définition 1.10 (Fonctions définies positive). 1-Une fonction scalaire $V : R^n \rightarrow R$ est localement définie positive dans Ω , où Ω est un voisinage de l'origine si:

1. $V(0) = 0$,
2. $\forall x \neq 0 \in \Omega \quad V(x) > 0$.

2-Une fonction scalaire $V : R^n \rightarrow R$ est définie positive si elle vérifie:

1. $V(0) = 0$,
2. $\forall x \neq 0 \in R^n \quad V(x) > 0$.

Définition 1.11 (Fonctions semi définies positives). 1-Une fonction scalaire $V : R^n \rightarrow R$ est localement semi définie positive dans Ω , où Ω est un voisinage de l'origine si:

1. $V(0) = 0$,
2. $\forall x \neq 0 \in \Omega \quad V(x) \geq 0$.

2-Une fonction scalaire $V : R^n \rightarrow R$ est semi définie positive si elle vérifie:

1. $V(0) = 0$,
2. $\forall x \neq 0 \in R^n \quad V(x) \geq 0$.

Remarque 1.3. 1. Si une fonction V est (localement),(semi) définie négative alors $-V$ est (localement), (semi) définie positive.

2. Cas particulier important: la forme quadratique $V(x) = x^T P x$, $x \in R^n$, avec $P = P^T$, V est (semi) définie positive, (négative) si P est une matrice (semi) définie positive, (négative).
3. Une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice P soit définie positive est que ses valeurs propres soient toutes positives.

Exemple 1.2. 1. $V_1 = x_1^2 + x_2^2$ est définie positive dans R^2 et semi-définie positive dans R^3 .

2. $V_2(x) = (x_1 + x_2)^2$ est seulement semi-définie positive dans R^2 , car nulle sur la droite $x_1 + x_2 = 0$.

3. $V_3(x) = x_1 \sin(x_1)$ est localement semi-définie positive.

Définition 1.12 (Dérivée de la fonction de Lyapunov). Soit $V : R^n \rightarrow R$ une fonction continûment différentiable et soit l'équation non linéaire différentielle $\dot{x} = f(x)$, $x \in R^n$ on définit alors: $\dot{V} : R^n \rightarrow R$ par:

$$\dot{V}(x) = \left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]' f(x) \quad \text{où} \quad \left[\frac{\partial V}{\partial x}(x) \right] \quad \text{est le gradient de } V(x).$$

$\dot{V}(x)$ est appelé la dérivée de $V(x)$ le long des trajectoires de $\dot{x} = f(x)$ (par abus d'écriture, représente $\frac{d}{dt}V(x)(t)$).

Exemple 1.3. Soit $V(x) = x_1^2 + x_2^2$, alors la dérivée le long des trajectoires $\dot{x} = f(x)$ où $f(x) = [f_1(x), f_2(x)]'$ s'écrit:

$$\dot{V} = [2x_1 \quad 2x_2] \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}.$$

Remarque 1.4. Dans le cas général, il n'existe pas de méthode pour trouver toutes les fonctions candidates de Lyapunov. Dès lors, la théorie de Lyapunov conduit à des conditions suffisantes de stabilité dont le pessimisme dépend de la forme particulière imposée à la fonction $V(x)$ et de la structure du système. Cependant, il existe des familles de fonctions de Lyapunov souvent utilisées et dont l'adoption dépend de la nature du système à étudier (systèmes linéaires, systèmes continus par morceaux, systèmes à retard, systèmes linéaires incertains, ...).

Le choix le plus classique consiste à choisir une fonction de Lyapunov sous forme quadratique

$$V(x) = x^T P x, \quad P > 0 \quad \text{symétrique.}$$

Théorème de stabilité locale

Le premier théorème en relation avec la fonction de Lyapunov est le résultat de stabilité local autour du point d'équilibre. Nous énonçons ce théorème :

Théorème 1.1 (Lyapunov, 1892. [3]). Soit $x_e = 0$ un point d'équilibre du système (1.4) et D un ouvert de R^n , contenant x_0

Soit $V : D \rightarrow R$ une fonction continûment différentiable telle que:

i/ $V(0) = 0$ et $V(x) > 0$ dans $D - \{0\}$

ii/ $\dot{V}(x) \leq 0$ dans D , alors $x_0 = 0$ est stable.

Si de plus on'a: iii/ $\dot{V} < 0$ dans $D - \{0\}$ alors $x_0 = 0$ est asymptotiquement stable.

Théorème de stabilité globale

Nous avons vu que la stabilité local signifie la stabilité pour toute condition initiale x_0 dans un voisinage D du point d'équilibre, et la stabilité globale celle pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$. La question est de savoir s'il suffit de remplacer D par \mathbb{R}^n , et vérifier les hypothèses du théorème de Lyapunov afin de conclure sur la stabilité globale du système. La réponse est non par conséquent il faut une condition supplémentaire. Pour que l'on puisse garantir que le théorème de Lyapunov conclut sur la stabilité globale d'un système, il faut d'une part que toutes les hypothèses de ce théorème soient satisfaites, et d'autre part il faut également que la condition de bornitude radiale existe, c'est-à-dire

$$V(x) \rightarrow \infty \quad \text{lorsque} \quad \|x\| \rightarrow \infty.$$

Dans ce cas, on dit que V est radialement non-bornée. Le théorème suivant, récapitule ces conditions:

Théorème 1.2. [3] Soit $x = 0$ un point d'équilibre pour le système (1.4). Soit $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 vérifiant:

$$\begin{aligned} V(x) &> 0 \quad \forall x \neq 0, \quad V(0) = 0. \\ \dot{V}(x) &< 0 \quad \forall x \neq 0, \\ \|x\| \rightarrow \infty &\Rightarrow V(x) \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{1.5}$$

alors $x = 0$ est globalement asymptotiquement stable.

Exemple 1.4. considérons le système

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -h(x_1) - ax_2 \end{aligned}$$

où $a > 0$, $h(\cdot)$ est localement lipschitz, $h(0) = 0$, et $yh(y) > 0$ pour tout $y \neq 0$. La fonction de Lyapunov

$$V(x) = \frac{\delta}{2} x^T \begin{bmatrix} ka^2 & ka \\ ka & 1 \end{bmatrix} x + \delta \int_0^{x_1} h(y) dy$$

est définie positive pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, et radialement non bornée, sa dérivée

$$\dot{V}(x) = -a\delta(1-k)x_2^2 - a\delta k x_1 h(x_1)$$

est définie négative sur \mathbb{R}^2 pour tout $k \in (0,1)$. On conclut, grâce au théorème précédent, que l'origine est globalement asymptotiquement stable.

Remarque 1.5. Soit le système linéaire décrit par la représentation d'état suivante:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad x(t) \in \mathbb{R}^n. \tag{1.6}$$

Rappelons que le système (1.6) est asymptotiquement stable (le point d'équilibre étant à l'origine) ssi toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle strictement négatives :

$$\operatorname{Re}(\lambda_i(A)) < 0 \quad i = 1, \dots, n.$$

dans ce cas, la matrice A est dite de Hurwitz. Pour les systèmes linéaires, la stabilité (au sens de la définition 1.6. est équivalente à la stabilité au sens de Lyapunov. Plus précisément, on considère une fonction de Lyapunov quadratique

$$V(x) = x^T P x.$$

La dérivée de V le long des trajectoires du système est donnée par

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (A^T P - P A) x,$$

alors:

Le système linéaire est asymptotiquement stable (ou les valeurs propres de A sont à partie réelles négatives) si et seulement si, pour toute matrice symétrique définie positive Q , il existe une unique matrice P définie positive (symétrique) satisfaisant l'équation de Lyapunov

$$A^T P + P A + Q = 0. \tag{1.7}$$

Notons que l'unique solution de l'équation (1.7) est donnée par

$$P = \int_0^{+\infty} \exp(A^T t) Q \exp(At) dt.$$

1.3 Inégalités linéaires matricielles

Une grande quantité de problèmes d'automatique concernant les performances et la robustesse peuvent se traduire sous la forme d'une optimisation convexe avec des contraintes inégalités. Auparavant, on faisait appel à la résolution d'équations de Riccati basées sur des contraintes égalités. Toutefois, le retour vers les LMI, qui généralisent les problèmes d'automatique, a permis de résoudre des problèmes plus généraux.

1.3.1 Définition et intérêts des LMIs

Définition 1.13 (Contraintes LMI). Une contrainte LMI sur un vecteur réel $x \in \mathbb{R}^m$ est une expression de la forme:

$$F(x) = F_0 + x_1 F_1 + \dots + x_m F_m < 0 \tag{1.8}$$

où x_1, x_2, \dots, x_m sont des variables réelles, dites aussi variables de décision de la LMI;

$x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de décision (ses composantes sont des variables de décision), et $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, 1, \dots, m$ sont des matrices symétriques données.

Il existe des situations où les variables sont des matrices, comme par exemple l'inégalité matricielle de Lyapunov.

$$F(x) = A^T X + X A + Q < 0$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont deux matrices constantes données, et la variable $X = X^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrices inconnue. Nous allons expliquer dans ce qui suit comment se ramener de cette inégalité matricielle à une LMI de la forme (1.8).

Soit E_1, E_2, \dots, E_m une base de $S^n(\mathbb{R}) = \{N \in \mathbb{R}^{n \times n}, N = N^T\}$ l'ensemble des matrices d'ordre n . Pour tout $X \in S^n(\mathbb{R})$, il existe $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ tels que

$$X = \sum_{i=1}^m x_i E_i.$$

L'inégalité de Lyapunov devient:

$$\begin{aligned} F(X) &= F\left(\sum_{i=1}^m x_i E_i\right) = A^T \left(\sum_{i=1}^m x_i E_i\right) + \left(\sum_{i=1}^m x_i E_i\right) A + Q \\ &= Q + x_1(A^T E_1 + E_1 A) + \dots + x_m(A^T E_m + E_m A) < 0, \end{aligned}$$

qui n'est rien d'autre qu'une LMI particulière. Une autre LMI souvent rencontrée en commande est l'inégalité de Riccati

$$A^T P + P A + P B R^{-1} B^T P + Q < 0$$

où $R > 0$, $Q > 0$, $R = R^T$, $P = P^T$.

Cette dernière s'exprime comme une LMI en P .

La notation suivante $F < 0$ (ou $F \leq 0$) signifie que la matrice F est définie négative (respectivement F semi définie négative). La contrainte $F(x) < 0$ est une contrainte convexe en x , c'est-à-dire que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^m, F(x) < 0\}$ est convexe. On dit que la LMI (1.8) est faisable si et seulement s'il existe au moins un vecteur $x \in \mathbb{R}^m$ tel que l'inégalité matricielle (1.8) est vérifiée. Pour des fonctions affine F , $G : \mathbb{R}^m \rightarrow S^n(\mathbb{R})$, les contraintes $F(x) > 0$ et $F(x) < G(x)$ sont des LMIs car elle peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} -F(x) &< 0, \\ F(x) - G(x) &< 0. \end{aligned}$$

Intérêts des LMIs

L'intérêt des LMIs est résumé dans les quatre points décrits ci-dessous.

1. Convexité: La LMI (1.8) définit une contrainte convexe en x .

En effet, $\forall x, y \in \mathbb{E}$, $\mathbb{E} := \{x | F(x) > 0\}$, alors

$$F(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha F(x) + (1 - \alpha)F(y) \quad \forall \alpha \in]0, 1[, \quad (1.9)$$

où $F(x)$ est donnée par (1.8).

2. Concaténation: Des LMIs multiples peuvent se ramener en une seule. En effet, résoudre les deux LMIs $F_1(x) > 0$ et $F_2(x) > 0$ est équivalent à résoudre $\tilde{F}(x) > 0$ avec $\tilde{F} = \text{diag}(F_1, F_2)$.

3. Algorithmes: Les algorithmes utilisés pour résoudre les contraintes LMI sont efficaces: une bonne initialisation garantit la convergence de l'algorithme.

4. Applications: De nombreuses conditions classiques en automatique peuvent se formuler sous la forme de problème LMI. De plus, il est possible de convertir certaines inégalités non linéaires (notamment de Riccati) en LMI par l'utilisation de lemme de Schur.

1.3.2 Lemmes utiles pour les LMIs

Définition 1.14 (Complément de Schur). Pour une matrice A inversible, le complément de Schur de A , dans la matrice M donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

est la matrice $D - CA^{-1}B$.

Lemme 1.1 (Lemme de Schur). Soit Q_1, Q_2 et Q_3 trois matrices de dimensions appropriées telles que $Q_1 = Q_1^T$ et $Q_3 = Q_3^T$. Alors,

$$\begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{bmatrix} < 0 \quad (1.10)$$

si et seulement si

$$Q_3 < 0, \text{ et } Q_1 - Q_2 Q_3^{-1} Q_2^T < 0$$

ou de manière équivalente

$$Q_1 < 0, \text{ et } Q_3 - Q_2^T Q_1^{-1} Q_2 < 0$$

Lemme 1.2 (S-procédure). Soit T_0, \dots, T_p des matrices symétriques dans $\mathbb{R}^{n \times n}$. Nous considérons les conditions suivantes sur T_0, \dots, T_p :

$$\zeta^T T_0 \zeta > 0 \quad \forall \zeta \neq 0 \text{ tels que } \zeta^T T_i \zeta \geq 0, i = 1, \dots, p. \quad (1.11)$$

Il est évident que si

$$\text{il existe } \tau_1 \geq 0, \dots, \tau_p \geq 0, \text{ tels que } T_0 - \sum_{i=1}^p \tau_i T_i > 0 \quad (1.12)$$

alors, l'inégalité (1.11) est vérifiée.

Définition 1.15 (Valeur singulière). Les valeurs singulières d'une matrice complexe M sont les racines carrées des valeurs propres de $M^H M$ où M^H est le hermitien (transpose conjuguée) de M . On les note $\sigma_i(M)$.

Définition 1.16 (Matrice hyperbolique). On dit qu'une matrice est hyperbolique s'il ne possède pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire.

Définition 1.17 (Matrice hamiltonienne). Une matrice hamiltonienne (ou de Hamilton) H est une matrice réelle $2n \times 2n$ satisfaisant la condition que le produit JH soit symétrique, J étant la matrice antisymétrique:

$$\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix},$$

et I_n étant la matrice identité $n \times n$. En d'autres termes, H est hamiltonienne si et seulement si:

$$JH - H^T J^T = JH + H^T J = 0.$$

Propriété 1.1. Soit H une matrice par bloc $2n \times 2n$ donnée par:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

où A, B, C, D sont des matrices $n \times n$. Alors H est une matrice hamiltonienne à condition que B, C soient symétriques et que $A + D^T = 0$

– La transposée d'une matrice hamiltonienne est hamiltonienne.

- La trace d'une matrice hamiltonienne est nulle.
- Les valeurs propres de H sont symétriques par rapport à l'axe imaginaire.

Définition 1.18 (Equation algébrique de Riccati). Les équations de Riccati, de noms des mathématiciens italiens Jacopo Francesco Riccati (1676 – 1754) et de Vincenzo Riccati (1708 – 1775), sont généralement utilisées en physique quantique (Erwin Rudolf Schrödinger), dans le calcul de la matrice de gains d'une commande par retour d'état. De manière générique, elles peuvent se traduire à l'aide d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre, quadratique dans sa fonction inconnue :

$$\dot{y}(x) = q_0(x) + q_1(x)y(x) + q_2(x)y^2(x)$$

où q_0 , q_1 et q_2 ; et sont des fonctions à valeurs réelles ou complexes telles que :

$$\begin{aligned} q_0(x) &\neq 0, \\ q_2(x) &\neq 0. \end{aligned}$$

Si $q_2(x) \neq 0$, l'équation de Riccati devient une équation différentielle ordinaire linéaire.

Lemme 1.3 (Lemme de Gronwall, forme différentielle). Soit $u : [t_0, t_1] \mapsto \mathbb{R}^+$, une fonction continue, dérivable sur $[t_0, t_1]$. Soit $v : [t_0, t_1] \mapsto \mathbb{R}^+$ continue telle que

$$u'(t) \leq v(t)u(t), \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

alors

$$u(t) \leq u(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t v(s) ds\right).$$

Chapitre 2

Observateur de Luenberger

2.1 Introduction:

La mise en oeuvre des lois de commande basées sur le modèle mathématique du système, repose implicitement sur l'hypothèse que tout l'état est connu à chaque instant. Pour des raisons technologiques (de matériel, de réalisabilité, etc), de fiabilité (panne des éléments de mesure) ou encore économiques (coût des capteurs), dans de nombreuses applications la mesure de tout l'état n'est pas possible.

De ce fait, l'idée repose sur l'utilisation d'un observateur d'état. L'objectif de ce chapitre est de présenter un des observateur les plus répandu dans la littérature: il s'agit de l'observateur de Luenberger. Pour ce faire, nous estimons nécessaire de présenter, dans un premier temps, certains concepts important dans le domaine de la reconstruction d'état, qui sont la contrôlabilité, observabilité et stabilisabilité des systèmes dynamiques.

2.2 Équations d'état des systèmes linéaires et non linéaires

La phase de modélisation est importante dans le processus d'analyse et de synthèse d'un système de commande. En Automatique, le modèle mathématique d'un système dynamique est défini comme un ensemble d'équations qui représentent le comportement dynamique du système avec la précision souhaitée. L'état d'un modèle représente l'ensemble des paramètres nécessaires pour connaître le comportement de la sortie d'un système en fonction des entrées auxquelles il est soumis.

Considérons le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x,u), \tag{2.1}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état du système dynamique. $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et f est une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Ce système est dit en boucle ouverte. Un contrôle en boucle ouverte est l'application $t \rightarrow u(t)$ définie d'un intervalle de temps dans l'espace \mathbb{R}^m . Dans beaucoup de situations pratiques, une partie seulement de l'état du système, appelée la sortie ou la variable observée, est mesurée. Un système commandé-observé est par définition un système différentiel de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = h(x,u) \end{cases} \tag{2.2}$$

où $y(t) \in \mathbb{R}^p$ représente le vecteur de sortie du système dynamique. Ce système est dit en boucle ouverte et est représenté par la figure suivante :

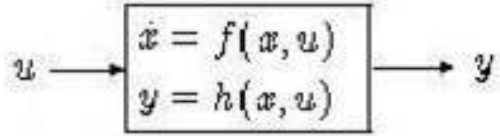


FIG. 2.1 – *Système contrôlé-observé*

Un contrôle u en boucle fermée, appelé aussi une *rétroaction*, ou un *bouclage*, ou encore un *feedback*, est une application $x(t) \mapsto u(t) = \gamma(x)(t)$ définie sur l'espace d'état \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^m . La structure de la représentation d'état commune pour un système continu linéaire à coefficients constants LTI (Linéaire à Temps Invariant) est donnée par l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.3)$$

2.2.1 Propriétés des systèmes contrôlés-observés

Pour un système (2.2) décrit dans l'espace d'état, il existe des propriétés comme la contrôlabilité, l'observabilité, la stabilisabilité et la détectabilité, qui jouent un rôle important dans les problèmes de synthèse de correcteurs et d'observateurs.

Les deux concepts fondamentaux de contrôlabilité et d'observabilité pour les systèmes linéaires peuvent être caractérisés en utilisant une condition de rang généralisé.

Contrôlabilité

Formellement, un système est dit contrôlable si nous pouvons le ramener à tout état prédéfini au moyen d'une commande, en d'autres termes, si quelque soit l'état $x(t_1)$ à l'instant initial t_1 , il existe une commande admissible $u(t)$, appliquée sur un intervalle de temps fini $[t_1, t_f]$ qui amène le système initialement en $x(t_1)$ à l'état $x(t_f)$ en un temps fini. On dispose de la définition mathématique de la contrôlabilité (ou de la commandabilité):

Définition 2.1. On dit que le système (2.2) est contrôlable (ou commandable) en temps $T > 0$, s'il existe un contrôle u tel que la trajectoire associée relie x_0 à x_1 en temps T . i.e.:

$$\begin{aligned} \forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n \quad \exists u \in L_{loc}^\infty([0, T], \mathbb{R}^m), \quad \exists x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \quad \text{p.p. sur } [0, T] \\ x(0) &= x_0, \quad x(T) = x_1. \end{aligned}$$

Remarque 2.1. En général, la commande u n'est pas unique, il en existe une infinité. Cette étape s'appelle planification de trajectoire: calculer $t \mapsto u(t)$ à partir de la connaissance de f , x_0 , x_1 constitue l'une des questions majeures de l'automatique. Cette question est très loin d'être résolue actuellement.

Nous disposons dans le cas des systèmes linéaires du critère de Kalman permettant de caractériser la propriété de contrôlabilité.

Théorème 2.1 (Critère de Kalman). *Un système LTI (2.3) est contrôlable si et seulement si:*

$$\text{rang} \left(\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \right) = n. \quad (2.4)$$

Cette matrice est appelée matrice de contrôlabilité. Nous disons alors que la paire (A,B) est contrôlable.

Observabilité

L'observabilité d'un processus est un concept très important dans le domaine de l'estimation de l'état. En effet, pour reconstruire les états inaccessibles d'un système, il faut savoir a priori, si les variables d'états sont observables ou non. L'observabilité d'un système est la propriété qui permet de dire si l'état peut être déterminé uniquement à partir de la connaissance des signaux d'entrées et de sorties.

Dans le cas des systèmes non linéaires, la notion d'observabilité est peu maniable et elle est liée aux entrées et aux conditions initiales. Il existe plusieurs façons de définir la notion d'observabilité. En lien avec le concept d'indiscernabilité (ou d'indistinguabilité) des états. Une définition très fréquente a été établie dans [6].

Définition 2.2. Fixons une entrée $t \mapsto u(t)$, $t \in [0, T]$. Cette entrée sépare, ou distingue, les états initiaux x_0 et x_1 du système (2.2) si

$$y(x_0, u(\cdot)) \neq y(x_1, u(\cdot))$$

Autrement dit, x_0 et x_1 sont distinguables s'il existe un contrôle u tel que les trajectoires observées diffèrent.

Définition 2.3 (observabilité). Le système (2.2) est observable en temps T , si pour toute paire d'états initiaux x_0 et x_1 , avec $x_0 \neq x_1$, il existe une entrée $u \in L^\infty([0, T], \mathbb{R})$ qui distingue x_0 et x_1 . Autrement dit:

$$\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n, \quad x_0 \neq x_1 \implies \exists u \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}) \quad \text{tel que } y(x_0, u(\cdot)) \neq y(x_1, u(\cdot)).$$

De manière équivalente, on peut dire:

$$\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n, \quad \forall u(\cdot) \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}^m) \quad y(x_0, u(\cdot)) = y(x_1, u(\cdot)) \implies x_0 = x_1$$

Le problème de l'observabilité est donc d'établir l'injectivité de l'application $x_0 \rightarrow y(x_0, u(\cdot))$. Si cette application est injective pour une certaine entrée $u \in L^\infty([0, T], \mathbb{R})$, le système (2.2) est dit observable. Si elle est injective pour toutes les entrées u , le système (2.2) est dit uniformément observable.

Un critère de Kalman existe également pour la notion d'observabilité et fait intervenir la matrice dynamique A et la matrice de sortie C et il est donné par le théorème suivant :

Théorème 2.2 (Critère de Kalman). *Un système LTI d'équation dynamique d'état donnée par (2.3) est observable si et seulement si:*

$$\text{rang} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n. \quad (2.5)$$

Cette matrice est appelée matrice d'observabilité. Nous disons alors que la paire (A,C) est observable.

Remarque 2.2.

$$\text{On a } \text{rang} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n \Leftrightarrow \text{rang} \left(C^T \quad A^T C^T \quad \dots \quad (A^{n-1})^T C^T \right) = n,$$

et par conséquent, le système (2.3) est observable si et seulement si le système $\dot{x} = A^T x + C^T x$ est contrôlable. C'est la dualité contrôlabilité/observabilité. Ce fait, très important, permet de transférer aux systèmes observés tous les résultats établis sur les systèmes contrôlés.

Les propriétés de contrôlabilité et d'observabilité d'une représentation d'état sont des propriétés relativement fortes, qui peuvent ne pas être vérifiées simultanément pour une représentation d'état donnée. Deux autres propriétés plus faibles peuvent alors être satisfaites et nous permettre d'utiliser cette représentation d'état, qui sont la stabilisabilité et la détectabilité.

Stabilisabilité

Le problème de stabilisation (ou régulation) du système (2.1) consiste à maintenir ce système près d'un point d'équilibre x^0 . Il s'agit donc de construire une loi de contrôle $u = \gamma(x)$ telle que x^0 soit un équilibre asymptotiquement stable du système en boucle fermée (voir la Figure 3.3).

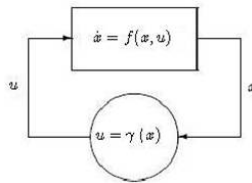


FIG. 2.2 – .Système en boucle fermée

Plus précisément:

Définition 2.4 (Stabilisabilité). Soit (x^0, u^0) un point d'équilibre du système (2.1). On dit que ce système est (localement) (\mathcal{C}^1) stabilisable autour de (x^0, u^0) , s'il existe une fonction de classe \mathcal{C}^1

$$\gamma : \Xi_0 \rightarrow \mathcal{U}, \quad \gamma(x^0) = u^0 \tag{2.6}$$

définie sur un certain voisinage Ξ_0 de x^0 pour laquelle le système en boucle fermée (à espace d'état Ξ_0)

$$\dot{x} = f(x, \gamma(x)). \tag{2.7}$$

est (localement) asymptotiquement stable au point d'équilibre x^0 .

Si $\Xi_0 = \mathbb{R}^n$ et le système (2.7) est globalement stable, on dit que le système (2.1) est globalement \mathcal{C}^1 stabilisable.

Dans le cas où la fonction γ est simplement continue, on dira que le système (2.1) est stabilisable.

La loi de contrôle donnée par la formule (2.6) est appelée *bouclage statique* et la stabilisation donnée par la définition précédente est dite *stabilisation par bouclage statique*.

Le problème de stabilisation de tels systèmes fait appel à la notion de bouclage dynamique.

Définition 2.5 (Bouclage dynamique). On dit que u est bouclage dynamique (ou retour d'état dynamique) du système en boucle ouverte

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = h(x,u) \end{cases} \quad (2.8)$$

s'il est la sortie d'un système ayant y comme entrée, c'est à dire

$$\begin{cases} u = \gamma(y,z) \\ \dot{z} = g(y,z) \end{cases}$$

Dans ce cas, le système en boucle fermée est représenté par la Figure 3.2

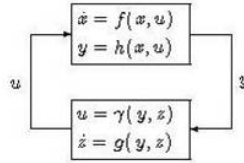


FIG. 2.3 – .Bouclage dynamique

Ce système s'écrit tout simplement

$$\begin{cases} \dot{x} = \bar{f}(x,z), \\ \dot{z} = \bar{g}(x,z). \end{cases} \quad (2.9)$$

où $\bar{f}(x,z) = f(x,\gamma(y,z))$ et $\bar{g}(x,z) = g(y,z)$.

Le principe de stabilisation du système contrôlé-observé (2.8) consiste donc à construire un bouclage dynamique $u = \gamma(y,z)$ de manière à ce le point d'équilibre $(x = 0, z = 0)$ soit asymptotiquement stable du système en boucle fermée (2.9).

La notion de contrôle (ou de commande) en boucle fermée fait partie de la vie quotidienne: se déplacer dans une pièce, conduire une voiture, ranger un objet dans une armoire... etc. Tous ces petits gestes de la vie quotidienne font intervenir un capteur (la vue, le toucher) qui informe notre cerveau de la situation réelle, ce dernier compare en permanence la situation observée avec la situation souhaitée (la consigne) et commande nos muscles (les organes de commande), pour tenter de rapprocher la situation réelle de celle qui est souhaitée.

Dans le cas d'un système LTI (2.3), nous disposons de deux critères de stabilisabilité:

1. La représentation d'état (2.3) est dite stabilisable, ou encore la paire (A,B) est stabilisable, si et seulement si tous ses modes instables sont commandables.
2. Le système (2.3) est stabilisable si et seulement si, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^+$, $(Re(\lambda) \geq 0)$ c'est-à-dire pour les valeurs propres instables de A , nous avons:

$$rang[\lambda I - AB] = n. \quad (2.10)$$

2.2.2 Principe d'estimation d'état

Soit le système dynamique (S) décrit par les équations :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (\mathcal{S})$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie. Un observateur ou reconstituteur d'état est un capteur logiciel permettant la reconstruction des variables d'état internes d'un système à partir des entrées et des sorties du système réel. Alors, l'observateur ou l'estimateur d'état a pour entrées les entrées et les sorties du système réel et pour sorties le vecteur d'état estimé.

Définition 2.6 (Observateur). Le système dynamique (\mathcal{O}):

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \phi(\hat{x}(t), u(t), y(t)) \\ \hat{y}(t) = \varphi(\hat{x}(t), u(t), y(t)) \end{cases} \quad (\mathcal{O})$$

où $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$. Les entrées de ce système sont u , y et la sortie est la sortie estimé $\hat{y} \in \mathbb{R}^q$, $q \leq n$, est un observateur asymptotique local pour le système (S) si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

1. $x(0) = \hat{x}(0) \Rightarrow x(t) = \hat{x}(t) \quad \forall t \geq 0$;
2. il existe un voisinage ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ de l'origine tel que:

$$x(0) - \hat{x}(0) \in \Omega \Rightarrow \|e(t)\| = \|x(t) - \hat{x}(t)\| \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow +\infty.$$

Si l'erreur $e(t)$ entre le vecteur d'état $x(t)$ et son estimé $\hat{x}(t)$ tend exponentiellement vers zero, le système (\mathcal{O}) est dit observateur exponentiel de (S).

Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^n$, le système (\mathcal{O}) est dit observateur global de (S).

La condition 2 signifie que l'erreur d'estimation doit être asymptotiquement stable. Un système pour lequel un observateur de la forme (\mathcal{O}) existe et tel que la condition 2 soit satisfaite est dit **détectable**. Quant à la condition 1, elle signifie que si l'observateur (\mathcal{O}) et le système (S) possèdent tous les deux le même état initial, alors l'état estimé de (\mathcal{O}) devrait être égal à l'état réel du système (S) à tout instant.

La condition 1 peut être exprimée par

$$x = \hat{x} \Rightarrow \dot{x} = \dot{\hat{x}} \quad (2.11)$$

ce qui est équivalent à

$$\phi(x(t), u(t), y(t)) = \phi(\hat{x}(t), u(t), y(t))$$

Par conséquent, sans perte de généralité, (\mathcal{O}) peut se réécrire comme suit :

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}, u) + \kappa(\hat{x}, u, y) \quad (2.12)$$

où

$$x = \hat{x} \Rightarrow \kappa(\hat{x}, u, y) = 0$$

Une fonction κ qui contient le facteur $x - \hat{x}$ satisfait (2.11), mais puisque x n'est pas mesuré, ceci n'est pas possible. Cependant, $x = \hat{x} \Rightarrow h(\hat{x}, u) = h(x, u) = y$, donc nous pouvons prendre une fonction κ de la forme :

$$\kappa(\hat{x}, u, y) = K(\hat{x}, u, y)(y - \hat{y})$$

L'observateur peut donc s'exprimer comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) + K(\hat{x}, u, y)(y - \hat{y}) \\ y = h(\hat{x}, u) \end{cases} \quad (2.13)$$

La structure de l'observateur proposées dans ce mémoire sont sous la forme (2.13).

2.3 Observateur des systèmes linéaires et non linéaires

Une solution simple et optimale au problème de l'estimation de l'état des systèmes linéaires a été proposée par Luenberger dans le cadre déterministe, et par Kalman dans le cadre stochastique. Dans les deux cas, on considère le modèle dynamique du système linéaire défini par:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t) + Lw(t) \\ y = Cx(t) + v(t) \end{cases} \quad (2.14)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, et $y \in \mathbb{R}^p$ dénote le vecteur de sortie. Les matrices A , B et C ont des dimensions appropriées.

$w(t) \in \mathbb{R}^r$ et $v(t) \in \mathbb{R}^p$ sont deux bruits blancs gaussiens d'espérance nulle, de covariances respectives Q et R . Ces bruits sont supposés non corrélés. Les conditions initiales sont définies par $x(0) = x_0$.

Dans ce qui suit, on se place dans le cas déterministe, où les bruits w et v sont nuls.

2.3.1 Observateur de Luenberger

La théorie de l'observation de Luenberger repose essentiellement sur des techniques de placement de pôles. Supposons que le système

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (2.15)$$

soit observable. Le but est de construire un observateur asymptotique $\hat{x}(\cdot)$ de $x(\cdot)$, i.e. une fonction dynamique $\hat{x}(\cdot)$ de l'observable $y(\cdot)$, telle que $\hat{x}(t) - x(t) \mapsto 0$ quad $t \mapsto \infty$. L'idée est de copier la dynamique du système observé et d'y ajouter un terme correctif qui tienne compte de l'écart entre la prédiction et la réalité.

Définition 2.7. Un observateur asymptotique (ou observateur de Luenberger) $\hat{x}(\cdot)$ de $x(\cdot)$ est une solution d'un système du type:

$$\dot{\hat{x}} = \underbrace{A\hat{x}(t) + Bu(t)}_{(I)} + \underbrace{L(C\hat{x}(t) - y(t))}_{(II)}, \quad (2.16)$$

où $L \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ est appelée matrice de gain, telle que

$$\forall x(0), \quad \hat{x}(0) \in \mathbb{R}^n \quad \hat{x}(t) - x(t) \mapsto 0 \quad \text{quad} \quad t \mapsto \infty.$$

La partie (I) est celle correspondante à la dynamique du système et la partie (II) est le correctif.

Compte tenu des équations d'état et de sortie de l'observateur (2.16) et du système (2.15), nous en déduisons le diagramme structurel présenté à la Figure (3.3) ci-dessous :

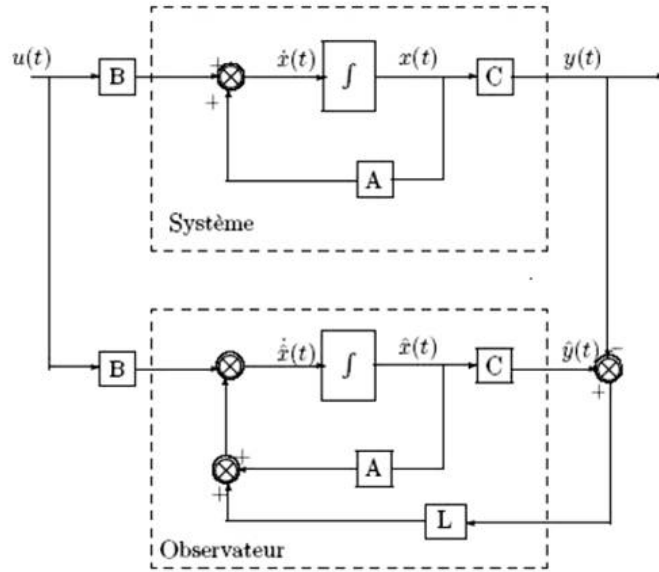


FIG. 2.4 – Diagramme structurel de l'observateur de Luenberger

Remarque 2.3. Introduisons $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$, l'erreur entre la prédiction $\hat{x}(\cdot)$ et l'état réel $x(\cdot)$.

On a

$$\dot{e}(t) = (A + LC)e(t),$$

et donc $e(t) \mapsto 0$ quand $t \mapsto \infty$ pour toute valeur initiale $e(0)$ si et seulement si la matrice $A + LC$ est Hurwitz. Construire un observateur asymptotique revient donc à déterminer une matrice de gain L telle que $A + LC$ soit Hurwitz.

2.3.2 Approche de Thau et ses généralisations pour la conception d'observateur de Luenberger

Une méthode directe de conception d'observateur est d'utiliser un retour de sortie linéaire. Cette approche, introduite initialement dans [17], s'applique sur la classe des systèmes non linéaires s'écrivant sous la forme suivante:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + \phi(x,u) \\ y = Cx \end{cases} \quad (2.17)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ représentent respectivement les vecteurs d'état, des entrées et des sorties du système. La paire (A,C) est détectable et la non-linéarité, ϕ satisfait la propriété de Lipschitz par rapport à x :

$$\| \phi(x,u) - \phi(\hat{x},u) \| \leq \gamma \| x - \hat{x} \|, \quad \forall x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad (2.18)$$

où γ est la constante de Lipschitz de la fonction ϕ .

L'observateur de type Luenberger correspondant à (2.17) est de la forme:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \phi(\hat{x},u) - L(y - C\hat{x}). \quad (2.19)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation $e = x - \hat{x}$ est donnée par l'équation :

$$\dot{e} = (A - LC)e + \phi(x,u) - \phi(\hat{x},u). \quad (2.20)$$

L'objectif est de déterminer sous quelles conditions le gain L peut garantir la stabilité de l'erreur d'estimation e en zero.

La méthode de Thau fournit une condition suffisante de stabilité asymptotique de l'erreur d'estimation (2.20). Le résultat de cette méthode est donné par le théorème suivant :

Théorème 2.3 (Thau(1973) [17]). *Considérons le système (2.17) et l'observateur (2.19). Si le gain d'observation L est choisi tel que:*

$$\gamma < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)}, \quad (2.21)$$

où $\lambda_{\min}(S)$ et $\lambda_{\max}(S)$ désignent respectivement les valeurs propres minimale et maximale de la matrice carrée S , les matrices $P = P^T > 0$ et $Q = Q^T > 0$ désignent les solutions de l'équation de Lyapunov :

$$(A - LC)^T P + P(A - LC) + Q = 0, \quad (2.22)$$

alors l'erreur d'estimation (2.20) est exponentiellement stable.

La preuve de ce théorème est basée sur l'utilisation de la fonction de Lyapunov standard

$$V = V(e) = e^T P e. \quad (2.23)$$

Pour plus de détails sur la preuve du Théorème 2.3, nous invitons le lecteur à consulter [17]. Il a été démontré dans [8] que le rapport $\frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)}$ est maximal si $Q = I_n$. Le problème est donc réduit à choisir un gain L qui satisfait

$$\gamma < \frac{1}{2\lambda_{\max}(P)}, \quad (2.24)$$

où

$$(A - LC)^T P + P(A - LC) = I_n.$$

L'approche de Thau n'est pas une méthode de synthèse systématique. Elle permet seulement de vérifier la convergence de l'observateur (2.19), a posteriori. En effet, le choix des matrices P , Q et L qui satisfont l'inégalité (3.5) n'est pas direct. Par exemple, le placement des valeurs propres de $(A - LC)$ dans le demi-plan gauche n'implique pas que la condition (3.5) est satisfaite.

Il n'existe aucune relation spécifique entre les valeurs propres de $(A - LC)$ et $\lambda_{\max}(P)$, ceci a été prouvé dans [10] par un simple exemple numérique.

Ce type d'observateur a été largement étudié dans la littérature par de nombreux chercheurs spécialistes dans le domaine de l'observation d'état. Une méthode constructive a été proposée par Raghavan & Hedrick dans [10], où une solution explicite et systématique du choix du gain de l'observateur est établie. Cette solution est illustrée dans le théorème suivant :

Théorème 2.4 (Raghavan & Hedrick (1994), [10]). *Considérons le système (2.17) et l'observateur (2.19). S'il existe $\epsilon > 0$ tel que l'équation de Riccati*

$$AP + PA^T + P(\gamma^2 I_n - \frac{1}{2\epsilon} C^T C)P + I_n + \epsilon I_n = 0, \quad (2.25)$$

admette une solution P symétrique définie positive, alors le gain

$$L = \frac{1}{2\epsilon} P C^T, \quad (2.26)$$

stabilise asymptotiquement la dynamique de l'erreur d'estimation (2.20).

Cependant, cet algorithme n'est pas efficace pour toutes les paires (A, C) observables et malheureusement ne donne pas d'informations sur les conditions que doit vérifier la matrice $(A - LC)$ afin d'assurer la stabilité de l'erreur d'estimation. Le placement des valeurs propres de $(A - LC)$ dans le demi-plan gauche est insuffisant. Dans [19], l'auteur a suggéré une procédure de conception liée directement à la matrice $(A - LC)$. Dans cette procédure, le choix du gain L tel que

$$\sigma_{\min}(A - LC) > \gamma, \quad (2.27)$$

assure l'inégalité (2.24). Les valeurs singulières de $(A - LC)$ jouent donc un rôle sur la convergence de l'observateur. Malheureusement, ce résultat est en général incorrect. Ceci a été démontré par un contre exemple dans [10].

Dans [11], Rajamani a établi un nouveau résultat permettant de corriger le précédent. Ce résultat est résumé dans le théorème suivant qui fournit des conditions nécessaires et suffisantes que doit vérifier la matrice $(A - LC)$ afin de justifier la convergence de l'observateur.

Théorème 2.5 (Rajamani (1998), [11]). *Considérons le système (2.17) et l'observateur (2.19), avec (A, C) observable et ϕ satisfait (2.18). Alors, l'erreur d'estimation est asymptotiquement stable si le gain L peut-être choisi tel que $(A - LC)$ soit stable, et*

$$\min_{w \geq 0} \left(\sigma_{\min}(A - LC - jwI_n) \right) > \gamma, \quad (2.28)$$

ou j est tel que $j^2 = -1$. La démonstration de ce théorème est donnée en trois étapes dans [11].

Chapitre 3

Approche de Rajamani et Cho pour la conception de l'observateur de Luenberger

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on développera la méthode de Rajamani et Cho pour la conception d'un observateur pour une classe de systèmes non linéaires dans lesquelles les non linéarité sont supposées lipschitziens (globalement). La dynamique du système est décrite par les équations suivantes:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \phi(x,u) \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ représentent respectivement les vecteurs d'état, des entrées et des sorties du système. La paire (A,C) est détectable et la non-linéarité ϕ satisfait la propriété de Lipschitz par rapport à x :

$$\| \phi(x,u) - \phi(\hat{x},u) \| \leq \gamma \| x - \hat{x} \| \quad \forall x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \quad (3.2)$$

où γ est la constante de Lipschitz de la fonction ϕ . Notons que tout système non linéaire de la forme:

$$\dot{x} = f(x,u)$$

peut s'exprimer sous la forme (3.1) lorsque f est différentiable par rapport à x . Par ailleurs plusieurs types de non linéarités peuvent être lipschitziennes du moins localement. Par exemple, les fonctions sinusoidales qui sont souvent rencontrées dans plusieurs problèmes de robotique sont globalement lipschitziens. Les fonctions telles que x^2 sont lipchiziennes lorsque elles sont à rang borné.

Dans ce chapitre, il est question de présenter l'approche de Rajamani et Cho [13] (et sa version corrigée donnée par Aboky et al. [2]) pour la conception d'un observateur du type Luenberger pour la classe (3.1). Cette dernière est basée sur l'équation algébrique de Riccati. Des résultats concernant la conception d'observateur pour cette classe de système ont été consignés par plusieurs auteurs, on cite à titre d'exemple les travaux de Thau [17], [10] et [2], où l'observateur considéré est de type Luenberger:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \phi(\hat{x},u) - L(y - C\hat{x}). \quad (3.3)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation $e = x - \hat{x}$ est donnée par l'équation :

$$\dot{e} = (A - LC)e + \phi(x,u) - \phi(\hat{x},u). \quad (3.4)$$

L'objectif est de déterminer le gain L pour garantir la stabilité de l'erreur d'estimation e en zéro.

Nous avons vu au chapitre 2 que l'approche de Thau consiste à choisir le gain L comme suit :

Si L est choisi tel que :

$$\gamma < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)}, \quad (3.5)$$

où $\lambda_{\min}(S)$ et $\lambda_{\max}(S)$ désignent respectivement les valeurs propres minimale et maximale de la matrice carrée S , les matrices $P = P^T > 0$ et $Q = Q^T > 0$ désignent les solutions de l'équation de Lyapunov :

$$(A - LC)^T P + P(A - LC) + Q = 0, \quad (3.6)$$

alors l'erreur d'estimation (3.4) est exponentiellement stable.

L'intérêt de l'approche [13] réside dans l'introduction d'une nouvelle méthodologie pour la conception de l'observateur de type Luenberger, basée l'utilisation de l'équation algébrique de Riccati pour le calcul de la matrice de Lyapunov et la mise en place d'un nouveau problème : la relation entre une quantité, $\delta(A,C)$, présumée être la "distance à l'inobservabilité" et la convergence d'observateur. Néanmoins, une erreur s'est glissée dans leur démarche. En effet, Aboky et al. [2] ont démontré que cette quantité $\delta(A,C)$ ne caractérise pas la distance d'inobservabilité introduite par Eising [5], et que la condition introduite dans [13] ($\gamma < \delta(A,C)$ remplaçant celle de Thau (3.5)) n'est pas suffisante pour garantir la convergence asymptotique de l'observateur. Dans ce qui suit, on exposera les résultats des deux articles [2] et [13].

3.2 Approche de Rajamani et Cho [13]

Commençons par énoncer le théorème de Rajamani et Cho qui donne la première condition suffisante de stabilité de l'erreur (3.4), exprimée sous forme d'une inégalité de type Riccati.

Théorème 3.1. *Si le gain L peut être choisi tel que :*

$$(A - LC)^T P + (A - LC)P + \gamma^2 PP + I < 0, \quad (3.7)$$

pour une certaine matrice symétrique définie positive P , alors ce choix de L garantit la stabilité asymptotique de l'erreur d'estimation.

Preuve. On suppose qu'il existe des matrices L et P qui satisfont (3.7), soit ce choix de L est utilisé dans l'observateur (3.3) pour l'estimation de l'état de système donné par (3.1).

Considérons la forme quadratique

$$V(e) = e^T P e, \quad (3.8)$$

comme fonction candidate de Lyapunov. La dérivée de V selon les trajectoires de (3.4) est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= e^T P \dot{e} + \dot{e}^T P e \\ &= e^T P [(A - LC)e + \phi(x,u) - \phi(\hat{x},u)] + [(A - LC)e + \phi(x,u) - \phi(\hat{x},u)]^T P e \\ &= e^T [(A - LC)^T P + P(A - LC)]e + e^T P [\phi(x,u) - \phi(\hat{x},u)] + [\phi(x,u) - \phi(\hat{x},u)]^T P e \end{aligned}$$

$$\dot{V}(e) = e^T[(A - LC)^T P + P(A - LC)]e + 2e^T P[\phi(x, u) - \phi(\hat{x}, u)]. \quad (3.9)$$

Puisque la non linéarité ϕ satisfait la propriété de lipschitz, donc

$$2e^T P[\phi(x, u) - \phi(\hat{x}, u)] \leq 2\gamma \|Pe\| \|e\|.$$

On a

$$\begin{aligned} & (\gamma \|Pe\| - \|e\|)^2 \geq 0, \\ \text{ou de façon équivalente} & \quad \gamma^2 \|Pe\|^2 + \|e\|^2 - 2\gamma \|Pe\| \|e\| \geq 0, \\ \text{par conséquent} & \quad 2\gamma \|Pe\| \|e\| \leq \gamma^2 \|Pe\|^2 + \|e\|^2 \leq \gamma^2 e^T P P e + e^T e. \end{aligned}$$

En injectant cette dernière quantité dans (3.9) on obtient:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) & \leq e^T[(A - LC)^T P + P(A - LC)]e + \gamma^2 e^T P P e + e^T e, \\ & \leq e^T[(A - LC)^T P + P(A - LC) + \gamma^2 P P + I]e. \end{aligned}$$

De (3.7) on déduit que $\dot{V}(e) < 0$, donc l'observateur converge asymptotiquement.

Ce théorème nous assure seulement l'existence d'une matrice de gain L tel que l'observateur soit asymptotiquement stable, par conséquent ce résultat est incomplet, et le problème se pose comme suit :

1. comment choisir L et P pour que l'équation (3.7) soit satisfaite ?.
2. Sous quelle conditions peut on choisir L pour assurer la convergence de l'observateur ?.

De nombreux travaux ont montré qu'un grand nombre de problèmes, qui apparaissent difficiles à résoudre, pouvaient se formuler et se résoudre par l'approche des inégalités linéaires matricielles (LMI). Dans notre cas le problème peut être résolu en réécrivant l'équation de Riccati (ARE) sous forme d'une LMI. Dans ce qui suit, on exposera cette approche.

3.2.1 Approche LMI standard

Après l'étude du théorème 3.1 sur la stabilité de l'erreur dynamique de l'observateur, le problème de conception d'observateur peut être reformulé ainsi: choisir L (et P) pour que l'inégalité (3.7) soit satisfaite. On remarque que l'inégalité (3.7) est non-convexe puisqu'elle contient le produit de deux variables L et P , par conséquent, on fait un simple changement de variable pour séparer L de P .

On développe (3.7) on obtient:

$$A^T P + P A - C^T L^T P - P L C + \gamma^2 P P + I < 0 \quad \text{pour } P > 0.$$

On pose $\tilde{L} = P L$, en remplaçant dans l'inégalité (3.7) on aura :

$$A^T P + P A - C^T \tilde{L}^T - \tilde{L} C + \gamma^2 P P + I < 0 \quad \text{pour } P > 0. \quad (3.10)$$

Cela montre que chercher P et L tel que l'inégalité (3.7) est vérifiée est équivalent à chercher P et \tilde{L} vérifiant (3.10).

En utilisant le lemme de Schur l'inégalité (3.10) peut être réécrite sous forme d'une inégalité linéaire matricielle (LMI), donnée comme suit :

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA - C^T \tilde{L}^T - \tilde{L}C + I & P \\ P & \frac{-1}{\gamma^2} I \end{bmatrix} < 0 \quad P > 0. \quad (3.11)$$

Pour un γ donné l'inégalité (3.11) est affine par rapport à ces deux variables P et L .

Une fois que le problème de faisabilité de \tilde{L} et P est trouvé, L peut être calculé comme suit:

$$L = P^{-1} \tilde{L}.$$

Le problème qu'on vient d'exposer peut être aussi reformulé de sorte à choisir la constante lipschitzienne maximale pour laquelle la matrice de gain L existe. Ce problème est donné sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \text{maximise } \gamma \text{ tel que} \\ \left[\begin{array}{cc} A^T P + PA - C^T \tilde{L}^T - \tilde{L}C + I & P \\ P & \frac{-1}{\gamma^2} I \end{array} \right] < 0 \\ p > 0, \quad \gamma > 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

On remarque que la contrainte n'est pas affine par rapport à γ . En faisant le changement de variable suivant : $\rho = \frac{1}{\gamma^2}$, et on obtient une LMI affine. Donc (3.12) s'écrit comme suit:

$$\begin{cases} \text{minimise } \rho \text{ tel que} \\ \left[\begin{array}{cc} A^T P + PA - C^T \tilde{L}^T - \tilde{L}C + I & P \\ P & -\rho I \end{array} \right] < 0, \\ P > 0, \quad \rho > 0, \end{cases} \quad (3.13)$$

qui est un autre problème d'optimisation sous contrainte LMI, que nous pouvons facilement implémenter sous Matlab, via le toolbox Yalmip.

3.2.2 Approche LMI en utilisant la S-procedure

L'inconvénient de nombreux résultats sur la conception d'observateur pour la classe des systèmes (3.1) donnés dans l'introduction, est que les conditions de convergence sont fortement restrictives et ne concernent que les systèmes avec des constantes de Lipschitz très faibles. Les auteurs dans [9] ont proposé une nouvelle méthode basée sur l'utilisation du lemme de la S-procédure. Ils ont montré par un exemple numérique que cette méthode est valable, même si la valeur de la constante lipschitzienne est grande. Dans ce qui suit, nous allons donner un aperçu sur ce résultat, pour plus de détails, nous invitons le lecteur à consulter [9].

Théorème 3.2. *L'erreur d'estimation est asymptotiquement stable s'il existe un scalaire $\epsilon > 0$ et des matrices $P = P^T > 0$ et \tilde{L} de dimension appropriée tels que la LMI suivante est vérifiée,*

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA - \tilde{L}C - C^T \tilde{L}^T + \epsilon \gamma^2 I & P \\ P & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0.$$

Le gain qui stabilise l'erreur d'estimation est donné par:

$$L = P^{-1}\tilde{L}.$$

Preuve. Considérons la fonction candidate de Lyapunov

$$V(e) = e^T P e,$$

en vertu du théorème 3.1, la dérivée $\dot{V}(e)$ est donnée par :

$$\dot{V}(e) = e^T [(A - LC)^T P + P(A - LC)] e + e^T P [\phi(x, u) - \phi(\hat{x}, u)] + [\phi(x, u) - \phi(\hat{x}, u)] P e$$

ou de façon équivalente :

$$\dot{V}(e) = \begin{bmatrix} e^T & [\phi(x, u) - \phi(\hat{x}, u)]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A - LC)^T P + P(A - LC) & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \phi(x, u) - \phi(\hat{x}, u) \end{bmatrix}.$$

On a $e = x - \hat{x}$, par conséquent

$$\dot{V}(e) = \begin{bmatrix} (x - \hat{x})^T & [\phi(x, u) - \phi(\hat{x}, u)]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A - LC)^T P + P(A - LC) & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \hat{x} \\ \phi(x, u) - \phi(\hat{x}, u) \end{bmatrix} < 0, \quad (3.14)$$

de plus, ϕ satisfait la propriété de Lipschitz donc

$$\| \phi(x, u) - \phi(\hat{x}, u) \| \leq \gamma \| x - \hat{x} \|,$$

$$\text{ce qui est équivalent à : } \| \phi(x, u) - \phi(\hat{x}, u) \|^2 \leq \gamma^2 \| x - \hat{x} \|^2,$$

$$\text{soit encore } [\phi(x, u) - \phi(\hat{x}, u)]^T [\phi(x, u) - \phi(\hat{x}, u)] - \gamma^2 [x - \hat{x}]^T [x - \hat{x}] \leq 0.$$

Cette dernière inégalité peut être réécrite comme suit :

$$\begin{bmatrix} (x - \hat{x})^T & [\phi(x, u) - \phi(\hat{x}, u)]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\gamma^2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x - \hat{x}) \\ \phi(x, u) - \phi(\hat{x}, u) \end{bmatrix} \leq 0.$$

Donc la fonction non linéaire $\phi(x, u)$ satisfait l'inégalité de type:

$$\dot{V}(e) = \begin{bmatrix} (x - \hat{x})^T & [\phi(x, u) - \phi(\hat{x}, u)]^T \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} x - \hat{x} \\ \phi(x, u) - \phi(\hat{x}, u) \end{bmatrix} \leq 0, \quad (3.15)$$

où $M \in R^{2n \times 2n}$ une matrice donnée par:

$$\begin{bmatrix} -\gamma^2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

On applique le lemme de la S-procedure pour l'équation (3.14) et (3.15), on aura $\dot{V}(e) < 0$ si et seulement si il existe $\epsilon > 0$ tel que:

$$\begin{bmatrix} (A - LC)^T P + P(A - LC) & P \\ P & 0 \end{bmatrix} - \epsilon M < 0,$$

ou de façon équivalente :

$$\begin{bmatrix} (A - LC)^T P + P(A - LC) + \epsilon \gamma^2 I & P \\ P & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0. \quad (3.16)$$

Posons $\tilde{L} = PL$, la condition nécessaire et suffisante pour la conception d'observateur dans ce cas est donnée par:

$$\exists \epsilon > 0 \quad \text{tel que } \begin{bmatrix} A^T P + PA - \tilde{L}C - C^T \tilde{L}^T + \epsilon \gamma^2 I & P \\ P & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0.$$

3.2.3 Approche basée sur l'équation de Riccati

Les solutions des équations algébrique de Riccati peuvent ne pas exister, ou bien si elles existent peuvent être unique ou en nombre fini. Cette richesse de propriétés est une des principales raison de son succès et son omniprésence en automatique. La relation entre ses solutions et la convergence de l'observateur de type Luenberger, pour la classe des systèmes (3.1) donnés dans l'introduction a été étudiée par de nombreux chercheurs spécialisé dans le domaine de l'observation d'état [19], [17], [10] et [11]. Malheureusement beaucoup de résultats ont été clarifiés et cela est dû à leurs inexactitudes, parmi ces résultat on cite à titre exemple celui de Zak [19].

Dans ce contexte Rajamani et Cho ont proposé une nouvelle méthode basée sur l'approche de l'équation de Riccati et la distance à l'inobservabilité, cette distance mesure la norme de la perturbation minimale qui diminue le rang de la matrice d'observabilité, par conséquent, cette perturbation rend le système non observable. Pour ces auteurs la convergence de l'observateur est garantie si la distance à l'inobservabilité est plus grande que la constante de Lipschitz. Dans ce qui suit, on présentera cette méthode.

3.2.4 Relation entre la conception d'observateur et la distance à l'inobservabilité

Définition 3.1 (Distance à l'inobservabilité). La distance à l'inobservabilité de la paire (A, C) , $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, est définie comme la magnitude de la plus petite perturbation $(E, F) \in \mathbb{C}^{n \times n} \times \mathbb{C}^{n \times p}$ qui rend la paire $(A + E, C + F)$ non observable, cette quantité est donnée par:

$$\delta(A, C) = \inf_{(A+C, C+F) \text{ inob}} \| [E, F] \|_2 . \quad (3.17)$$

Selon Rajamani et Cho la distance à l'inobservabilité de la paire (A, C) est caractérisée par le minimum sur w de la plus petite valeur singulière de

$$\begin{bmatrix} jwI - A \\ C \end{bmatrix} \quad w \in R,$$

par conséquent

$$\delta(A, C) = \min_w \sigma_{\min} \begin{bmatrix} jwI - A \\ C \end{bmatrix} . \quad (3.18)$$

Théorème 3.3 (Rajamani et Cho (1998)[13]). *Si la distance à l'inobservabilité de la paire (A, C) est plus grande que la constante lipschitzienne i.e. $\delta(A, C) > \gamma$, et si A est stable, alors il existe une matrice L telle que l'erreur donnée par (3.4) est asymptotiquement stable.*

Preuve. La démonstration de ce théorème est scindée en deux étapes.

Étape 1:

On montre que si $\delta(A, C) > \gamma$, alors il existe un $\epsilon > 0$ tel que la matrice

$$H = \begin{bmatrix} A & \gamma^2 I \\ -I + \frac{C^T C}{\gamma^2} - \epsilon I & -A^T \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

est hyperbolique.

Étape 2:

Si H est hyperbolique, alors il existe $P > 0$ et L solution de l'équation de Riccati (3.7), ainsi l'observateur

(3.3) converge asymptotiquement vers l'état de système (3.1).

Preuve de l'étape 1

Puisque la distance à l'inobservabilité de la paire (A, C) est plus grande que γ , alors on a

$$\min \sigma_{\min} \begin{bmatrix} jwI - A \\ C \end{bmatrix} > \gamma. \quad (3.20)$$

On calcule les valeurs singulières de la matrice (3.20). Ce qui revient aussi au calcul des valeurs propres de:

$$\begin{bmatrix} jwI - A \\ C \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} jwI - A \\ C \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

ou bien équivalent à

$$(jwI - A)^*(jwI - A) + C^T C. \quad (3.22)$$

On pose

$$\begin{aligned} \Delta(jw) &= (jwI - A)^*(jwI - A) + C^T C \\ &= w^2 + AIw - A^T Iw + A^T A + C^T C \\ &= w^2 + (A - A^T)jw + A^T A + C^T C, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \sigma_{\min}(\Delta(jw)) &= \sigma_{\min} w^2 \left[1 + \frac{j}{w} (A - A^T) + \frac{1}{w^2} (A^T A + C^T C) \right] \\ &= w^2 \sigma_{\min} \left[1 + \frac{j}{w} (A - A^T) + \frac{1}{w^2} (A^T A + C^T C) \right]. \end{aligned}$$

Comme les valeurs singulières sont continues en w alors on a:

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow \infty} \left[\sigma_{\min}(\Delta(jw)) \right] &= \infty \\ \Rightarrow \sigma_{\min} \begin{bmatrix} jwI - A \\ C \end{bmatrix} &\rightarrow \infty \quad \text{quand } w \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Il existe $w_1 \in \mathbb{R}$ tel que le minimum global est atteint pour cette valeur, ce qui implique que

$$\min_w \sigma_{\min} \begin{bmatrix} jwI - A \\ C \end{bmatrix} = \sigma_{\min} \begin{bmatrix} jw_1 I - A \\ C \end{bmatrix} = \gamma_{\min}.$$

Donc pour tout w on a

$$(jwI - A)^*(jwI - A) + C^T C \geq \gamma_{\min}^2 I. \quad (3.23)$$

D'après (3.20), on a $\gamma < \gamma_{\min}$ ou de façon équivalente $\gamma^2 < \gamma_{\min}^2$. En utilisant la propriété d'Archimède il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\gamma^2 + \epsilon \gamma^2 < \gamma_{\min}^2 \Rightarrow \gamma^2(1 + \epsilon) < \gamma_{\min}^2.$$

En exploitant cette dernière estimation dans (3.23), on obtient:

$$(jwI - A)^*(jwI - A) + C^T C > \gamma^2 I + \gamma^2 \epsilon I, \quad (3.24)$$

soit encore

$$-(jwI + A^T)(jwI - A) + C^T C - \gamma^2 I - \gamma^2 \epsilon I > 0. \quad (3.25)$$

Posons

$$G(jw) = \Delta(jw) - \gamma^2 I - \gamma^2 \epsilon I. \quad (3.26)$$

On remarque que le déterminant de $G(jw)$ est égale au déterminant de la matrice suivante:

$$\begin{bmatrix} -\gamma^2 I & (jwI - A) \\ (jwI + A^T) & \frac{-C^T C}{\gamma^2} + I + \epsilon I \end{bmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\det(G(jw)) = \det \left\{ \begin{bmatrix} -\gamma^2 I & (jwI - A) \\ (jwI + A^T) & \frac{-C^T C}{\gamma^2} + I + \epsilon I \end{bmatrix} \right\} = (-1)^n \det \left\{ \begin{bmatrix} (jwI - A) & -\gamma^2 I \\ -\frac{C^T C}{\gamma^2} + I + \epsilon I & (jwI + A^T) \end{bmatrix} \right\}.$$

Il suffit donc d'étudier le déterminant:

$$\det \left\{ jwI - \underbrace{\begin{bmatrix} A & \overbrace{\gamma^2 I}^R \\ \underbrace{\frac{C^T C}{\gamma^2} - I - \epsilon I}_Q & -A^T \end{bmatrix}}_H \right\}.$$

Pour montrer l'hyperbolicité de la matrice H , on calcule ces valeurs propres données par λ satisfait:

$$\det \left\{ \lambda I - \begin{bmatrix} A & \gamma^2 I \\ \frac{C^T C}{\gamma^2} - I - \epsilon I & -A^T \end{bmatrix} \right\} = 0.$$

$$\text{Ce qui est équivalent à } \det \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} (\lambda I - A) & -\gamma^2 I \\ -\frac{C^T C}{\gamma^2} + I + \epsilon I & \lambda I + A^T \end{bmatrix}}_{(\Omega_1)} \underbrace{\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \frac{1}{\gamma^2}(\lambda I - A) & I_n \end{bmatrix}}_{(\Omega_2)} \right\} = 0.$$

Il est clair que $\det(\Omega_2) = 1$, donc il suffit de calculer $\det(\Omega_1)$.

On sait qu'on peut ajouter à une colonne (ou à une ligne) un multiple d'une autre colonne (ou d'une autre ligne) sans changer la valeur du déterminant.

Dans notre cas on note u_1 la première colonne de (Ω_1) et u_2 sa deuxième colonne, donc si on remplace la première colonne par:

$$u_1 + u_2 \frac{1}{\gamma^2} (\lambda I - A)$$

la valeur de déterminant reste inchangé.

Par un simple calcul on obtient:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & -\gamma^2 I \\ I - \frac{C^T C}{\gamma^2} + \epsilon I + \frac{1}{\gamma^2} (\lambda I + A^T) (\lambda I - A) & \lambda I + A^T \end{bmatrix} = 0. \quad (3.27)$$

Transformant cette matrice en une matrice triangulaire supérieure, car le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est égale au produit des déterminants des blocs diagonaux. Par conséquent,

$$(-1)^n \det \begin{bmatrix} -\gamma^2 I & 0 \\ \lambda I + A^T & I - \frac{C^T C}{\gamma^2} + \epsilon I + \frac{1}{\gamma^2} (\lambda I + A^T)(\lambda I - A) \end{bmatrix} = 0,$$

$$\text{ou de façon équivalente } \det[\gamma^2 I + \gamma^2 \epsilon I - C^T C + (\lambda I + A^T)(\lambda I - A)] = 0.$$

Si H a une valeur propre sur l'axe imaginaire, alors $\lambda = jw$ et la matrice

$$\gamma^2 I + \gamma^2 \epsilon I - C^T C - (jwI - A)^*(jwI - A)$$

serait singulière. Ce qui contredit (3.24).

Donc la matrice H ne peut pas avoir des valeurs propres sur l'axe imaginaire, on déduit que H est hyperbolique.

Preuve de l'étape 2

Dans cette partie on va utiliser le résultat suivant basé sur la théorie H_∞ . Si la matrice

$$G = \begin{bmatrix} A & R \\ Q & -A^T \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

est hyperbolique, avec R est ni définie positive ni définie négative, et la paire (A, C) est stabilisable, alors il existe une solution symétrique P de l'équation algébrique de Riccati (ARE)

$$A^T P + PA + PRP - Q = 0. \quad (3.29)$$

De plus, si A est stable alors P est définie positive. La démonstration de ce résultat est donnée par Francis (1987) dans [1]. Dans notre cas, la matrice G n'est autre que H puisqu'on a vu dans la première partie que H est hyperbolique. Donc

$$R = \gamma^2 I \quad \text{et} \quad Q = -I + \frac{C^T C}{\gamma^2} - \epsilon I.$$

Par conséquent

$$\exists P = P^T \quad \text{tel que} \quad A^T P + PA + \gamma^2 PP + I - \frac{C^T C}{\gamma^2} + \epsilon I = 0 \quad (3.30)$$

$$\text{ou de façon équivalente} \quad A^T P + PA + \gamma^2 PP + I - \frac{C^T C}{\gamma^2} = -\epsilon I < 0$$

$$\text{i.e.} \quad A^T P + PA + \gamma^2 PP + I - \frac{C^T C}{\gamma^2} < 0. \quad (3.31)$$

Par comparaison avec l'inégalité de Lyapunov (3.7) en choisissant

$$L = \frac{P^{-1} C^T}{2\gamma^2}, \quad (3.32)$$

on obtient $C^T = 2\gamma^2 PL$ et en remplaçant dans (3.31) on aura:

$$A^T P + PA + \gamma^2 PP - I - PLC - C^T L^T P < 0$$

soit encore

$$(A - LC)^T P + P(A - LC) + \gamma^2 PP + I < 0.$$

En vertu de Théorème 3.1, on déduit que l'observateur est asymptotiquement stable.

Procédure de conception

Pour avoir la convergence asymptotique de l'observateur en procédons comme suit:

Étape 1:

Trouver la constante lipschitzienne γ de la fonction non linéaire dans la dynamique du système.

Étape 2:

Trouver la distance à l'inobservabilité $\delta(A,C)$ de la paire (A,C) .

Étape 3:

Si $\delta(A,C) > \gamma$, résoudre l'équation de Riccati (3.30) pour P , ensuite calculer le gain d'observateur L par la formule (3.32).

3.3 Version corrigée du résultat de Rajamani et Cho proposée par Aboky et al.

Dans la section 3.2.3, nous avons étudié l'approche de Rajamani et Cho portant sur la conception de l'observateur, pour une classe des systèmes non linéaires lipschitziens. Rappelons que pour la conception de l'observateur, ces auteurs ont proposé une méthode systématique basée sur l'approche de l'équation algébrique de Riccati, et la notion de la distance à l'inobservabilité introduite par Eising 1984. Pour ce faire, les auteurs ont considéré les identités

$$\delta(A,C) := \min_{\lambda \in \mathbb{C}} \sigma_{\min} \begin{pmatrix} \lambda I - A \\ C \end{pmatrix} := \min_{w \in \mathbb{R}} \sigma_{\min} \begin{pmatrix} jwI - A \\ C \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

caractérisant la distance à l'inobservabilité. Ils ont montré que si $\gamma < \delta(A,C)$, alors l'équation algébrique de Riccati (ARE)

$$A^T P + PA + PRP - Q = 0,$$

avec

$$R = \gamma^2 I \quad \text{et} \quad Q = -I + \frac{C^T C}{\gamma^2} - \epsilon I,$$

admet une solution P , si de plus, A est stable alors P est définie positive. Le gain de l'observateur est alors donné par

$$L = \frac{1}{2\gamma^2} P^{-1} C^T$$

Aboky et al. ont, par ailleurs, démontré que :

1. les minimums pris sur tout \mathbb{R} et \mathbb{C} dans (3.33) ne sont pas identiques, c'est-à-dire, qu'on a :

$$\min_{\lambda \in \mathbb{C}} \sigma_{\min} \begin{pmatrix} \lambda I - A \\ C \end{pmatrix} < \min_{w \in \mathbb{R}} \sigma_{\min} \begin{pmatrix} jwI - A \\ C \end{pmatrix}.$$

2. les conditions suffisantes données par Rajamani et Cho ne sont pas réellement suffisantes. Rappelons que les auteurs Rajamani et Cho ont montré que si l'hypothèse $\gamma < \delta(A,C)$ est satisfaite, l'équation (3.29) admet une solution, si de plus A est stable, alors la solution est définie positive.

Commençons par rappeler la caractérisation de la distance d'inobservabilité introduite par Eising (1984).

Théorème 3.4 (Eising (1984), [5]).

$$d((A,C),U) = \min_{\lambda \in \mathbb{C}} \sigma_{\min} \begin{pmatrix} \lambda I - A \\ C \end{pmatrix} := d_u(A,C)$$

il est clair que:

$$d((A,C),U) \leq \delta(A,C).$$

Aboky et al. ont introduit le contre exemple suivant, qui illustre le fait que l'inégalité précédente est stricte.

Contre exemple 1:

On considère la matrice 2×2 suivante:

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = (c,c).$$

La paire (A,C) est observable si et seulement si $b \neq 0$ et $c \neq 0$.

En effet, calculons le rang de la matrice d'observabilité (A,C) . Cela revient à calculer le déterminant de la matrice suivante:

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & c \\ c(a+b) & c(a-b) \end{pmatrix}$$

on sait que la paire (A,C) est observable si $\det(O) \neq 0$.

Dans notre cas on a

$$\det(O) = c^2(a-b) - c^2(a+b) = c^2(-2b).$$

Ce qui implique que $\det(O) \neq 0$ si et seulement si $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Par conséquent, la paire (A,C) est observable si et seulement si $(b,c) \neq (0,0)$.

Pour calculer la valeur de $d_u(A,C)$ et $\delta(A,C)$, on considère respectivement les valeurs singulières des matrices suivantes:

$$\begin{pmatrix} sI - A \\ C \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad s = \alpha + \beta i, \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} jwI - A \\ C \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad w \in \mathbb{R}.$$

1. Calcul de $d(A,C)^2$:

On pose

$$A_C(s) = \begin{pmatrix} sI - A \\ C \end{pmatrix}.$$

On calcul les valeurs singulière de $A_c(s)$ ce qui est équivalent à calculer les valeurs propres de $A_C^*(s)A_C(s)$.

On a

$$\begin{aligned} A_C^*(s)A_C(s) &= (sI - A)^*(sI - A) + C^T C \\ &= ((\alpha - \beta i)I - A^T)((\alpha + \beta i)I - A) + C^T C \\ &= (\alpha^2 + \beta^2)I - \underbrace{(\alpha - \beta i)A - (\alpha + \beta i)A^T}_{(\Omega)} + A^T A + C^T C \end{aligned}$$

avec

$$\Omega = \begin{pmatrix} (s + \bar{s})a & (s - \bar{s})b \\ (\bar{s} - s)b & (\bar{s} + s)a \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha a & 2\beta ib \\ -2\beta ib & 2\alpha a \end{bmatrix},$$

et

$$A^T A = (a^2 + b^2)I.$$

Donc

$$\begin{aligned} A_C^*(s)A_C(s) &= \underbrace{(\alpha^2 + \beta^2 + a^2 + b^2)}_M I + \begin{bmatrix} 2\alpha a & 2\beta ib \\ -2\beta ib & 2\alpha a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & c \end{bmatrix}. \\ &= \begin{bmatrix} 2\alpha a + M + c^2 & 2\beta ib + c^2 \\ -2\beta ib + c^2 & 2\alpha a + M + c^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique de $A_C^*(s)A_C(s)$ est donné par:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (2\alpha a + M + c^2 - \lambda)^2 - (-2\beta ib + c^2)(2\beta ib + c^2) \\ &= (2\alpha a + M + c^2 - \lambda)^2 - \sqrt{c^4 + 4b^2\beta^2}. \end{aligned}$$

Par un simple calcul on aura:

$$\sigma_{\min} = a^2 + b^2 + c^2 - 2\alpha a + \alpha^2 + \beta^2 - \sqrt{c^4 + 4b^2\beta^2}.$$

Puisque on a $\lim_{|s| \rightarrow \infty} \sigma_{\min}(s) = +\infty$, alors il existe un minimum global pour $\sigma_{\min}(s)$.

On pose

$$f(\alpha, \beta) = \sigma_{\min}(s) = a^2 + b^2 + c^2 - 2\alpha a + \alpha^2 + \beta^2 - \sqrt{c^4 + 4b^2\beta^2}$$

Pour chercher les points critiques de f on calcule ses dérivées partiales.

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) = -2a + 2\alpha, \quad \frac{\partial f}{\partial \beta}(\alpha, \beta) = 2\beta \left(1 - \frac{2b^2}{\sqrt{c^4 + 4b^2\beta^2}} \right).$$

Les dérivées d'ordre 2 sont données par

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}(\alpha, \beta) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2}(\alpha, \beta) = 2 \left(1 - \frac{2b^2}{\sqrt{c^4 + 4b^2\beta^2}} \right) + 2\beta \left(\frac{8b^2\beta}{(c^4 + 4b^2\beta^2)(\sqrt{c^4 + 4b^2\beta^2})} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta}(\alpha, \beta) = 0.$$

Les points critiques de f sont les solutions du système:

$$\begin{cases} -2a + 2\alpha = 0 & \Leftrightarrow \alpha = a \\ 2\beta \left(1 - \frac{2b^2}{\sqrt{c^4 + 4b^2\beta^2}} \right) = 0 & \Leftrightarrow \beta = 0 \quad \text{ou} \quad \beta = \sqrt{\frac{4b^4 - c^4}{4b^2}}. \end{cases}$$

Le système admet donc deux solutions qui sont:

$$a_1 = (a, 0), \quad a_2 = \left(a, \sqrt{\frac{4b^4 - c^4}{4b^2}} \right).$$

En a_1 , on a:

$$f(a_1) = b^2.$$

Les notations de Monge en a_1 sont données par les quantités suivante:

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}(a_1) = 2, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta}(a_1) = 0, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2}(a_1) = 2\left(1 - \frac{2b^2}{c^2}\right).$$

Pour que f admet un minimum il faut que $rt - s^2 \geq 0$ avec $r > 0$, dans notre cas on a

$$rt - s^2 = 4\left(1 - \frac{2b^2}{c^2}\right) \geq 0 \quad \text{donc} \quad c^2 \geq 2b^2.$$

En a_2 on a

$$f(a_2) = c^2\left(1 - \frac{1}{2} \frac{c^2}{2b^2}\right).$$

Les notations de Monge en a_2 sont donné comme suit:

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}(a_2) = 2, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta}(a_2) = 0, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2}(a_2) = \frac{4b^4 - c^4}{4b^4}.$$

f représente en a_2 un minimum si on a $rt - s^2 \geq 0$ dans ce cas on a

$$rt - s^2 = 2\left(\frac{4b^4 - c^4}{4b^4}\right) \geq 0 \quad \text{donc} \quad c^2 \leq 2b^2.$$

Par conséquent

$$d(A,C)^2 = \begin{cases} b^2 & \text{si } c^2 \geq 2b^2 \\ c^2\left(1 - \frac{1}{2} \frac{c^2}{2b^2}\right) & \text{si } 2b^2 \geq c^2. \end{cases}$$

2.Calcul de $\delta(A,C)^2$

Pour calculer les valeurs singulière de

$$\begin{pmatrix} jwI - A \\ C \end{pmatrix},$$

on suit les même étapes que précédemment et on obtient:

$$\sigma_{\min} \begin{pmatrix} jwI - A \\ C \end{pmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + w^2 - \sqrt{c^4 + 4b^2w^2}.$$

Posons

$$f(w) = a^2 + b^2 + c^2 + w^2 - \sqrt{c^4 + 4b^2w^2},$$

on remarque que f est une fonction d'une seule variable, pour avoir ces points critiques on calcule sa dérivée.

$$f'(w) = 2w\left(1 - \frac{2b^2}{\sqrt{c^4 + 4b^2w^2}}\right)$$

$f'(w) = 0$ implique que $w = 0$ ou bien $w = \sqrt{\frac{4b^4 - c^4}{4b^2}}$.

Pour $w = 0$ on a

$$f(w) = a^2 + b^2.$$

Pour que f représente un minimum en ce point, il faut que la deuxième dérivée en même point soit supérieure ou égale à 0.

$$f''(0) = 2\left(1 - \frac{2b^2}{c^2}\right) \geq 0 \quad \text{ce que signifie que } c^2 \geq 2b^2.$$

Pour $w = \sqrt{\frac{4b^4 - c^4}{4b^2}}$ on a

$$f(w) = a^2 + c^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{c^2}{2b^2} \right).$$

On calcule la deuxième dérivée en ce point et il faut qu'elle soit supérieure à 0 donc:

$$f''(w) = \frac{4b^4 - c^4}{4b^4} \geq 0 \quad \text{ce qui donne} \quad c^2 \leq 2b^2.$$

En résumé

$$\delta(A,C)^2 = \begin{cases} a^2 + b^2 & \text{si } c^2 \geq 2b^2 \\ a^2 + c^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{c^2}{2b^2} \right) & \text{si } 2b^2 \geq c^2. \end{cases}$$

Dans chacun des cas on a $\delta^2 - d^2 = a^2$ qui est une quantité positive si $a \neq 0$. On obtient la même conclusion si A est diagonale.

On vient de voir que la quantité $\delta(A,C)$ est supérieure strictement à la distance de l'inobservabilité $(d(A,C),U)$.

En fait $\delta(A,C)$ est exactement la distance à la plus proche paire non observable avec un mode purement imaginaire.

Dans ce qui suit, nous allons étudier le deuxième contre exemple de Aboky et al. d'une ARE donnée par

$$A^T P + PA + PRP + Q = 0, \tag{3.34}$$

qui satisfait les hypothèses de Rajamani et Cho, pour toute solution ni définie positive ni définie négative, ce qui montre que ces hypothèses ne sont pas suffisantes pour l'existence d'une solution définie positive de l'ARE (3.34).

Commençons par énoncer quelques résultats classique sur les AREs, utiles pour la compréhension de ce contre exemple. Les résultats qu'on peut trouver dans la littérature [15], [18] sont donnés dans cette partie. Comme on a déjà vu dans le cas de Rajamani et Cho, à toute ARE (3.34), on peut lui associer une matrice hamiltonienne donnée par

$$H = \begin{pmatrix} A & R \\ -Q & -A^T \end{pmatrix}. \tag{3.35}$$

Pour plus de détails, voir [15] et [1].

D'après [18] et [1] on a le résultat suivant. Si la matrice hamiltonienne H est hyperbolique, si la paire (A,C) est stabilisable et si R a un signe définie (i.e. semi définie positive ou semi définie négative), alors il existe une solution symétrique P de l'ARE (3.34).

Propriétés 3.1. *Les solutions de l'ARE, ont les propriétés suivantes*

1. *Il existe une solution symétrique P_1 telle que $(A + RP_1)$ est asymptotiquement stable,*
2. *Il existe une solution symétrique P_2 telle que $-(A + RP_2)$ est asymptotiquement stable,*
3. *Le spectre de H est exactement l'union de spectre de $(A + LP_1)$ et $(A + LP_2)$.*

Contrairement au cas de Rajamani et Cho, Aboky et al. ont abordé la notion d'ordre dans l'ensemble des matrices symétrique, définie par:

$$\text{Si on a } P_1 \leq P_2 \quad \text{on aura} \quad \langle P_1 x, x \rangle \leq \langle P_2 x, x \rangle,$$

donc $(P_2 - P_1)$ est semi définie positive.

Énonçons le résultat général suivant, sur l'ordre dans l'ensemble des solutions symétriques.

Théorème 3.5 (Aboky et al. [2]). *On considère l'équation de Riccati (3.34), avec R est semi définie positive, la matrice A est de Hurwitz, et la matrice hamiltonienne associée est hyperbolique, alors il existe une matrice symétrique P_1 (respectivement P_2) solution de l'ARE (3.34), telle que $A + RP_1$ est Hurwitz (respectivement $-(A + RP_2)$ est Hurwitz). P_2 est le plus grand élément (respectivement P_1 est le plus petit), parmi toutes les solutions de l'équation (3.34), pour l'ordre partiel des matrices symétriques.*

Preuve. l'existence de deux solutions P_1 et P_2 de (3.34) est garantie par le fait que la matrice hamiltonienne H est hyperbolique, et A est de Hurwitz (voir[1]).

Supposons que P et P_2 sont deux solutions symétriques de l'ARE (3.34), telle que $-(A + RP_2)$ est asymptotiquement stable, donc on obtient

$$A^T P + PA + PRP + Q = 0,$$

et

$$A^T P_2 + P_2 A + P_2 R P_2 + Q = 0.$$

On soustrait ses deux équations on obtient

$$A^T (P_2 - P) + (P_2 - P)A + P_2 R P_2 - PRP = 0,$$

qui peut être réécrite sous la forme suivante

$$(A + RP_2)^T (P_2 - P) - (P_2 - P)(A + RP_2) - (P_2 - P)R(P_2 - P) = 0. \quad (3.36)$$

Puisque on a $-(A + RP_2)$ est asymptotiquement stable et $(P_2 - P)R(P_2 - P) \geq 0$, alors l'équation de Lyapunov (3.36) admet une solution semi définie positive unique, on déduit que $(P_2 - P) \geq 0$, ce qui montre que P_2 est le plus grand élément, donc unique.

Après l'énoncé de ses résultats, on peut à présent étudier le contre exemple de Aboky et al. qui illustre le fait que les hypothèses données par Rajamani et Cho ne sont pas suffisante pour l'existence d'une solution définie positive de l'ARE (3.34).

Contre exemple 2:

On considère le système ayant les paramètres suivants

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad C = (c, c)$$

où $(a, b, c) \in \Omega$ avec:

$$\Omega = \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad a < 0, \quad c \neq 0, \quad |b| > |a|, \quad 2b^2 = c^2, \quad \text{et} \quad c^2 < \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4} \right\}$$

$$\Omega \neq \emptyset, \quad \text{car} \quad (-1, 2, 2) \in \Omega.$$

On choisit $\gamma > 0$ et ϵ tel que:

$$a^2 + c^2 + b^2 - \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4} < \gamma^2(1 + \epsilon) < a^2 + b^2.$$

On note P_2 la solution maximale de l'ARE (3.30), avec ce choix de a , b et c .

D'après le premier contre exemple, le réel δ est donné par

$$\delta = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Les valeurs propres de la matrice hamiltonienne sont notées par $\{\lambda, -\lambda, \bar{\lambda}, -\bar{\lambda}\}$, avec $Re(\lambda) > 0$.

Les résultats d'algèbre linéaire, nous donne les relations suivantes entre $\det(H)$, λ , a , b et c

$$\begin{cases} \det(H) = (a^2 + b^2 - \gamma^2(1 + \epsilon)) \times (a^2 + 5b^2 - \gamma^2(1 + \epsilon)) > 0 \\ tr(H^2) = 4(a^2 + b^2 - \gamma^2(1 + \epsilon)) > 0 \\ |\lambda|^4 = (\lambda \bar{\lambda})^2 \\ \quad = (a^2 + b^2 - \gamma^2(1 + \epsilon)) \times (a^2 + 5b^2 - \gamma^2(1 + \epsilon)) > 0 \\ (\lambda^2) + (\bar{\lambda})^2 = 2(a^2 + b^2 - \gamma^2(1 + \epsilon)). \end{cases} \quad (3.37)$$

Soit U la matrice orthogonale telle que:

$$U^T P_2 U = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}.$$

En introduisant la proposition suivante :

Proposition 3.1. *Pour $(a^2 + b^2) - \gamma^2(1 + \epsilon)$ suffisamment petit, P_2 est ni définie positive, ni définie négative.*

Preuve. Puisque $Re(\lambda) > 0$, et P_2 dénote la solution maximale de l'ARE, alors les valeurs propres de la matrice $A + LP_2$ sont λ et $\bar{\lambda}$, donc d'après les expressions de la trace et de déterminant de $U^T(A + RP)U$, on déduit de relations précédente que:

$$\begin{aligned} |\lambda|^2 &= (a + \gamma^2 p_1)(a + \gamma^2 p_2) + b^2, \\ \text{et } \lambda + \bar{\lambda} &= 2a + \gamma^2(p_1 + p_2), \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\gamma^4 p_1 p_2 = |\lambda|^2 - a(\lambda + \bar{\lambda}) + a^2 - b^2.$$

Donc $\det(P_2) < 0$ si et seulement si

$$\begin{aligned} |\lambda|^2 - a(\lambda + \bar{\lambda}) + a^2 - b^2 &< 0 \\ \text{i.e. } |\lambda|^2 + (a^2 - b^2) &< a(\lambda + \bar{\lambda}). \end{aligned}$$

Comme le membre droit de l'inégalité précédente est négative, donc on peut la réécrire comme suit

$$(|\lambda|^2 + (a^2 - b^2))^2 > a^2(\lambda + \bar{\lambda})^2.$$

En utilisant (3.37), on obtient:

$$|\lambda|^4 - 2b^2|\lambda|^2 + (a^2 - b^2)^2 - 2a^2(a^2 + b^2 - \gamma^2(1 + \epsilon)) > 0. \quad (3.38)$$

Donc

$$\det(P) < 0,$$

si et seulement si l'inégalité (3.38) est satisfaite.

Si $\gamma^2(1 + \epsilon) = a^2 + b^2$, on aura $|\lambda|^2 = 0$, alors l'inégalité (3.38) est réduite à $(a^2 + b^2)^2 > 0$. Par la continuité des arguments, en choisissant ϵ tel que la quantité $(a^2 + b^2) - \gamma^2(1 + \epsilon)$ est suffisamment petite, donc on conclut que la relation (3.38) est satisfaite, par conséquent $\det(P) < 0$, ce qui achève la démonstration.

3.3.1 Caractérisation de la distance à la plus proche paire inobservable avec un mode purement imaginaire

Dans cette partie, on introduit le théorème de Aboky et al. qui établit la relation entre δ et les valeurs propres imaginaires de la matrice hamiltonienne.

Théorème 3.6 (Aboky et al.[2]). Soit $\gamma \geq 0$, on définit H_γ par:

$$H_\gamma = \begin{bmatrix} A & I \\ C^T C - \gamma^2 I & -A^T \end{bmatrix},$$

alors $\gamma < \delta(A, C)$ si et seulement si H_γ n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire (i.e. H_γ est hyperbolique).

Preuve. Condition suffisante :

Montrons que la condition $\gamma < \delta$ est suffisante pour l'hyperbolicité de la matrice H_γ , pour cela on revient à la définition de $\delta(A, C)$

$$\delta(A, C) = \min_{w \in \mathbb{R}} \sigma_{\min} \begin{pmatrix} jwI - A \\ C \end{pmatrix} = \gamma_{\min} > \gamma.$$

On exploite le fait que les valeurs singulières sont continues en w , comme il a été déjà mentionné dans le cas de Rajamani et Cho, par conséquent on obtient:

$$(jwI - A)^*(jwI - A) + C^T C \geq \gamma_{\min}^2 I > \gamma^2 I,$$

ce qui est équivalent à

$$(jwI - A)^*(jwI - A) + C^T C - \gamma^2 I > 0. \quad (3.39)$$

On définit la fonction $\Phi(\lambda)$ comme suit :

$$\Phi(\lambda) = \det \left\{ \begin{bmatrix} \lambda I - A & -I \\ -C^T C + \gamma^2 I & \lambda I + A^T \end{bmatrix} \right\},$$

ou de façons équivalente:

$$\Phi(\lambda) = (-1)^n \det \left\{ \begin{bmatrix} -I & \lambda I - A \\ \lambda I + A^T & -C^T C + \gamma^2 I \end{bmatrix} \right\}.$$

L'utilisation du complément de Schur permet d'avoir

$$\Phi(\lambda) = \det \left(C^T C - \gamma^2 I - (\lambda I + A^T)(\lambda I - A) \right).$$

Cela montre que λ est une valeur propre de H_γ si et seulement si la matrice

$$\tilde{G}(\lambda) = C^T C - \gamma^2 I - (\lambda I + A^T)(\lambda I - A)$$

est singulière.

Supposons que H_γ a une valeur propre sur l'axe imaginaire, donc $\lambda = jw$, ce qui donne

$$\det \left(\tilde{G}(jw) \right) = \det \left(C^T C - \gamma^2 I - (jwI + A^T)(jwI - A) \right) = 0,$$

cela montre que

$$C^T C - \gamma^2 I - (jwI + A^T)(jwI - A)$$

est singulière. Ce qui contredit (3.39). Par conséquent, H_γ est hyperbolique.

Condition nécessaire :

Montrons que si $\delta \leq \gamma$, la matrice H_γ a une valeur propre sur l'axe imaginaire.

En effet, d'après le théorème 3.3, on a la relation suivante:

$$\sigma_{\min}(\Delta(jw)) = w^2 \sigma_{\min} \left[1 + \frac{j}{w} (A - A^T) + \frac{1}{w^2} (A^T A + C^T C) \right].$$

Ce qui implique que

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \left[\sigma_{\min}(\Delta(jw)) \right] = \infty$$

Puisque $\sigma_{\min}(\Delta(jw))$ est une fonction continue en w , alors il existe un minimum globale sur \mathbb{R} , qui prend par définition la valeur δ^2 , et le minimum est atteint pour w_0 . Par conséquent si $\delta \leq \gamma$, le théorème des valeurs intermédiaires affirme qu'il existe un w_1 tel que

$$\sigma_{\min}(\Delta(jw_1)) = \gamma^2,$$

donc $\tilde{G}(jw_1) = \Delta(jw_1) - \gamma^2$ est singulière, cela montre que jw_1 est une valeur propre de H_γ , ce qui achève la preuve du théorème.

Remarque 3.1. D'après le théorème 3.6, $\delta(A, C)$ est caractérisé par:

$$\delta = \sup\{\gamma \mid H_\gamma \text{ est hyperbolique}\}.$$

3.3.2 Condition suffisante pour l'existence d'une solution symétrique définie positive de l'ARE

La condition essentielle pour la convergence de l'observateur est l'existence d'une solution symétrique définie positive de l'ARE (3.29).

Pour montrer la positivité de la solution on a besoin du lemme suivant.

Lemme 3.1. *On considère l'ARE*

$$A^T P + PA + PRP + Q = 0,$$

avec R est semi définie positive, Q est symétrique, A est stable, et la matrice hamiltonienne

$$H = \begin{pmatrix} A & R \\ -Q & A^T \end{pmatrix} \text{ est hyperbolique,}$$

alors il existe une matrice Q_1 symétrique définie positive, telle que

$$Q_1 \geq Q,$$

et

$$H_1 = \begin{pmatrix} A & R \\ -Q_1 & -A^T \end{pmatrix} \text{ est hyperbolique,}$$

alors l'unique solution stabilisable P (i.e. $-(A + RP)$ est Hurwitz) de l'ARE est définie positive.

Preuve. D'après les hypothèses du lemme (3.1), il existe P une solution symétrique de l'ARE, avec $-(A + RP)$ est stable, suivant les mêmes hypothèses, soit P_1 une solution symétrique de l'ARE avec Q_1 remplace Q . Par un simple calcul on obtient:

$$(P - P_1)(A + RP) + (A + RP)^T(P - P_1) - (P - P_1)R(P - P_1) + Q - Q_1 = 0,$$

cette relation peut être réécrite sous forme d'une équation de Lyapunov pour $-(A + RP)$

$$(P - P_1)[-(A + RP)] + [-(A + RP)]^T(P - P_1) = -(P - P_1)R(P - P_1) + (Q - Q_1) = 0$$

Le coté droit de l'équation précédente est symétrique semi définie négative, donc $P - P_1 \geq 0$.

Puisque P_1 est une solution de l'équation de Lyapunov

$$P_1A + A^T P_1 = -P_1 R P_1 - Q_1,$$

A est stable, et $-P_1 R P_1 - Q_1$ symétrique définie négative, on conclut que $P_1 > 0$, cela montre que $P > 0$, ce qui achève la preuve du lemme.

3.3.3 Résultat principal de Aboky et al.

Dans cette partie nous allons aborder le problème de conception d'observateur pour le cas des systèmes considérés dans l'introduction.

Théorème 3.7 (Aboky et al. [2]). *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \phi(x, u) \\ y = Cx \end{cases}$$

avec A est stable, et la non-linéarité ϕ satisfait la propriété de Lipschitz par rapport à x . Si

$$\gamma < \delta(A, C),$$

et

$$\gamma < \delta\left(A, \frac{\gamma}{\|C\|_2} C\right),$$

alors il existe une matrice de gain L tel que l'observateur

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \phi(\hat{x}, u) - L(C\hat{x} - y),$$

converge exponentiellement vers l'état du système.

Preuve. La preuve de ce théorème est décomposée en deux parties. Dans la première partie on montre que, sous les hypothèses du théorème, il existe une solution définie positive P de l'équation de Riccati suivante

$$A^T P + PA + PP + (\gamma^2 + \epsilon)I - C^T C = 0, \quad (3.40)$$

où ϵ un petit réel positif. Dans la deuxième partie, en utilisant P , on montre qu'il existe un gain L qui assure la convergence exponentielle de l'observateur.

Preuve de la partie 1: En vertu de théorème 3.6, on a $Q = -C^T C + \gamma^2 I$, qui est une matrice symétrique

dont son signe est inconnue. D'après les résultats de Aboky et al. [2], si R et Q n'ont pas un signe définie, il n'existe pas de résultats sur la positivité de la solution de l'ARE (3.29), sinon certains résultats existe [4] et [18].

L'équation algébrique de Riccati (ARE) (3.29), peut être réécrite sous forme d'une équation de Lyapunov comme suit :

$$A^T P + P A = - \underbrace{(PRP + Q)}_{\tilde{Q}}. \quad (3.41)$$

On sait que l'équation de Lyapunov admet une solution définie positive unique si et seulement si A est stable, et \tilde{Q} symétrique définie positive. Selon les hypothèses du théorème, on a A est stable et R définie positive, par conséquent, pour que l'équation (3.41) admet une solution définie positive, il suffit que Q soit définie positive. Ce que signifie que

$$\begin{aligned} -C^T C + \gamma^2 I > 0 \quad \text{ou de façon équivalente} \quad \gamma^2 I > C^T C \\ \text{soit encore} \quad \gamma > \|C\|_2, \quad \text{donc} \quad \frac{\gamma}{\|C\|_2} > 1. \end{aligned}$$

Par suite, Q est définie positive si et seulement si $\frac{\gamma}{\|C\|_2} > 1$.

En exploitant la continuité de la fonction $s \mapsto \delta(A, sC)$, on peut trouver un $\alpha > 0$ tel que on peut choisir

$$\sqrt{\alpha} < \frac{\gamma}{\|C\|_2},$$

satisfait

$$\gamma < \delta(A, \sqrt{\alpha}C). \quad (3.42)$$

La matrice Q est définie par :

$$Q = (\gamma^2 + \epsilon)I - C^T C.$$

Pour avoir l'expression de la matrice Q_1 , en exploitant le fait que

$$\sqrt{\alpha} < \frac{\gamma}{\|C\|_2}, \quad \text{donc} \quad \alpha C^T C < \gamma^2 I \quad \text{soit encore} \quad \alpha C^T C < \gamma^2 I + \epsilon I,$$

donc la matrice Q_1 est donnée par

$$Q_1 = (\gamma^2 + \epsilon)I - \alpha C^T C > 0,$$

qui est une matrice symétrique définie positive.

On suppose que

$$\gamma \leq \|C\|_2. \quad (3.43)$$

Dans le cas contraire, la matrice Q est définie positive et on peut choisir $Q_1 = Q$, ainsi la preuve va se terminer par le lemme 3.1.

L'hypothèse (3.43) implique que $\alpha < 1$, dans ce cas, puisque $\sqrt{\alpha} < \frac{\gamma}{\|C\|_2}$ on a $Q_1 > 0$.

On a

$$Q_1 - Q = C^T C(1 - \alpha),$$

comme on est dans le cas $\alpha < 1$ l'inégalité $Q_1 \geq Q$ est satisfaite.

La relation (3.42) implique grâce au théorème 2 que

$$\begin{bmatrix} A & I \\ \alpha C^T C - (\gamma^2 + \epsilon)I & -A^T \end{bmatrix}$$

est hyperbolique, pour ϵ suffisamment petit tel que $(\gamma^2 + \epsilon) < \delta(A, \sqrt{\alpha}C)^2$.

Toutes les hypothèses du lemme 3.1 sont satisfaites, par conséquent l'équation de Riccati (3.40) admet une solution P définie positive.

Preuve de la partie 2:

Dans cette partie, on suit les mêmes étapes que celles de Rajamani et Cho, pour obtenir la convergence de l'observateur.

On définit

$$L = \frac{1}{2}P^{-1}C^T,$$

En injectant cette dernière quantité dans (3.40), on obtient

$$A^T P + PA + PP + (\gamma^2 + \epsilon)I - PLC - C^T L^T P = 0, \quad (3.44)$$

ou de façon équivalente à

$$(A - LC)^T P + P(A - LC) + PP + \gamma^2 I = -\epsilon I. \quad (3.45)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation $e = \hat{x} - x$ est donnée par l'équation :

$$\dot{e} = (A - LC)e + \phi(\hat{x}, u) - \phi(x, u). \quad (3.46)$$

Considérons la fonction candidate de Lyapunov

$$V(e) = \langle Pe, e \rangle = e^T P e,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dénote le produit scalaire. On calcule la dérivée de V le long des trajectoires de e on aura :

$$\dot{V}(e) = \langle (A - LC)^T P + P(A - LC) e, e \rangle + 2 \langle Pe, \phi(\hat{x}, u) - \phi(x, u) \rangle.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy, et la condition de Lipschitz, on obtient

$$2 \langle Pe, \phi(\hat{x}, u) - \phi(x, u) \rangle \leq 2\gamma \|Pe\|_2 \|e\|_2 \leq \|Pe\|_2^2 + \gamma^2 \|e\|_2^2.$$

D'après (3.45), on déduit que

$$\dot{V}(e) \leq \langle ((A - LC)^T + P(A - LC) + PP + \gamma^2 I)e, e \rangle \leq -\epsilon \|e\|_2^2.$$

Cela montre que l'équation différentielle (3.46) de l'erreur dynamique est asymptotiquement stable, et la convergence est exponentielle. Pour estimer numériquement la convergence de l'observateur, on utilise le principe de Rayleigh pour la fonction de Lyapunov V .

Rappelons le principe de Rayleigh: si P est une matrice symétrique définie positive (ou plus généralement une matrice hermitienne), alors toutes ses valeurs propres sont réelles, de plus,

$$\sigma_{\min}(P) \|e\|_2^2 \leq \langle Pe, e \rangle \leq \sigma_{\max}(P) \|e\|_2^2. \quad (3.47)$$

Par conséquent,

$$\dot{V}(e) \leq -\epsilon \|e\|_2^2 \leq \frac{-\epsilon}{\sigma_{\max}(P)} V(e).$$

L'utilisation du lemme de Grounwall (forme différentielle) permet d'avoir

$$V(e) \leq V(e_0) \exp\left(\int_{e_0}^e -\frac{\epsilon}{\sigma_{\max}(P)} dt\right) \leq V(e_0) \exp\left(-\frac{\epsilon}{\sigma_{\max}(P)} t\right).$$

D'après (3.47), on a

$$V(e_0) \exp\left(-\frac{\epsilon}{\sigma_{\max}(P)} t\right) \geq V(e) \geq \sigma_{\min}(P) \|e\|_2^2,$$

ou de façon équivalente

$$\|e\|_2^2 \leq \frac{1}{\sigma_{\min}(P)} V(e_0) \exp\left(-\frac{\epsilon}{\sigma_{\max}(P)} t\right) \leq \frac{\sigma_{\max}(P)}{\sigma_{\min}(P)} \|e_0\|_2^2 \exp\left(-\frac{\epsilon}{\sigma_{\max}(P)} t\right),$$

ce qui montre que la convergence est exponentielle.

3.3.4 Application au robot à joint flexible

La représentation mathématique du robot d'un seule joint flexible est modélisée par la position angulaire et la vitesse angulaire du moteur et de membrane, ce robot est représenté par la figure suivante

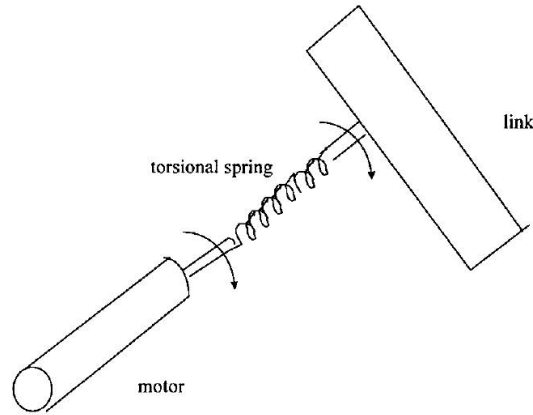


FIG. 3.1 – Robot a un seul joint flexible

L'état du système est donné par les équations suivante:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_m = w_m \\ \dot{w}_m = \frac{k}{J_m}(\theta_1 - \theta_m) - \frac{B}{J_m}w_m + \frac{K_\tau}{J_m}u \\ \dot{\theta}_1 = w_1 \\ \dot{w}_1 = \frac{k}{J_1}(\theta_1 - \theta_m) - \frac{mgh}{J_1} \sin(\theta_1) \end{cases}$$

avec θ_1 et w_1 représentent la position et la vitesse angulaire de la membrane respectivement.

θ_m et w_m représentent la position et la vitesse angulaire du moteur respectivement.

En prenant en considération les paramètres donnés dans [13], le système non linéaire prend la forme suivante (voir [13]):

$$\dot{x} = Ax + \phi(x) + bu, \quad (3.48)$$

est donné comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -48.6 & -1.25 & 48.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 19.5 & 0 & -19.5 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 21.6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3.33 \sin(x_3) \end{pmatrix}.$$

La sortie mesurée de ce système est donnée par la matrice suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous avons simulé ce système sous simulink en utilisant une perturbation sur la sortie y du système. Donc au lieu de prendre $y = Cx$, nous avons injecté un bruit blanc dans y , i.e. $y(t) = (1 + 0.2\mathcal{N}(t))C$. La convergence de l'observateur est illustrée à travers les figures ci-après et ce dans les deux cas (avec ou sans bruit). Ce qui montre la robustesse de l'observateur. Ces résultats de simulation montrent aussi que l'approche de Rajamani et Cho est efficace sur l'exemple réel du robot à joint flexible.

Résultat de simulation avec bruit sur la sortie

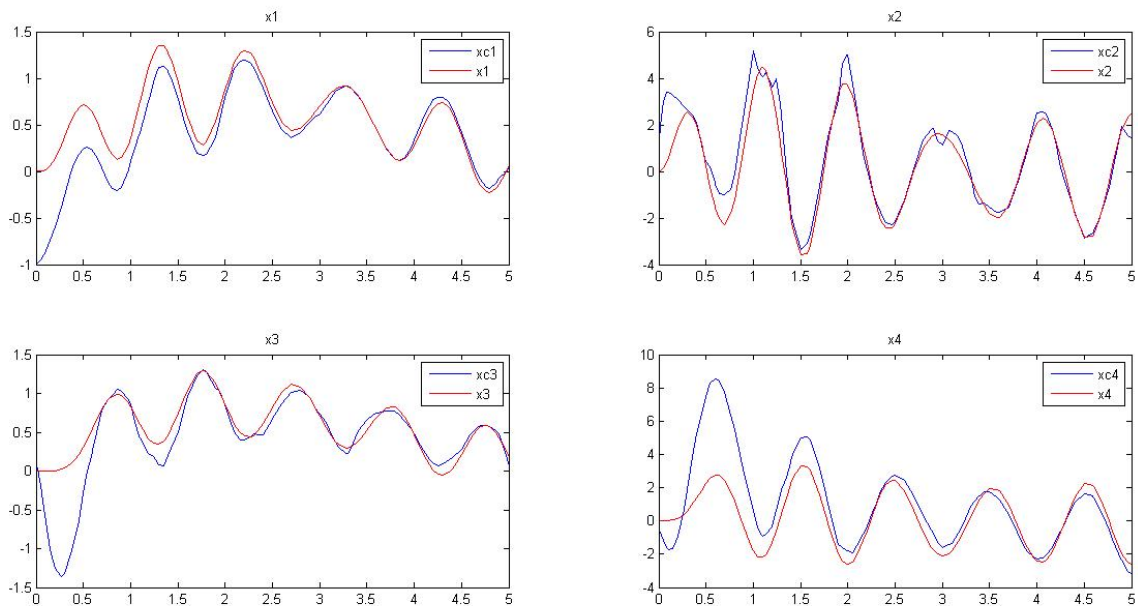


FIG. 3.2 – La simulation des états et leur estimations: cas avec bruit sur la sortie

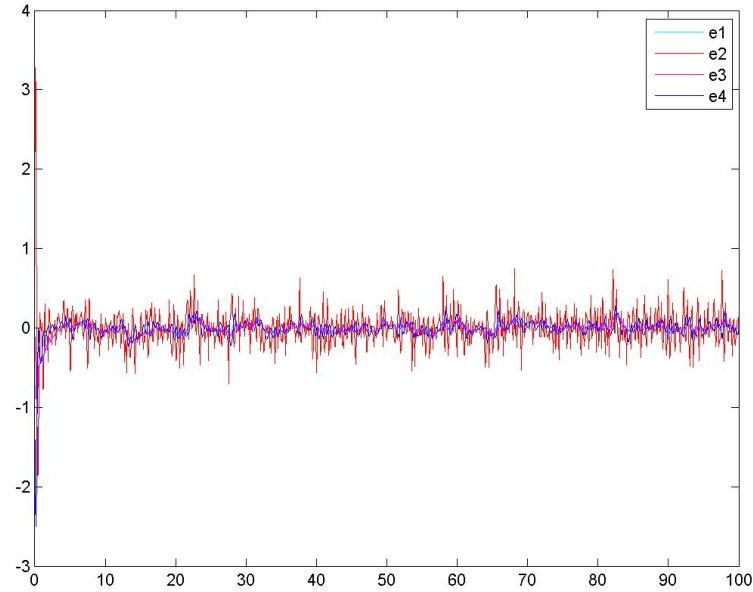


FIG. 3.3 – La simulation de l'erreur d'estimation: cas avec bruit sur la sortie

Résultat de simulation sans bruit sur la sortie

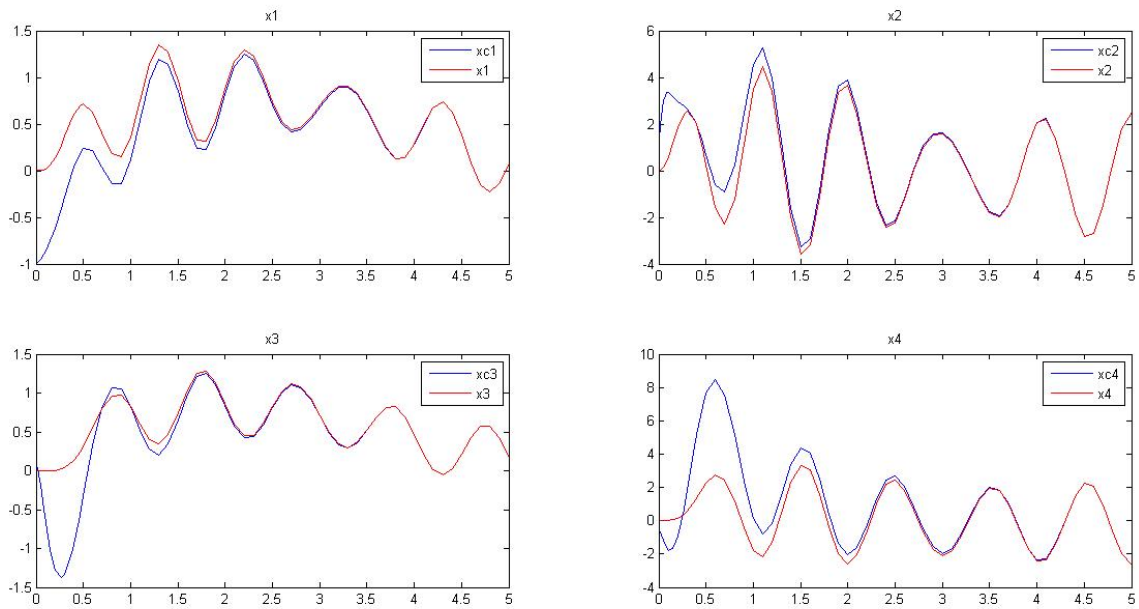


FIG. 3.4 – La simulation des états et leur estimations: cas sans bruit

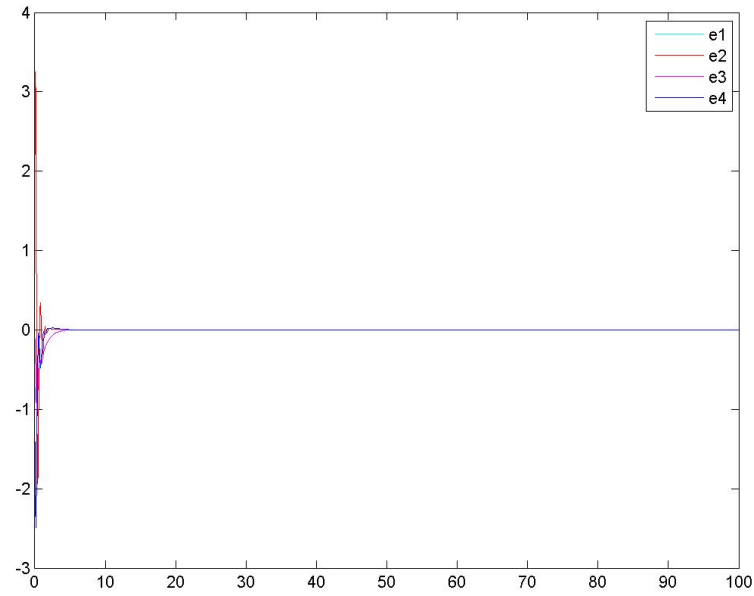


FIG. 3.5 – *La simulation de l'erreur d'estimation: cas sans bruit*

Conclusion

Dans ce mémoire nous nous sommes intéressés à l'étude d'une approche pour la conception d'observateur pour une classe de systèmes non linéaires lipschitziens, proposée par Rajamani et Cho dans [13], complétée et corrigée par Aboky et al. dans [2]. L'observateur proposé est de type Luenberger.

Cette approche, très répandue dans la littérature, est basée sur la relation entre l'équation algébrique de Riccati et la notion de distance à l'inobservabilité introduite par Eising 1984 [5].

Nous avons vu que les étapes permettant de trouver la gain, L , qui assure la convergence exponentielle de l'observateur sont:

1. Écrire l'inégalité de Lyapunov assurant la stabilité de l'erreur d'estimation. Celle-ci est une inégalité de Riccati par rapport à la matrice de Lyapunov $P = P^T > 0$ pour L fixé.
2. Construire une l'ARE dépendante uniquement de P . L'existence de solution pour cette dernière dépend d'hyperbolicité de la matrice hamiltonienne associée, H .
3. Dans ce sens, un résultat intéressant de Aboky et al. montre que H est hyperbolique si et seulement si $\delta > \gamma$.
4. Une fois P trouvé, le gain L est choisi comme suit : $L = \frac{1}{2\gamma^2} P^{-1} C^T$.

Les conditions suffisantes assurant la convergence de l'observateur sont donc étroitement liées aux solutions de l'ARE, et la principale difficulté de cette approche réside dans la construction de l'ARE.

Il est clair que notre étude est loin d'être complète. Nous espérons néanmoins avoir acquis certaines connaissances essentielles, lesquelles conjuguées avec beaucoup de persévérances nous permettrons d'aborder d'autres questions. En particulier, nous souhaitons construire une ARE dont le problème d'existence de solution serait exprimé en fonction de la vraie distance d'inobservabilité.

Annexe

3.4 Programmation sous Matlab

3.4.1 Solution de l'équation de Riccati sous Matlab

L'unique inconnue de l'équation algébrique de Riccati (ARE) est P alors il est facile de résoudre une ARE que de résoudre une inégalité linéaire matricielle LMI.

On considère l'ARE suivante

$$A^T P + PA + P\gamma^2 P + I - \frac{C^T C}{\gamma^2} + \epsilon I = 0, \quad (3.49)$$

Pour ϵ et γ donnés, l'ARE (3.49) peut être facilement résolue en utilisant la commande "ARE" sur Matlab,

$$X = ARE(a,b,c).$$

Comme on peut aussi utiliser la commande "care" (continuous algebraic Riccati equation en anglais). Ces commande nous donne la solution (si elle existe) de l'équation de Riccati à temps continue.

$$a^T X + Xa - XbX + c = 0, \quad (3.50)$$

avec b symétrique et n'est pas définie négative, et c symétrique.

En écrivant (3.49) sous forme de (3.50) on aura:

$$\underbrace{(-A^T)}_a p + p \underbrace{(-A)}_a - p \underbrace{(\gamma^2 I)}_b P + \underbrace{\left(\frac{C^T C}{\gamma^2} - I - \epsilon I\right)}_c = 0. \quad (3.51)$$

Cette équation peut être résolue sous le logiciel Matlab en utilisant la commande "ARE".

Programme résolution de l'équation ARE

```
\%***** Programmation de l'ARE ***** \\  
  
\%***** Déclaration des constantes *****\  
A=[0,1,0,0;-48.6,-1.25,48.6,0;0,0,0,1;19.5,0,19.5,0];  
I=eye(4);
```

```

C=[1,0,0,0;0,1,0,0];
eps=0.80;
gamma= 3.33;
\%***** Calcul de la solution de l'ARE *****\\
a = -A;
b=gamma^2*I;
c=C'*C/gamma^2+I+eps*I;
P=ARE(a,b,c)
\%***** calcul de gain L *****\\
L= inv(P)*C'/(2*gamma^2)
disp('Les valeurs propres de P sont :');
VP_{(P)}=eig(P)

```

Résultat d'exécution

P =

1.1543	0.2286	-0.8102	0.2088
0.2286	0.1389	-0.2643	0.0536
-0.8102	-0.2643	1.1689	-0.4698
0.2088	0.0536	-0.4698	0.8617

L =

0.0813	-0.0393
-0.0393	0.6200
0.0519	0.1296
0.0110	0.0417

Les valeurs propres de P sont :

VP_P =

2.2112
0.7600
0.2841
0.0686

3.4.2 Programmation de la LMI

```

*****
%           Programmation d'une LMI           *
*****
% *****1.Déclaration des constantes*****
A=[0      1      0      0;
   -48.6 -1.25  48.6  0;
     0      0      0      1;
    19.5  0 -19.5  0];
I=eye(4);
C= [1      0      0      0
     0      1      0      0];
n=size(A,2);
p=size(C,1);
eps=0.80;
gamma= 0.33;
%***** 2.Déclaration des variables*****
P=sdpvar(n);
L1=sdpvar(n,p);
%*****3.Déclaration des contraintes*****
F=set(zeros(n)<P);           % Contrainte de positivité de P
%***** 4.Déclaration de la structure de la LMI***
Q1= A'*P+ P*A -C'*L1'-L1*C+I;
Q2=P;
Q3=P;
Q4=(-1/gamma^2)*I;
%***** 5.% Contrainte de négativité de la LMI***
F=F+set([Q1 Q2;Q3 Q4]<0);

%***** 6.Résolution de la LMI*****
solvesdp(F);

%/***** 7.Ré récupération des variables*****
P=double(P)
L1=double(L1);
Q1=double(Q1);
Q2=double(Q2);
Q3=double(Q3);
Q4=double(Q4);
LMI=[Q1 Q2;Q3 Q4];

```

```
%***** Calcul de L*****
```

```
L=inv(P)*L1
```

```
%***** Vérification signe des valeurs propres *****
```

```
%display('Les valeurs propres de la LMI sont :');
```

```
%VP_LMI=eig(LMI)
```

```
disp('Les valeurs propres de P sont :');
```

```
VP_P=eig(P)
```

Résultat d'exécution

Solver for LMI feasibility problems $L(x) < R(x)$

This solver minimizes t subject to $L(x) < R(x) + t*I$

The best value of t should be negative for feasibility

Iteration : Best value of t so far

```
* switching to QR
```

```
1 -0.692241
```

Result: best value of t : -0.692241

f-radius saturation: 0.000% of $R = 1.00e+009$

P =

3.1978	-0.0000	0.0000	0.0000
-0.0000	3.1978	-0.8741	0.9193
0.0000	-0.8741	3.2357	-1.9083
0.0000	0.9193	-1.9083	2.4601

L =

1.6564	56.4019
-110.9929	5.1487
-5.7217	78.5213
38.3778	58.1616

Les valeurs propres de P sont :

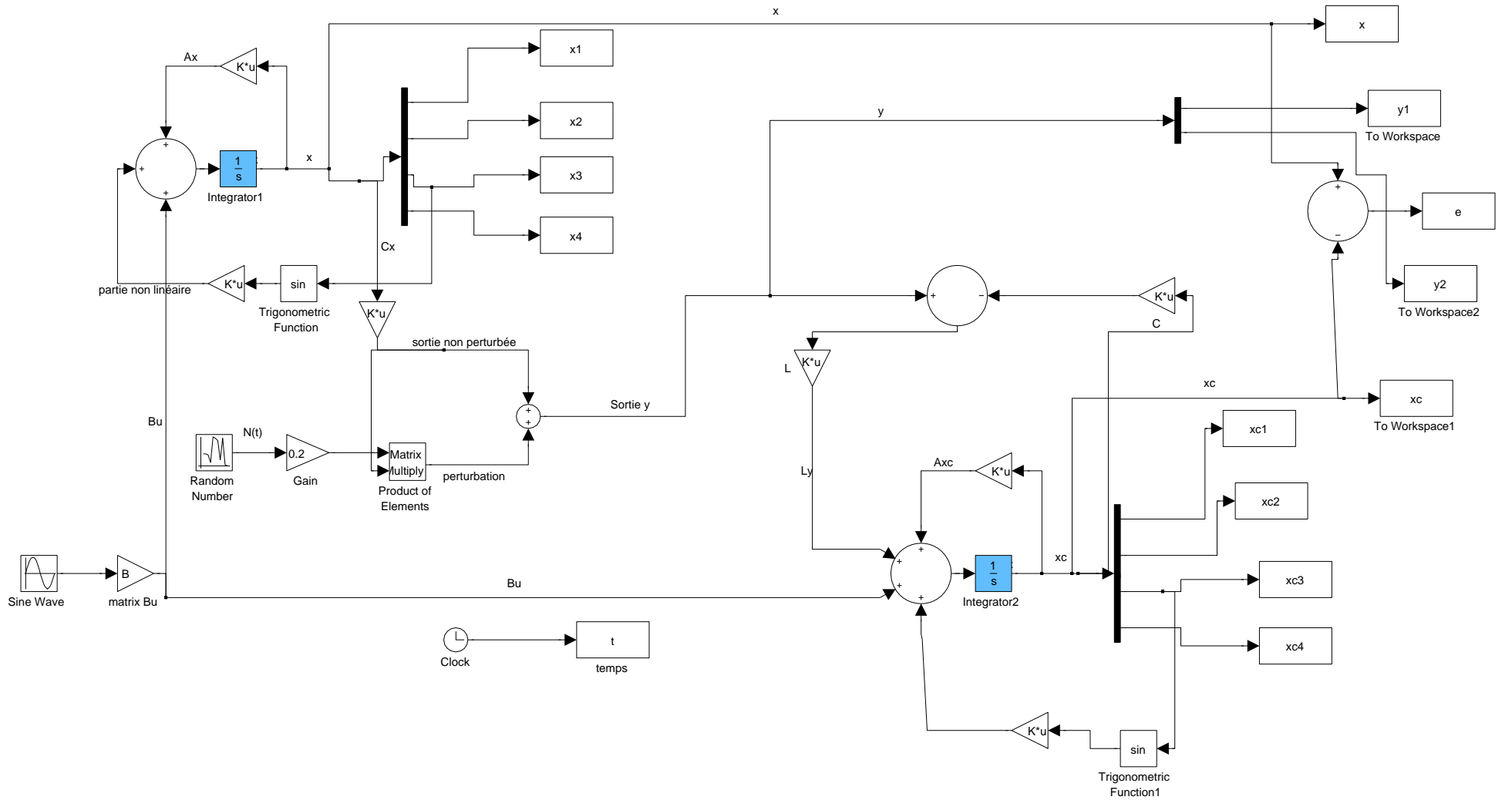
VP_P =

0.8874
2.5179
3.1978
5.4884

3.4.3 Programme simulink de l'exemple du robot: approche de Rajamani & Cho

```
%*****Programme simulink utilise L'exemple du robot de Rjamani.*****  
clear all;  
close all;  
% %***** declaration des constantes *****  
A=[0 1 0 0;  
-48.6 -1.25 48.6 0;  
0 0 0 1;  
19.5 0 -19.5 0];  
  
B=[0;  
21.6;  
0;  
0];  
  
C=[1 0 0 0;  
0 1 0 0];  
  
Pi=-0.333; %coefficient de la non linearité  
  
%La matrice de gain de Rajamani et al  
  
L=[0.8307 0.4514;  
0.4514 6.2310;  
0.8238 1.3072;  
0.0706 0.2574];  
  
% Le point initial  
x0=[0;0;0;0];  
xc0=[-1;1;0.1;-0.5];
```

```
%fichier simulink :
sim('Ex3_Papier_Rajamani_Robot_bis')
%*****Les figures associées à la simulation des états du système
    %et leur estimations*****
figure(1)
subplot(221)
plot(t,xc1)
hold on
plot(t,x1,'r')
legend('xc1','x1');
title('x1');
subplot(222)
plot(t,xc2);
hold on
plot(t,x2,'r')
legend('xc2','x2');
title('x2');
subplot(223)
plot(t,xc3)
hold on
plot(t,x3,'r')
legend('xc3','x3');
title('x3');
subplot(224)
plot(t,xc4)
hold on
plot(t,x4,'r')
legend('xc4','x4');
title('x4');
%*****Les figures associées à la simulation d'erreur d'estimation*****
figure(5)
plot(t,xc1-x1,'c')
hold on
plot(t,xc2-x2,'r')
hold on
plot(t,xc3-x3,'m')
hold on
plot(t,xc4-x4,'b')
legend('e1','e2','e3','e4');
```



3.4.4 Résultat de Aboky et al. sur le calcul de $\delta(A,C)$, et la procédure de calcul du gain de l'observateur

La procédure de Aboky et al. pour le calcul du gain de l'observateur est donnée comme suit: **Étape 1** : Faire un retour d'état, par le placement de poles, pour obtenir $(A - L_1C)$ est stable.

Étape 2 : Utiliser la transformation de coordonnées par une matrice diagonale pour minimiser la constante de Lipschitz, et maximiser la distance à l'inobservabilité.

Étape 3 : Vérifier si les conditions du théorème 3.7 sont satisfaites. En utilisant le placement de poles de sorte à avoir la matrice $A - L_1C$ stable. On choisit pour A_1 les poles suivant:

$$[-0.4452 + 8.2208i, -0.4452 - 8.2208i, -0.3596 - 0.4000i, -0.3596 + 0.4000i]';$$

Programme sous Matlab

```
***** Programmation du l'exemple du robot de Aboky et al.*****
***** Déclaration des constantes *****

A=[0    1    0    0;
  -48.6 -1.25 48.6 0;
    0    0    0    1;
   19.5  0  -19.5  0];
%
% B=[0;
% 21.6;
% 0;
% 0];
% eig(A);
C= [1    0    0    0
    0    1    0    0];
I=eye(4);
n=size(A,2);
p=size(C,1);
%
***** Le calcul du gain L1 par Placement de poles *****
p1 = -0.4452+ 8.2208i;
p2 = -0.4452-8.2208i;
p3 = -0.3596-0.4000i;
p4 = -0.3596+0.4000i;
L1= place(A',C', [p1,p2,p3,p4])'
***** Le calcul du A1*****
A1= (A- L1*C)
```

***** Calcul du $\delta(A1,C)$ par la méthode de bisection *****

```

a=0;
b=norm(A1,2);
N=13;
eps=0.80;
bis_a_i=zeros(1,N);
bis_b_i=zeros(1,N);
bis_gamma_i=zeros(1,N);
a_i=a;
b_i=b;
for i=1:N
gamma_i=(a_i+b_i)/2;
H_gamma=[A1 gamma_i^2*I; -I+C'*C/gamma_i^2-eps*I -A1'];
lamda = eig(H_gamma)
  if abs(real(lamda)) > 0.01
    a_i=gamma_i;
    b_i=b;
  else
    a_i=a;
    b_i=gamma_i;
  end
gamma_i=(a_i+b_i)/2;
bis_a_i(i)=a_i
bis_b_i(i)=b_i
bis_gamma_i(i)=gamma_i
end

```

***** Transformation de coordonnées *****

```

T=diag([1,1,1,0.1])
A2=T*A*inv(T)
C2= C*inv(T)
%***** Le calcul de L2 correspond au transformation de coordonné par
%placement de poles.*****
L2=place(A2',C2',[p1,p2,p3,p4])'
*****Calcul de  $\delta(A2,C2)$  après la transformation de coordonnées *****
a=0;
b1=norm(A2,2);

```

```

K=(0.33/norm(C2))*C2;
N=13;
bis_a_i=zeros(1,N);
bis_b_i=zeros(1,N);
bis_gamma_i=zeros(1,N);
a_i=a;
b_i=b1;
for i=1:N
gamma_i=(a_i+b_i)/2;
H_gamma=[A2 I; K'*K-gamma_i^2*I -A2'];
H_gamma=[A2 gamma_i^2*I; -I+C'*C/gamma_i^2-eps*I -A2'];
lamda = eig(H_gamma)
if abs(real(lamda)) > 0.01
    a_i=gamma_i;
    b_i=b1;
else
    a_i=a;
    b_i=gamma_i;
end
gamma_i=(a_i+b_i)/2
bis_a_i(i)=a_i
bis_b_i(i)=b_i
bis_gamma_i(i)=gamma_i
end

***** calcul de L *****
L=L1+L2

```

Résultat d'exécution

```

\delta(A,C)= 0.4170
\delta(A2,C2)= 1.0992
\delta \Big(A_{2}, \frac{\gamma_{2}}{\text{norm}(C_{2})}C_{2}\Big) = 2.1541
L1 =

    0.1469    1.3051
   -56.1871    0.2127
   -1.0515    0.9605
    21.4566   -0.0994

```


L2 =

1.0053	0.8186
-44.9997	-0.6457
0.0693	0.9866
2.2493	-0.0642

L =

1.1522	2.1237
-101.1869	-0.4330
-0.9821	1.9471
23.7059	-0.1636

Bibliographie

- [1] In Bruce A. Francis, editor, *A Course in H_∞ Control Theory*, volume 88 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. 1987.
- [2] C. Aboky, G. Sallet, and J.-C. Vivalda. Observers for lipschitz non-linear systems. *International Journal of Control*, 75(3):204–212, 2002.
- [3] C. Bennani. Stabilisation et estimation d'état des systèmes dynamiques non linéaire et application. Master's thesis, Univ-Mouloud Mammeri, 2011.
- [4] S. Boyd, V. Balakrishnan, and P. Kabamba. A bisection method for computing the H_∞ norm of a transfer matrix and related problems. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 2(3):207–219, 1989.
- [5] Rikus Eising. Between controllable and uncontrollable. *Systems and Control Letters*, 4(5):263 – 264, 1984.
- [6] R. Herman and J. Krener. Nonlinear controlability and observability. *IEEE. Trans, Automatic control*, 22(5), 1977.
- [7] Monia Ouerder. Synthèse d'observateur pour les systèmes non linéaires. Technical report, Université de CAEN/BASSE–NORMANDIE, Juillet 2012.
- [8] R. V .Patel and M. Toda. Quantitative measures of robustness in multivariable systems. proceedings of the american control conference, pp. tp8-a. *San Francisco*, 1980.
- [9] G. Phanomchoeng and R. Rajamani. Observer design for lipschitz nonlinear systems using Riccati equations. In *American Control Conference (ACC), 2010*, pages 6060–6065, June 2010.
- [10] Sekhar Raghavan and J. Karl Hedrick. Observer design for a class of nonlinear systems. *International Journal of Control*, 59:515–528, 1994.
- [11] R. Rajamani. Observers for lipschitz nonlinear systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 43(3):397–401, Mar 1998.
- [12] R. Rajamani and Y. Cho. Observer design for nonlinear systems: stability and convergence. In *Decision and Control, 1995., Proceedings of the 34th IEEE Conference on*, volume 1, pages 93–94 vol.1, Dec 1995.
- [13] R. Rajamani and Y. M. Cho. Existence and design of observers for nonlinear systems: Relation to distance to unobservability. *International Journal of Control*, 69(5):717–731, 1998.
- [14] F. Sallem. *Détection et Isolation de Défauts Actionneurs Basées sur un Modèle de l'Organe de Commande*. PhD thesis, l'Université Toulouse III - Paul Sabatier, 2013.

- [15] Mark A. Shayman. Geometry of the algebraic \mathcal{R} iccati equation, part i. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 21(3):375–394, 1983.
- [16] M. Spong. Modeling and control of elastic joint robots. *ASMA Journal of Dynamical Systems, Measurement and Control*, 109:310–319, 1987.
- [17] F. E. Thau. Observing the state of non-linear dynamic systems. *International Journal of Control*, 17(3):471–479, 1973.
- [18] J.C. Willems. Least squares stationary optimal control and the algebraic \mathcal{R} iccati equation. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 16(6):621–634, Dec 1971.
- [19] S.H. Zak. On the stabilization and observation of nonlinear/uncertain dynamic systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 35(5):604–607, May 1990.
- [20] A. Zemouche. Sur l’observation de l’état des systèmes dynamiques non linéaires. Master’s thesis, Univ-Louis Pasteur Strasbourg, 2007.