

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU

FACULTÉ DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MEMOIRE DE MASTER

SPECIALITE: MATHÉMATIQUES

OPTION: RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

Présenté par:

AGDOUR ZOHRA

AMROUNI TAOUS

Sujet:

Résolution des Problèmes de Contrôle Optimal

Devant le jury d'examen composé de:

Mme.REZKI Fariza; Présidente

M.MERAKEB Abdalkader; Rapporteur

Mme.LESLOUS Fadhila; Examinatrice

Soutenu le: 22/06/2014

Rremerciements

”Besmi allah” nous remercions Dieu de nous avoir donné le courage et la patience. Nous tenons tout d’abord à exprimer notre gratitude et plus sincère remerciement à notre encadreur Monsieur Merakeb Abd Elkader pour avoir bien voulu nous encadrer pour la réalisation de ce modeste travail. Nous devons également le remercier pour sa disponibilité, sa gentillesse et ses précieux conseils tout au long de notre travail. Nous remercions également les membres de jury, pour avoir accepté de juger notre travail. Nous ne saurons oublier le grand mérite de nos enseignants qui nous ont donné de connaissance tout au long de notre cursus, particulièrement ceux du département de mathématique, et qu’ils trouvent ici le témoignage de notre profonde reconnaissance.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à:

- La mémoire de mon père, c'est grâce à lui que je suis arrivée là, je n'oublierai jamais ses conseils et ses encouragements d'affronter les problèmes jusqu'au bout, que dieu l'accueille dans son vaste paradis.

- Ma chère mère, qui ma élevée avec son plus grand amour, que dieu la garde et la protège de tous les malheurs.

- Mon très cher futur mari **Youcef** que dieu le garde et le protège pour moi.

- Mes chères soeurs Hassiba, lynda, madelène et Malika et mes beaux frèrs Belkacem et Moh.

- Mes chers frères Rabah et sa famille, Madjid et sa petite famille, Amrane et Yazide.

- Ma chères belles famille.

sans oublier ma binôme **Zohra**, mes très chères amies Sihem et souhila, et à toute la promotion "**RO**".

Dédicaces

Je dédie ce travail

A ceux qui ont attendu avec patience les fruits de leurs bonne éducation.

Ma mère et Mon père.

A mon très cher futur mari **wahab**.

A ceux qui sont plus chère.

Mon frère :Zouhir.

A mes chères soeures: naima et sa petite famille, chabha, wissam.

A toutes Mes amies: saliha, wardouche, farida, sihem, lynda, sans oublier celle avec qui j'ai partager ce travail **taous**.

A toute ma belle famille.

A toute la promotion **RO**.

Table des matières

Introduction Générale	3
1 Équations différentielles ordinaires	5
1.1 Introduction	5
1.2 Définitions	5
1.2.1 Réduction à une équation du premier ordre	6
1.3 Intégration d'équations différentielles d'un certain type	7
1.3.1 Équations à variables séparables	7
1.3.2 Équations homogènes	8
1.3.3 Équations linéaire du 1er ordre(non homogène)	8
1.4 Méthodes numériques	9
1.4.1 Méthode d'Euler	9
1.4.2 Méthode de Runge Kutta	10
2 Théorie du contrôle optimal	11
2.1 Introduction	11
2.2 Contrôlabilité	11
2.2.1 Ensemble accessible	11
2.2.2 Définition de la contrôlabilité	13
2.2.3 Application entrée-sortie	14
2.2.4 Contrôlabilité	14
2.2.5 Résultats de contrôlabilité	15
2.2.6 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes	16
2.2.7 Cas sans contrainte sur le contrôle: condition de Kalman . . .	16
2.2.8 Cas avec contrainte sur le contrôle	17
2.3 Principe du maximum de Pontriyagin	18

2.3.1	Fonction Hamiltonienne	18
2.3.2	Cas sans contrainte sur le contrôle: Principe du maximum faible	19
2.3.3	Le problème de Lagrange	19
2.3.4	Problème de Mayer-Lagrange	20
2.3.5	Énoncé général	21
2.3.6	Condition de transversalité	24
2.3.7	Condition de transversalité sur le Hamiltonien	25
2.3.8	Généralisation des conditions de transversalité	26
3	Méthodes Numériques en contrôle optimale	28
3.1	Introduction	28
3.2	Méthode indirecte	28
3.2.1	Méthode de tir simple	28
3.2.2	Rappels sur les méthodes de Newton	29
3.3	Méthode directes	30
3.3.1	Discrétisation totale: tir direct	30
3.4	Comparaison entre la Méthode directe et la Méthode indirecte	32
4	Exemple d'application	47
4.1	Véhicule électrique	47
4.1.1	Modèle de fonctionnement d'un véhicule électrique	47
4.1.2	Modélisation de la partie électrique	48
4.1.3	Modélisation de la partie mécanique	49
4.1.4	Simulation	53
4.1.5	Application sur Matlab:	53
	Conclusion Générale	57

Introduction Générale

La théorie du contrôle analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères.

Les systèmes abordés sont multiples : systèmes différentiels, systèmes discrets, systèmes avec bruit, avec retard... Leurs origines sont très diverses : mécanique, électricité, électronique, biologie, chimie, économie... L'objectif peut être de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations (stabilisation), ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation (contrôle optimal).

Ce manuscrit est composé de quatre chapitres; le premier chapitre concerne les équations différentielles qui sont utilisées pour construire des modèles Mathématiques de phénomènes physiques, biologiques... . Par conséquent, les équations différentielles représentent un vaste champ d'étude aussi bien en Mathématiques pures qu'en mathématique appliquées.

Dans le deuxième chapitre on a donnée des notions sur l'accessibilité et la contrôlabilité. Un système de contrôle est dit contrôlable si on peut l'amener (en temps fini) d'un état initial arbitraire vers un état final prescrit. Pour les systèmes de contrôle linéaires en dimension finie, il existe une caractérisation très simple de la contrôlabilité, due à Kalman. Pour les systèmes non linéaires, le problème mathématique de contrôlabilité est beaucoup plus difficile. On a également présenté la théorie du contrôle optimal pour des systèmes de contrôle généraux (non linéaires), notamment le principe du maximum de Pontryagin. Le troisième chapitre est

consacré aux méthodes numériques en contrôle optimal. Le dernier chapitre est consacré à l'étude d'une application sur le véhicule électrique.

Chapitre 1

Équations différentielles ordinaires

1.1 Introduction

Une équation différentielle, en Mathématique, est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leur dérivées.

L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximale de différentiabilité, auquel une des fonctions inconnues à été soumise.

1.2 Définitions

Définition 1.1. Équations différentielles ordinaires:

une équation différentielle ordinaire (EDO) est une relation entre la variable réelle t et une fonction inconnue $t \mapsto y(t)$ et ses dérivées $y', y'', \dots, y^{(n)}$ au point t définie par :

$$F(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0 \quad (1.1)$$

On notera:

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.2)$$

On dit que cette équation est scalaire si F est à valeurs dans \mathbb{R} .

Définition 1.2. Solution:

on appelle solution (ou intégrale) d'une équation différentielle d'ordre n sur un certain intervalle I de \mathbb{R} , toute fonction y définie sur cet intervalle I , n fois dérivable en tout point de I et qui vérifie cette équation différentielle sur I .

On notera en général cette solution (y, I) .

Si I contient sa borne inférieure α , (resp. sa borne supérieure β), ce sont des dérivées à droite (resp. à gauche) qui interviennent au point $t = \alpha$ (resp. $t = \beta$).

Intégrer une équation différentielle consiste à déterminer l'ensemble de ses solutions.

Définition 1.3. Soient (y, I) et (\tilde{y}, \tilde{I}) deux solutions d'une même équation différentielle.

On dit que (\tilde{y}, \tilde{I}) est un prolongement de (y, I) si et seulement si $I \subset \tilde{I}$ et $\tilde{y}|_I = y$.

Définition 1.4. Solution maximale, solution globale: Soient I_1 et I_2 , deux intervalles sur \mathbb{R} tels que $I_1 \subset I_2$.

On dit qu'une solution (y, I_1) est maximale dans I_2 si et seulement si y n'admet pas de prolongement (\tilde{y}, \tilde{I}) solution de l'équation différentielle telle que:

$$I_1 \subsetneq \tilde{I} \subset I_2.$$

On dit qu'une solution (y, I_1) est globale dans I_2 si et seulement si y admet un prolongement \tilde{y} solution définie sur l'intervalle I_2 tout entier.

Remarque 1.1. Toute solution globale sur un intervalle I est maximale sur I , mais la réciproque est fautive.

1.2.1 Réduction à une équation du premier ordre

Considérons l'EDO d'ordre n , ($n \geq 2$):

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.3)$$

où, y est à valeurs dans \mathbb{R}^m .

(On prend $m = 1$ en général) et

$$F : \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m}_{n+1 \text{ fois}} \rightarrow \mathbb{R}^p.$$

On fait le changement d'inconnues $Z = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$. On a alors $Z \in (\mathbb{R}^m)^n$. On note alors $Z(y, y', \dots, y^{(n-1)})$ où chacun des $z_i = y^{(i-1)} \in \mathbb{R}^m, i = 1, \dots, n$. On se retrouve alors avec des relations entre les z_i :

$$\begin{cases} z'_i - z_{i+1} = 0, i = 1, 2, \dots, n-1 \\ F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

On se ramène alors à une équation du premier ordre, à une variable et n inconnues du type:

$$G(t, z_1, z_2, \dots, z_n, z'_1, z'_2, \dots, z'_n) = 0. \quad (1.5)$$

Cas particulier $n = 2$ (F scalaire):

$$F(t, y, y', y'') = 0 \quad (1.6)$$

Cette équation peut se ramener à une équation du premier ordre à deux inconnues, z_1 et z_2

$$\begin{cases} z'_1 - z_2 = 0 \\ F(t, z_1, z_2, z'_1, z'_2) = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

1.3 Intégration d'équations différentielles d'un certain type

1.3.1 Équations à variables séparables

Ce sont des équations du premier ordre sous forme normale données par l'équation, $y' = f(t, y)$. Le but est d'exprimer $f(t, y)$ sous la forme $g(t)h(y)$. Ce qui permettra de résoudre une équation du type:

$$y' = g(t)h(y) \quad (1.8)$$

Les équations les plus simple sont de la forme:

$$y' = f(t) \quad (1.9)$$

c'est à dire $h \equiv 1$ et $g(t) = f(t)$.

On suppose que f est continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

Définition 1.5. Équation à variables séparées

On appelle une équation à variables séparées toute équation de la forme:

$$b(y)y' = a(t) \quad (1.10)$$

où a et b sont deux fonctions définies respectivement sur J et K où J et K sont des intervalles de \mathbb{R} .

Théorème 1.1. *Supposons a et b continues respectivement sur J et K . Soit I un intervalle de J , alors y est solution de (1.10) sur I si et seulement si:*

1. y est différentiable sur I
2. Il existe $C \in \mathbb{R}$, constante telle que $B(y(t)) = A(t) + C$, pour tout $t \in I$ avec:

$$A(t) = \int a(t)dt, (t \in J) \text{ et } B(t) = \int b(t)dt, (x \in K).$$

Théorème 1.2. *Si I est un intervalle ouvert de J . Toute fonction continue y sur I qui satisfait $B(y(t)) = A(t) + C$ pour tout $t \in I$, pour une certaine valeur de C et qui satisfait la condition $b(y(t)) \neq 0$ pour tout $t \in I$ est une solution de (1.10) sur I .*

1.3.2 Équations homogènes

Définition 1.6. Une Équation différentielle scalaire homogène du premier ordre est une équation de la forme:

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right) \quad (1.11)$$

où F est continue, homogène de degré quelconque r ($r \in \mathbb{Z}$) par rapport à t et y , c'est à dire que pour tout $k \in \mathbb{R}^*$, on a:

$$F(kt, ky, y') = k^r F(t, y, y')$$

1.3.3 Équations linéaire du 1er ordre (non homogène)

Définition 1.7. Une équation différentielle du premier ordre est dite linéaire si elle est linéaire par rapport à la fonction inconnue y et par rapport à sa dérivée y' . Une telle équation peut toujours s'écrire sous la forme:

$$A(t)y' + B(t)y = D(t)$$

On supposera dans toute la suite que A , B et D sont continues sur un intervalle I_0 .

Définition 1.8. Une Équation linéaire sans second membre est une équation de la forme:

$$A(t)y' + B(t)y = 0 \quad (1.12)$$

C'est une équation à variables séparables sur un intervalle $I * J$ ($I \subset I_0$) telle que:

$$\begin{cases} A(t) \neq 0 & t \in I \\ o \ni J & y \in J \end{cases} \quad (1.13)$$

Équation linéaire avec second membre:

Une équation avec second membre est de la forme:

$$A(t)y_0 + B(t)y = D(t) \quad (1.14)$$

Désignons par I_0 un intervalle sur lequel $A(t)$ ne possède pas de racine. Soit y_0 une intégrale particulière non dégénérée de l'équation sans second membre associée à l'équation (1.14) sur I .

1.4 Méthodes numériques

1.4.1 Méthode d'Euler

La méthode d'Euler (1707-1783) est la méthode la plus simple de résolution numérique d'EDO.

Elle possède une belle interprétation géométrique et son emploi est facile. Toutefois, elle est relativement peu utilisée en raison de sa faible précision. La résolution du problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} \dot{y} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Conduit au schéma suivant:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \\ \text{avec } h \text{ le pas de la méthode.} \end{cases}$$

En pratique la méthode d'Euler n'est pas utilisée car elle n'offre pas une précision suffisante.

Cette méthode est convergente et de 1^{er} ordre car l'erreur de consistance (de troncature ou de discrétisation est la différence entre la valeur discrétisée et la valeur exacte) vaut:

$$|y(x_i) - y_i| = \frac{1}{2}h^2 \dot{f}(c, y_i) \quad \text{avec } c \in [x_{i-1}, x_i]$$

mais cette méthode dite explicite est souvent instable c'est le cas si la fonction est linéaire, par exemple:

$$\dot{y} = f(x,y) = -ay \quad \text{avec } a > 0$$

Le schéma d'Euler est:

$$y_{i+1} = y_i - ahy_i = (1 - ah)y_i \quad \text{avec } a > 0$$

est instable dès que $h > \frac{2}{a}$, car dans ce cas y_i tend vers l'infini lorsque i tend vers l'infini.

1.4.2 Méthode de Runge Kutta

Carl Runge (1856-1927) et Martin Kutta (1867 – 1944) Ont proposé en 1895 de résoudre le problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} \dot{y} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

En introduisant un schéma numérique de la forme:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ y_{i+1} = y_i + h\phi(x_i, y_i, h_i) \end{cases}$$

où la fonction d'incrément ϕ est une approximation de $f(x,y)$ sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ supposons un entier r , une matrice A carrée d'ordre r dont les éléments triangulaires supérieurs sont nuls y compris la diagonale, et un vecteur $b = (b_1, b_2, \dots, b_r)$.

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h(b_1k_1 + \dots + b_rk_r) \\ x_{i+1} = x_i + h \\ k_j = f(x_i + c_jh, y_i + h(a_{j1}k_1 + \dots + a_{jr}k_r)), j = 1, \dots, r. \end{cases}$$

le vecteur b vérifie $b_1 + b_2 + \dots + b_r = 1$ les coefficients c_j sont les sommes des éléments de la ligne j de la matrice A . Dans ces méthodes le pas h peut facilement varier, une méthode de Runge-Kutta est entièrement déterminée par la donnée de l'entier r , le vecteur b et la matrice A .

Chapitre 2

Théorie du contrôle optimal

2.1 Introduction

La théorie du contrôle analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle).

2.2 Contrôlabilité

2.2.1 Ensemble accessible

Considérons le système contrôlé suivant:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \quad x(0) = x_0 \quad (2.1)$$

avec $u \in U \subset \mathbb{R}^n$; $A = n \times n$; $B = n \times m$

Définition 2.1. L'ensemble des points accessibles à partir de x_0 en un temps $T > 0$ est défini par $Acc(x_0, T) = \{x_u(T) \mid u \in \Omega\}$, où x_u est la solution du système (2.1) associée au contrôle u .

Autrement dit $Acc(x_0, T)$ est l'ensemble des extrémités des solutions de (2.1) au temps T , lorsqu'on fait varier le contrôle u (voir figure.1). Pour la cohérence on pose $Acc(x_0, 0) = x_0$.

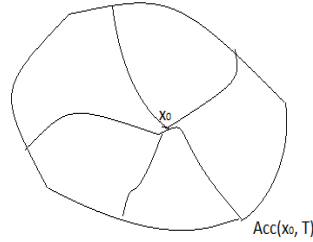


Figure.1

Théorème 2.1. *Considérons le système de contrôle linéaire dans \mathbb{R}^n .*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, Ω est un ensemble compact et convexe. Soient $T \geq 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Alors pour tout $t \in [0, T]$, $Acc(x_0, t)$ est compact, convexe, et varie continûment avec $t \in [0, T]$.

Exemple 2.1. Soit le système de contrôle suivant:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |u_i| \leq 1, i = \overline{1, 2}, t \in [0, t_f] \quad (*)$$

$$\dot{X} = AX + BU, \dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

avec: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$Acc(x_0, t) = \{x_u(t) / x_u(t) \text{ est la solution du système } \dot{X} = AX + BU\}$$

$$x(t) = F(t).x_0 + F(t) \int_0^t F^{-1}(s)Bu(s)ds \quad F: \text{ solution de } \dot{F} = AF, F(0) = Id.$$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t Bu(s)ds = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \dot{F} = 0 \Rightarrow F = c(\text{constante})$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{pmatrix} ds$$

$$x_1(t) = 1 + \int_0^t u_1(s)ds.$$

$$x_2(t) = 0 + \int_0^t u_2(s)ds.$$

⇒

$$Acc(x_0, t) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1(t) = 1 + \int_0^t u_1(s) ds, x_2(t) = 0 + \int_0^t u_2(s) ds, |u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1\}$$

⇒

$$Acc(x_0, t) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / 1 - t \leq x_1(t) \leq 1 + t, -t \leq x_2(t) \leq t\} \subset [1 - t, 1 + t] \times [-t, +t], t \in \mathbb{R}.$$

2.2.2 Définition de la contrôlabilité

Définition 2.2. Le système contrôlé

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$$

est dit contrôlable en temps T si:

$$Acc(x_0, T) = \mathbb{R}^n$$

c'est à dire, pour tous $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle u tel que la trajectoire associée relie x_0 à x_1 en temps T .

voir figure 2:

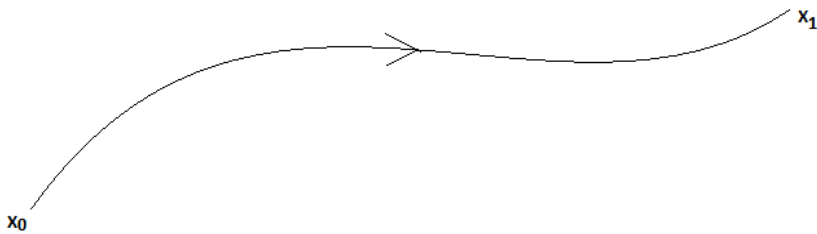


fig 2 - contrôlabilité

figure.2

2.2.3 Application entrée-sortie

Définition 2.3. Considérons pour le système:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) &= x_0\end{aligned}$$

le problème de contrôle suivant: étant donné un point $x_1 \in \mathbb{R}^n$, trouver un temps T et un contrôle u sur $[0, T]$ tel que la trajectoire x_u associée à u , solution de:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) &= x_0\end{aligned}$$

vérifie:

$$x_u(0) = x_0, x_u(T) = x_1.$$

Ceci conduit à la définition suivante:

Définition 2.4. Soit $T > 0$, L'application entrée-sortie en temps T du système contrôlé:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) &= x_0\end{aligned}$$

initialiser à x_0 est l'application :

$$\begin{aligned}E_T : U &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\mapsto x_u(T)\end{aligned}$$

où U est l'ensemble des contrôles admissibles, c'est à dire, l'ensemble de contrôles u tels que la trajectoire associée est bien définie sur $[0, T]$.

Autrement dit, l'application entrée-sortie en temps T associe à un contrôle u le point final de la trajectoire associée à u .

2.2.4 Contrôlabilité

On veut répondre à la question suivante.

étant donné le système:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) &= x_0\end{aligned}$$

où peut-on aller en temps T en faisant varier le contrôle u ? On est tout d'abord amené à définir la notion d'ensemble accessible.

Définition 2.5. L'ensemble accessible en temps T pour le système

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) &= x_0\end{aligned}$$

noté $Acc(x_0, T)$, est l'ensemble des extrémités au temps T des solutions du système partant de x_0 au temps $t = 0$.

Autrement dit, c'est l'image de l'application entrée-sortie en temps T .

Théorème 2.2. *Considérons le système de contrôle:*

$$\dot{x} = f(t, x, u), x(0) = x_0,$$

où la fonction f est de C^1 sur \mathbb{R}^{1+n+m} , et les contrôles u appartiennent à l'ensemble U des fonctions mesurables à valeurs dans un compact $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.

On suppose qu'il existe un réel positif b tel que toute trajectoire associée est uniformément bornée par b sur $[0, T]$, c'est à dire:

$$\begin{aligned}\exists b > 0 \quad \forall u \in U \quad \forall t \in [0, T] \\ \|x_u(t)\| \leq b.\end{aligned}$$

Pour tout (t, x) , l'ensemble des vecteurs vitesses est:

$$V(t, x) = f(t, x, u) / u \in \Omega$$

est convexe. Alors l'ensemble $Acc(x_0, t)$ est compact et varie continûment en t sur $[0, T]$.

2.2.5 Résultats de contrôlabilité

Définition 2.6. Le système:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)), \\ x(t_0) &= x_0\end{aligned}$$

est dit contrôlable (en temps quelconque) depuis x_0 si:

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{T>0} Acc(x_0, T).$$

Il est dit contrôlable en temps T si:

$$\mathbb{R}^n = Acc(x_0, T)$$

2.2.6 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes

2.2.7 Cas sans contrainte sur le contrôle: condition de Kalman

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas où A et B ne dépendent pas de t .

Théorème 2.3. *On suppose que $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ (pas de contrainte sur le contrôle).*

Le système:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t)$$

est contrôlable en temps T (quelconque) si et seulement si la matrice:

$$C = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$$

est de rang n . La matrice C est appelée matrice de Kalman, et la condition $\text{rang} C = n$ est appelée condition de Kalman.

Exemple 2.2. Soit le système contrôle suivant:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

$$\dot{X} = AX + BU, C = (B, AB, \dots, A^{n-1}B) = (B, AB)$$

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{rang} C = 2 \Rightarrow$ le système est contrôlable.

Remarque 2.1. La condition de Kalman ne dépend ni de T ni de x_0 . Autrement dit, si un système linéaire autonome est contrôlable en temps T depuis x_0 , alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.

Lemme 2.1. *La matrice C est de rang n si et seulement si l'application linéaire:*

$$\begin{aligned} \Phi : L^\infty \in ([0, T], \mathbb{R}^m) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\longmapsto \int_0^T e^{(T-t)A} Bu(t) dt \end{aligned}$$

est surjective.

Preuve. Supposons tout d'abord que $\text{rang} C < n$, et montrons qu'alors Φ n'est pas surjective. L'application Φ étant non surjective, il existe un vecteur $\psi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, que l'on supposera être un vecteur ligne, tel que $\psi C = 0$. Par conséquent,

$$\psi B = \psi AB = \dots = \psi A^{n-1}B = 0.$$

Or d'après le théorème d'Hamilton-Cayley, il existe des réels a_0, a_1, \dots, a_{n-1} tels que :

$$A^n = a_0 I + \dots + a_{n-1} A^{n-1}.$$

On déduit par récurrence immédiate que, pour tout entier k , $\psi A^k B = 0$, et donc, pour tout $t \in [0, T]$, $\psi e^{tA} B = 0$. Par conséquent, pour tout contrôle u , on a :

$$\psi \int_0^T e^{(T-t)A} B u(t) dt = 0$$

c'est à dire: $\psi \Phi(u) = 0$, ce qui montre que Φ n'est pas surjective.

Réciproquement, si Φ n'est pas surjective, alors il existe un vecteur ligne $\psi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que pour tout contrôle u on ait :

$$\psi \int_0^T e^{(T-t)A} B u(t) dt = 0.$$

Ceci implique que, pour tout $t \in [0, T]$, $\psi e^{(T-t)A} B = 0$. En $t = T$ on obtient $\psi B = 0$. Ensuite, en dérivant par rapport à t , puis en prenant $t = T$, on obtient $\psi AB = 0$. Ainsi, par dérivations successives, on obtient finalement :

$$\psi B = \psi AB = \dots = \psi A^{n-1} B = 0,$$

donc $\psi C = 0$, et donc $\text{rang} C < n$.

2.2.8 Cas avec contrainte sur le contrôle

Corollaire. *Sous la condition de Kalman précédente, si $r = 0$ et si $0 \in \Omega$, alors l'ensemble accessible $\text{Acc}(x_0, t)$ en temps t contient un voisinage du point $e^{(tA)} x_0$.*

Théorème 2.4. *Soit $b \in \mathbb{R}^n$ et $\Omega \subset \mathbb{R}$ un intervalle contenant 0 dans son intérieur.*

Considérons le système

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$

avec $u(t) \in \Omega$. Alors tout point de \mathbb{R}^n peut être conduit à l'origine en temps fini si et seulement si la paire (A, b) vérifie la condition de Kalman et la partie réelle de chaque valeur propre de A est inférieure ou égale à 0.

2.3 Principe du maximum de Pontryagin

Dans cette section on donne une version générale du principe de maximum de Pontryagin. Ce théorème est difficile à démontrer. En revanche lorsqu'il n'y a pas de contrainte sur le contrôle, la preuve est simple, et on arrive au principe du maximum dit faible. C'est à cette version plus simple que nous allons d'abord nous intéresser, puis nous passerons au cas général.

2.3.1 Fonction Hamiltonienne

Définition 2.7. Le Hamiltonien du système :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$$

est la fonction:

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, p, u) &\mapsto H(t, x, p, u) = p \cdot f(t, x, u) \end{aligned}$$

Proposition 2.1. Soit u un contrôle singulier sur $[0, T]$ pour le système de contrôle :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$$

Soit x_u la trajectoire singulière associée. Alors il existe une application absolument continue

$$p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

appelée vecteur adjoint, telle que les équations suivantes sont vérifiées pour presque tout $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), u(t)) \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), u(t)) \\ \frac{\partial H}{\partial u}(t, x(t), p(t), u(t)) &= 0 \end{aligned}$$

où H est le Hamiltonien du système.

Définition 2.8. Soit u un contrôle défini sur $[0, T]$ tel que sa trajectoire associée x_u issue de $x(0) = x_0$ est définie sur $[0, T]$. On dit que le contrôle u (ou la trajectoire x_u) est singulier sur $[0, T]$ si la différentielle de Fréchet $dE_T(u)$ de l'application entrée-sortie au point u n'est pas surjective. Sinon on dit qu'il est régulier.

2.3.2 Cas sans contrainte sur le contrôle: Principe du maximum faible

2.3.3 Le problème de Lagrange

Ce problème simplifié est le suivant: On cherche des conditions nécessaires d'optimalité pour le système:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad (2.2)$$

où les contrôles $u(\cdot) \subset U$ sont définis sur $[0, T]$ et les trajectoires associées doivent vérifier $x(0) = x_0$ et $x(T) = x_1$, le problème est de minimiser un coût de la forme:

$$C(u) = \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt \quad (2.3)$$

où T est fixé. Associons au système (2.1) le système augmenté suivant:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad \dot{x}^0(T) = f^0(t, x(t), u(t)) \quad (2.4)$$

et notons

$$\tilde{x} = (x, x^0), \tilde{f} = (f, f^0).$$

Le problème revient donc à chercher une trajectoire solution de (2.2) joignant les points $\tilde{x}_0 = (x_0, 0)$ et $\tilde{x}_1 = (x_1, x^0(T))$, et minimisant la dernière coordonnée $x^0(T)$. L'ensemble des états accessibles à partir de \tilde{x}_0 pour le système (2.2) est

$$\tilde{Acc}(\tilde{x}_0, T) = \bigcup_{u(\cdot)} \tilde{x}(T, \tilde{x}_0, u).$$

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un contrôle soit extrême.

Théorème 2.5. *Considérons le système de contrôle linéaire*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \quad x(0) = x_0$$

où le domaine de contraintes $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sur le contrôle est compact. Soit $T > 0$. Le contrôle u est extrême sur $[0, T]$ si et seulement s'il existe une solution non triviale $p(t)$

de l'équation $\dot{p}(t) = -p(t)A(t)$ telle que:

$$p(t)B(t)u(t) = \max_{v \in \Omega} p(t)B(t)v \quad (2.5)$$

Pour presque tout $t \in [0, T]$ Le vecteur ligne $p(t) \in \mathbb{R}^n$ est appelé vecteur adjoint.

Remarque 2.2. Dans le cas mono-entrée (contrôle scalaire), et si de plus $\Omega = [-a, a]$ où $a > 0$, la condition de maximisation implique immédiatement que $u(t) = a$ signe $(p(t)B(t))$. La fonction $\varphi(t) = p(t)B(t)$ est appelée fonction de commutation, et un temps t_c auquel le contrôle extrêmumal $u(t)$ change de signe est appelé un temps de commutation. C'est en particulier un zéro de la fonction $\varphi(t)$.

Théorème 2.6. (Principe du maximum faible)

Si le contrôle u associé au système de contrôle (2.1) est optimal pour le coût (2.5), alors il existe une application $p(\cdot)$ absolument continue sur $[0, T]$, à valeurs dans \mathbb{R}^n , appelée vecteur adjoint, et un réel $p^0 \leq 0$, tels que le couple $(p(\cdot), p^0)$ est non trivial, et les équations suivantes sont vérifiées pour presque tout $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{dH}{dp}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) \\ \dot{p}(t) &= -\frac{dH}{dx}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) \\ \frac{dH}{du}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) &= 0 \end{aligned}$$

où H est le Hamiltonien associé au système (2.1) et au coût (2.5)

$$H(t, x(t), p, p^0, u) = \langle P, f(t, x, u) \rangle + p^0 f^0(t, x, u) \quad (2.6)$$

2.3.4 Problème de Mayer-Lagrange

On modifie le problème précédent en introduisant le coût

$$C(t, u) = \int_0^t f^0(s, x_u(s), u(s)) ds + g(t, x_u(t)) \quad (2.7)$$

où le temps final t n'est pas fixé. Soit M_1 une variété de \mathbb{R}^n . Le problème de contrôle optimal est alors de déterminer une trajectoire solution de:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), x(0) = x_0.$$

où les contrôles $u(\cdot)$ sont dans l'ensemble \cup des contrôles admissibles sur $[0, t_e(u)[$, telle que $x(T) \in M_1$ et de plus $x(\cdot)$ minimisé sur $[0, T]$ le coût (2.7). Supposons que la variété M_1 est donnée par:

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = 0\}.$$

où F est une fonction de classe C^1 de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p (submersive donc, puisque M_1 est une variété). En écrivant: $F = (F_1, \dots, F_p)$.

où les fonctions F_i sont à valeurs réelles, il vient:

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F_1(x) = \dots F_p(x) = 0\}.$$

et de plus l'espace tangent à M_1 en un point $x \in M_1$ est:

$$T_x M_1 = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \nabla F_i(x)v = 0, i = 1 \dots p\}$$

Introduisons alors l'application:

$$h(t, u) = (F \circ E(t, u), C(t, u))$$

2.3.5 Énoncé général

Théorème 2.7. *On considère le système de contrôle dans \mathbb{R}^n*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \tag{2.10}$$

où

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

est de classe C_1 et où les contrôles sont des applications mesurables et bornées définies sur un intervalle $[0, t_e(u)[$ de \mathbb{R}^+ et à valeurs dans $\Omega \in \mathbb{R}^m$. Soient M_0 et M_1 deux sous-ensembles de \mathbb{R}^n .

On note \bigcup l'ensemble des contrôles admissibles u dont les trajectoires associées relient un point initial de M_0 à un point final de M_1 en temps $t(u) < t_e(u)$.

Par ailleurs on définit le coût d'un contrôle u sur $[0, t]$

$$C(t, u) = \int_0^t f^0(s, x(s), u(s)) ds + g(t, x(t))$$

où

$$f^0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

et

$$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

sont de classe C^1 , et $x(\cdot)$ est la trajectoire solution de (2.10) associée au contrôle u .

On considère le problème de contrôle optimal suivant: déterminer une trajectoire reliant M_0 à M_1 et minimisant le coût. Le temps final peut être fixé ou non. Si le contrôle $u \in \bigcup$ associée à la trajectoire $x(\cdot)$ est optimal sur $[0, T]$, alors il existe une application $p(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue appelée vecteur adjoint, et un réel $p^0 \leq 0$, tels que le couple $(p(\cdot), p^0)$ est non trivial, et tels que, pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$\dot{x}(t) = \frac{dH}{dp}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \quad \dot{p}(t) = -\frac{dH}{dx}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) \quad (2.11)$$

où:

$$H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + p^0 f^0(t, x, u)$$

est le Hamiltonien du système, et on a la condition de maximisation presque partout sur $[0, T]$

$$H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{\nu \in \Omega} H(t, x(t), p(t), p^0, \nu) \quad (2.12)$$

Si de plus le temps final pour joindre la cible M_1 n'est pas fixé, on a la condition au temps final T

$$\max_{\nu \in \Omega} H(T, x(T), p(T), p^0, \nu) = -p^0 \frac{dg}{dt}(T, x(T)) \quad (2.13)$$

Si de plus M_0 et M_1 (ou juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de \mathbb{R}^n ayant des espaces tangents en $x(0) \in M_0$ et $x(T) \in M_1$, alors le vecteur adjoint peut être construit

de manière à vérifier les conditions de transversalité aux deux extrémités (ou juste l'une des deux).

$$p(0) \perp T_{x(0)}M_0 \quad (2.14)$$

et

$$p(T) - p^0 \frac{dg}{dx}(T, x(T)) \perp T_{x(T)}M_1 \quad (2.15)$$

Remarque 2.3. Si le contrôle u est continu au temps T , la condition (2.14) peut s'écrire

$$H(T, x(T), p(T), p^0, u(T)) = -p^0 \frac{dg}{dt}(T, x(T)) \quad (2.16)$$

Remarque 2.4. Si la variété M_1 s'écrit sous la forme:

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F_1(x), \dots, F_p(x) = 0\}$$

où les F_i sont des fonctions de classe C^1 sur \mathbb{R}^n (indépendantes puisque M_1 est une variété), alors la condition (2.15) se met sous la forme

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}^n \mid p(T) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla F_i(x(T)) + p^0 \frac{dg}{dx}(T, x(T)) \quad (2.17)$$

Remarque 2.5. Dans les conditions du théorème, on a de plus pour presque tout $t \in [0, T]$

$$\frac{d}{dt}H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = \frac{dH}{dt}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) \quad (2.18)$$

En particulier si le système augmenté est autonome, c'est à dire si f et f^0 ne dépendent pas de t , alors H ne dépend pas de t , et on a:

$$\forall t \in [0, T] \quad \max_{v \in \Omega} H(x(t), p(t), p_0, \nu) = Cste. \quad (2.19)$$

Notons que cette égalité est alors valable partout sur $[0, T]$ (en effet cette fonction de t est lipschitzienne).

Remarque 2.6. La convention $p^0 \leq 0$ conduit au principe du maximum. La convention $p^0 > 0$ conduirait au principe du minimum, c'est à dire la condition (2.12) serait une condition de minimum.

Remarque 2.7. Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^m$, c'est à dire lorsqu'il n'y a pas de contrainte sur le contrôle, la condition de maximum (2.12) devient $\frac{dH}{du} = 0$, et on retrouve le principe du maximum faible.

Définition 2.9. Les conditions (2.14) et (2.15) sont appelées conditions de transversalité sur le vecteur adjoint. La condition (2.13) est appelée condition de transversalité sur le Hamiltonien .

Remarque 2.8. Le problème important du temps minimal correspond à $f^0 = 1$ et $g = 0$, ou bien à $f^0 = 0$ et $g(t, x) = t$. Dans les deux cas les conditions de transversalité obtenues sont bien les mêmes.

2.3.6 Condition de transversalité

Conditions de transversalité sur le vecteur adjoint:

Dans ce paragraphe le temps final pour atteindre la cible peut être fixé ou non. Récrivons les conditions (2.14) et (2.15) dans les deux cas importants suivants.

– Problème de Lagrange, dans ce cas le coût s'écrit:

$$C(t, u) = \int_0^t f^0(s, x(s), u(s)) ds$$

c'est à dire $g = 0$, les conditions de transversalité (2.14) et (2.19) sur le vecteur adjoint s'écrivent alors

$$p(0) \perp T_{x(0)}M_0, \quad p(T) \perp T_{x(T)}M_1 \tag{2.20}$$

Remarque 2.9. Si par exemple $M_0 = \{x_0\}$, la condition (2.14) devient vide. Si au contraire $M_0 = \mathbb{R}^n$, c'est à dire. si le point initial n'est pas fixé, on obtient $p(0) = 0$. De même, si $M_1 = \mathbb{R}^n$, on obtient $p(T) = 0$. Autrement dit si le point final est libre alors le vecteur adjoint au temps final est nul.

– Problème de Mayer, dans ce cas le coût s'écrit

$$C(t, u) = g(t, x(t))$$

c'est à dire, $f^0 = 0$. Les conditions de transversalité (2.14) et (2.15) (où (2.17)) ne se simplifient pas a priori. Mais dans le cas particulier important où $M_1 = \mathbb{R}^n$, autrement dit le point final $x(T)$ est libre, la condition (2.15) devient:

$$p(T) = p_0 \frac{dg}{dx}(T, x(T)) \quad (2.21)$$

et alors forcément $p^0 \neq 0$ (on prend alors $p^0 = -1$). Si de plus g ne dépend pas du temps, on a coutume d'écrire $p(T) = -\nabla g(x(T))$.

2.3.7 Condition de transversalité sur le Hamiltonien

La condition (2.13) n'est valable que si le temps final pour atteindre la cible n'est pas fixé. Dans ce paragraphe nous nous plaçons donc dans ce cas. La seule simplification notable de cette condition est le cas où la fonction g ne dépend pas du temps t (ce qui est vrai par exemple pour un problème de Lagrange), et la condition de transversalité (2.13) sur le Hamiltonien devient alors:

$$\max_{\nu \in \Omega} H(T, x(T), p(T), p^0, \nu) = 0 \quad (2.22)$$

où encore, si u est continu au temps T

$$H(T, x(T), p(T), p^0, u(T)) = 0 \quad (2.23)$$

Autrement dit le Hamiltonien s'annule au temps final.

Remarque 2.10. Si le système augmenté est de plus autonome, c'est à dire si f et f^0 ne dépendent pas de t , alors d'après la remarque (2.3) on a le long d'une extrême

$$\forall t \in [0, T] \quad \max_{\nu \in \Omega} H(x(t), p(t), p^0, \nu) = 0$$

2.3.8 Généralisation des conditions de transversalité

Pour écrire les conditions de transversalité associées à un problème de contrôle plus général, il faut écrire les relations adéquates en termes de multiplicateurs de Lagrange. Par exemple considérons un problème de Lagrange avec des conditions aux limites mélangées, c'est à dire, on cherche une trajectoire solution de:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$$

minimisant le coût

$$C(T, u) = \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt,$$

et vérifiant les conditions aux limites

$$(x(0), x(T)) \in M$$

où M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

Un cas important de conditions mélangées est le cas des trajectoires périodiques, c'est à dire $x(0) = x(T)$ non fixé. Dans ce cas on a:

$$M = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

et la condition de transversalité donne:

$$p(0) = p(T).$$

Autrement dit, non seulement la trajectoire est périodique, mais aussi son relèvement est extrémal.

Exemple 2.3. soit le problème continu du première ordre défini par l'équation différentielle suivant:

$$\ddot{x} = u, \quad x(0) = 0.$$

On souhaite pendant un temps T fixé, maximiser les distance parcourue tout en minimisant l'énergie fournie:

$$J(u(t)) = -x(t) + \int_0^T u^2(t) dt.$$

x : position, on pose $x = x_1$, $\dot{x} = x_2$: vitesse.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & x_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2 = u & x_2(0) = 0 \end{cases}$$

$$H(x, p, u, t) = -u^2(t) + (p_1, p_2) \begin{pmatrix} x_2 \\ u \end{pmatrix} = -u^2 + p_1 x_2 + p_2 u$$

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\frac{dH}{dx_1} \\ \dot{p}_2 = -\frac{dH}{dx_2} \\ \frac{dH}{du} = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{p}_1 = 0 \Rightarrow p_1 = c_1 \\ \dot{p}_2 = -p_1 = -c_1 \Rightarrow p_2 = -c_1 t + c_2 \\ \frac{dH}{du} = -2u + p_2 \Rightarrow \frac{dH}{du} = -2u - c_1 t + c_2 = 0 \end{cases} \quad (\star)$$

condition de transversalité:

$$\begin{cases} p_1 = -\frac{d(-x_1(T))}{dx_1} = 1 \Rightarrow c_1 = 1 \\ p_2 = -\frac{d(-x_1(T))}{dx_2} = 0 = -T + c_2 \Rightarrow c_2 = T \end{cases} \quad (2.2)$$

de (\star) on a:

$$u(t) = \frac{1}{2}(-t + T)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = u = -\frac{t}{2} + \frac{T}{2} &\Rightarrow x_2(t) = -\frac{t^2}{4} + \frac{T}{2}t. \\ \dot{x}_1 = x_2 = -\frac{t^2}{4} + \frac{T}{2}t &\Rightarrow x_1(t) = -\frac{t^3}{12} + \frac{T}{4}t^2. \\ x_1(T) &= -\frac{T^3}{12} + \frac{T^3}{4} = \frac{T^3}{6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow J(u(t)) &= -\frac{T^3}{6} + \frac{1}{4} \int_0^T (t^2 - 2Tt + T^2) dt \\ &= -\frac{T^3}{6} + \frac{1}{4} \left(\frac{t^3}{3} - Tt^2 + T^2 t \Big|_0^T \right) \\ &= -\frac{T^3}{6} + \frac{1}{4} \left(\frac{T^3}{3} - T^3 + T^3 \right) \\ &= -\frac{T^3}{6} + \frac{T^3}{12} = -\frac{T^3}{12} \end{aligned}$$

Chapitre 3

Méthodes Numériques en contrôle optimale

3.1 Introduction

On distingue deux types de méthodes numériques en contrôle optimal: les méthodes directes et les méthodes indirectes.

- Les méthodes directes consistent à discrétiser l'état et le contrôle, et réduisent le problème à un problème d'optimisation non linéaire.

- Les méthodes indirectes consistent à résoudre numériquement, par une méthode de tir ("Shooting Method"), un problème aux valeurs limites obtenu par application du principe du maximum.

3.2 Méthode indirecte

3.2.1 Méthode de tir simple

Considérons le problème de contrôle optimal suivant:

$$\begin{aligned} \min J(x,u) &= g(x) + \int_{t_0}^{t_f} f^0(t,x,u)dt \\ \begin{cases} \dot{x} = f(t,x,u), & t \in [t_0, t_f] \\ x(t_0) = x_0, & x(t_f) = x_1 \\ p(0) = p_0, & p(t_f) = p_1 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1)$$

supposons dans un premier temps que le temps final t_f est fixé.

Le principe du maximum donne une condition nécessaire d'optimalité et affirme que toute trajectoire optimale est la projection d'une extrémale. Si l'on est capable, à partir de la condition de maximum, d'exprimer le contrôle extrême en fonction de $(x(t), p(t))$, alors le système extrême est un système différentiel de la forme $\dot{z} = F(t, z(t))$, où $z(t) = (x(t), p(t))$, et les conditions initiales, finales, et les conditions de transversalité, se mettent sous la forme

$$R(z(0), z(t_f)) = R(x_0, p_0, x_1, p_1) = 0.$$

Finalement, on obtient le problème aux valeurs limitées suivant:

$$\begin{cases} \dot{z} = F(t, z(t)) \\ R(z(0), z(t_f)) = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Notons $z(t, z_0)$ la solution du problème de Cauchy

$$\dot{z} = F(t, z(t)), z(0) = z_0$$

la fonction de tir est définie par:

$$G(t_f, z_0) = R(z_0, z(t_f, z_0))$$

le problème (3.2) aux valeurs limites est équivalent à la résolution du système $G(t_f, z_0) = 0$ c'est à dire il s'agit de déterminer un zéro de la fonction G . Ceci peut se résoudre par une méthode de Newton.

3.2.2 Rappels sur les méthodes de Newton

Il s'agit de résoudre numériquement $G(z) = 0$, où $G : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ est une fonction de classe C^1 . L'idée de base est la suivante. Si z_k est proche d'un zéro z de G , alors:

$$0 = G(z) = G(z_k) + \partial G(z_k)(z - z_k) + o(z - z_k).$$

On est alors amené à considérer la suite définie par récurrence

$$z_{k+1} = z_k - (\partial G(z_k))^{-1} G(z_k)$$

un point initial $z_0 \in \mathbb{R}^p$ étant choisi, et on espère que z_k converge vers le zéro z . Ceci suppose donc le calcul de l'inverse de la matrice Jacobienne de G , ce qui doit être évité numériquement. Il s'agit alors, à chaque étape, de résoudre l'équation:

$$G(z_k) + \partial G(z_k)d_k = 0$$

où d_k est appelé direction de descente, et on pose $z_{k+1} = z_k + d_k$.

Sous des hypothèses générales, l'algorithme de Newton converge, et la convergence est quadratique. Il existe de nombreuses variantes de la méthode Newton : méthode de descente, de quasi-Newton, de Newton quadratique, Cette méthode permet, en général, une détermination très précise d'un zéro (d'une solution). Son inconvénient principal est la petitesse du domaine de convergence. Pour faire converger la méthode, il faut que le point initial z_0 soit suffisamment proche de la solution recherchée z . Ceci suppose donc que pour déterminer le zéro z il faut avoir au préalable une idée approximative de la valeur de z .

Remarque 3.1. Si la condition du maximum (PMP) permet de déterminer localement le contrôle comme une fonction $u(x,p)$ lisse, alors la fonction de tir G est lisse. ce qui assure la validité de la méthode.

3.3 Méthode directes

Les méthodes directes consistent à transformer le problème de contrôle optimal en problème d'optimisation non linéaire en dimension finie.

3.3.1 Discrétisation totale: tir direct

C'est la méthode la plus évidente lorsqu'on aborde un problème de contrôle optimal. En discrétisant l'état et le contrôle, on se ramène à un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie (ou problème de programmation non linéaire) de la forme:

$$\min_{Z \in C} F(Z) \tag{3.3}$$

où

$$Z = (x_1, \dots, x_N, u_1, \dots, u_N)$$

et

$$C = \{Z \mid g_i(Z) = 0, i \in \{1, \dots, r\}, g_j(Z) \leq 0, j \in \{r+1, \dots, m\}\} \quad (3.4)$$

Plus précisément, la méthode consiste à choisir les contrôles dans un espace de dimension finie, et à utiliser une méthode d'intégration numérique des équations différentielles.

Considérons donc une subdivision:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f$$

de l'intervalle $[0, t_f]$.

Réduisons l'espace des contrôles en considérant par exemple des contrôles constants par morceaux selon cette subdivision.

Par ailleurs, choisissons une discrétisation de l'équation différentielle, par exemple choisissons ici (pour simplifier) la méthode d'Euler explicite. On obtient alors, en posant $h_i = t_{i+1} - t_i$,

$$x_{i+1} = x_i + h_i f(t_i, x_i, u_i)$$

La discrétisation précédente conduit donc au problème de programmation non linéaire:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h_i f(t_i, x_i, u_i), i = \{0, \dots, N-1\}, \\ \min C(x_0, \dots, x_N, u_0, \dots, u_N), \\ u_i &\in \Omega, i = \{0, \dots, N-1\} \end{aligned}$$

c'est à dire un problème du type (3.3).

Remarque 3.2. Cette méthode est très simple à mettre en oeuvre. De plus l'introduction d'éventuelles contraintes sur l'état ne pose aucun problème. D'un point de vue plus général, cela revient à choisir une discrétisation des contrôles, ainsi que de l'état, dans certains espaces de dimension finie:

$u \in \text{Vect}(U_1, \dots, U_N)$ c'est à dire:

$$u(t) = \sum_{i=1}^N u_i U_i(t), u_i \in \mathbb{R}$$

$x \in \text{Vect}(X_1, \dots, X_N)$ c'est à dire

$$x(t) = \sum_{i=1}^N x_i X_i(t), x_i \in \mathbb{R}$$

où les $U_i(t)$ et $X_i(t)$ représentent une base de Galerkin. Typiquement, on peut choisir des approximations polynômiales par morceaux. L'équation différentielle, ainsi que les éventuelles contraintes sur l'état ou le contrôle, ne sont vérifiées que sur les points de la discrétisation. On se ramène bien à un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie de la forme (3.3).

La résolution numérique d'un problème de programmation non linéaire du type (3.3) est standard.

On applique les conditions nécessaires de Kuhn-Tucker pour des problèmes d'optimisation avec contraintes. Pour le problème (3.3),(3.4), les conditions de Kuhn-Tucker s'écrivent :

$$\nabla F(Z) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(Z) = 0 \quad (3.5)$$

où les multiplicateurs de Lagrange λ_i vérifient

$$\lambda_i g_i(Z) = 0, i \in 1, \dots, r, \quad \text{et} \quad \lambda_i > 0, i \in r + 1, \dots, m. \quad (3.6)$$

Les méthodes SQP (sequentiel quadratic programming) consistent à calculer de manière itérative ces multiplicateurs de Lagrange, en utilisant des méthodes de Newton ou quasi-Newton. A chaque itération, on utilise une méthode de quasi-Newton pour estimer la Hessien du Lagrangien associé au problème de programmation non linéaire, et on résout un sous-problème de programmation quadratique basé sur une approximation quadratique du Lagrangien.

3.4 Comparaison entre la Méthode directe et la Méthode indirecte

Les méthodes directes présentent les avantages suivants sur les méthodes indirectes :

- Leur mise en oeuvre est plus simple car elles ne nécessitent pas une étude théorique préalable comme les méthodes indirectes ; en particulier, on n'a pas à étudier les variables adjointes, ou bien à connaître à l'avance la structure des commutation .
- Elles sont plus robustes.

– Elles sont peu sensibles au choix de la condition initiale (contrairement aux méthodes indirectes).

– Il est facile de tenir compte d'éventuelles contraintes sur l'état.

– Elles permettent de calculer les contrôles optimaux sous forme de feedback, c'est à dire en boucle fermée, ce qui est particulièrement adapté aux problèmes de stabilisation, et/ou à la mise en oeuvre de systèmes embarqués.

En revanche:

– Les méthodes directes sont moins précises que les méthodes indirectes ; par exemple dans les problèmes de contrôle optimal issus de l'aéronautique, la précision des méthodes directes s'avère en général insuffisante, malgré l'augmentation du nombre de pas de la discrétisation.

– La discrétisation directe d'un problème de contrôle optimal comporte souvent plusieurs minimum (locaux), et les méthodes directes peuvent converger vers ces minimum ; pourtant la solution ainsi déterminée peut s'avérer être très éloignée de la vraie solution optimale.

– Les méthodes directes sont gourmandes en mémoire, et de ce fait peuvent devenir inefficaces si la dimension d'espace est trop grande

Les inconvénients des méthodes indirectes sont les suivants :

– Elles calculent les contrôles optimaux sous forme de boucle ouverte.

– Elles sont basées sur le principe du maximum qui est une condition nécessaire d'optimalité seulement, et donc il faut être capable de vérifier à posteriori l'optimalité de la trajectoire calculée.

L'avantages de la méthode indirecte est:

- L'extrême précision numérique.

Méthode directe	Méthode indirecte
mise en oeuvre simple sans connaissance a priori	connaissance a priori de la structure de la trajectoire optimale
peu sensibles au choix de la condition initiale	très sensibles au choix de la condition initiale
facilité de la prise en compte de contraintes sur l'état	difficulté théorique de la prise en compte de contraintes sur l'état
contrôles (globalement) optimaux en boucle fermée	contrôles (localement) optimaux en boucle ouverte
précision numérique basse ou moyenne	très grande précision numérique
efficaces en basse dimension	efficaces en toute dimension
gourmandise en mémoire	calculs parallélisables
problème des minima locaux	petit domaine de convergence

Exemple 3.1. $tf \rightarrow \min$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= y(t); & x(0) &= 0; & x(t_f) &= 0 \\ \dot{y}(t) &= u(t); & y(0) &= 0; & x(t_f) &= -1 \end{aligned}$$

avec $|u| \leq 1$

on a: $\dot{x}(t) = y(t); \ddot{x}(t) = \dot{y}(t) = u(t)$

La fonction Hamiltonien:

$$H = p^0 f^0 + p'(t)f(t,x,u) = (p_x, p_y) \begin{pmatrix} y(t) \\ u(t) \end{pmatrix} + p^0$$

Les équations adjointes sont:

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \Rightarrow p_x(t) = c_1 \\ \dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} = -p_x \Rightarrow p_y(t) = -p_x t + \lambda = -c_1 t + \lambda \end{aligned}$$

La condition de PMP(Principe du maximum):

$$\max_{|u| \leq 1} H = \max_{|u| \leq 1} (p_x y + p_y u + p_0) = p_y \Rightarrow u(t) = \text{signe}(p_y(t))$$

Application de la méthode tir simple:

On résout le problème optimale en considérant l'état initial x_0 l'origine et en prenant un état final $x_1=(0, -1)$ de l'espace X .

D'après le PMP on a:

$$u(t) = \text{signe}(p_y(t))$$

Nous avons le problème aux deux bouts:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = u(t) \\ \dot{p}_x(t) = 0 \\ \dot{p}_y(t) = -p_x(t) \\ x(0) = 0; y(0) = 0 \\ x(t_f) = 0; y(t_f) = -1 \end{cases}$$

En posons:

$$z(t) = (x(t); y(t); p_x(t); p_y(t)) = (z_1(t); z_2(t); z_3(t); z_4(t))$$

\Rightarrow

$$(PDB) = \begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) = u(t) \\ \dot{z}_3(t) = 0 \\ \dot{z}_4(t) = -z_3(t) \\ z_1(0) = 0; z_2(0) = 0 \\ z_3(0) = c_1 \in \mathbb{R}; z_4(0) = c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

on pose $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$

Donc le problème aux deux bouts est équivalent:

$$\begin{cases} \dot{Z} = F(t, Z), & Z(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, & Z(t_f) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Le problème de Cauchy associée au problème est

$$\begin{cases} \dot{Z} = F(t, Z) \\ Z(0) = h \end{cases}$$

La fonction de tir est défini par:

$$G(h) = Z(t_f, h) - Z(t_f)$$

La connaissance de la fonction de tir permet de considérer que ce problème optimal est entièrement résolu mathématiquement .

Résoudre le problème (PDB) est équivalent à chercher un zéro de la fonction G c'est à dire chercher: $h/ G(h) = 0$

car $(x_f, y_f) = (0, -1)$, $\max H(t) = z_3(t)z_4(t) + |z_4(t)| - 1$, dans notre cas $p^0 = -1$ et le fait que t_f est libre donc $\max H(t_f) = z_3(t_f)z_4(t_f) + |z_4(t_f)| - 1 = 0$

Résolution à l'aide du logiciel MATLAB:

On se ramène à un problème de tir simple, le programme suivant est effectué sous MATLAB, on utilise la méthode de newton, implémentée dans la Toolbox optim de MATLAB, il s'agit de la routine fsolve.m.

function tirsimple

```
% Méthode de tir simple, en utilisant fsolve,
% pour le système de contrôle
%  $\dot{x}=y, \dot{y}=u, |u| \leq 1$ .
% on veut aller de  $(0, 0)$  à  $(0, -1)$  en temps minimal.
clear all; clf; format long;
global X0; X0=[0;0];
p0=[1;1]; tf=5;
% Calcul de p0, tf:
option=optimset('Display', 'iter', 'LargeScale', 'on');
% programme principale
[p0tf,FVAL,EXITFLAG]=fsolve(@F,[p0;tf], option);
EXITFLAG
% 1 si la méthode converge, -1 sinon

%-----
% Trace de la trajectoire optimale
option=odeset('AbsTol',1e-9, 'RelTol', 1e-9);
[t,z]=ode45(@sys, [0;p0tf(3)], [x0;p0tf(1);p0tf(2)], option);
```



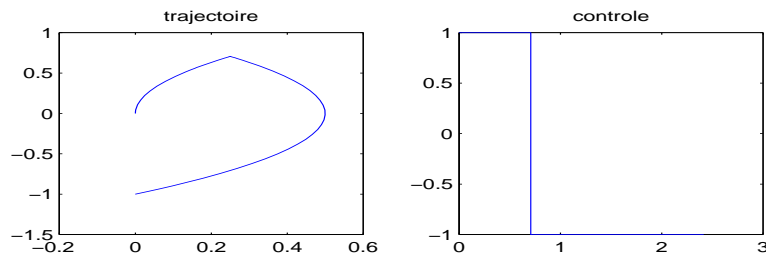
```

subplot(121); plot(z(:,1),z(:,2)); axis square; title('Trajectoire');
subplot(122); plot(t,sign(z(:,4))); axis square; title('contrôle');
t(end)
z(1,3)
z(1,4)
%-----
function Xzero=F(X)
%Définition de la fonction dont on cherche un zéro
global X0;
option=odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9);
[t,z]=ode113(@sys,X(3),[X(0);X(1);X(2)],option);
HamEnd=z(end,3)*z(end,2)+abs(z(end,4))-1;

Xzero=
[z(end,1)      %on pose xf=0
z(end,2)+1     %on impose yf=-1
HamEnd];      %tf libre donc H(tf)=0
%-----
function zdot=sys(t,z)
u=sign(z(4));
zdot=
[z(2)
u
0
-z(3)];      %système extrêmeal

```

Les résultats sont tracés sur la figure suivante:



Résultat de la méthode de tir simple

Sur cette figure on a deux graphes:

Le premier représente la trajectoire qui est variée de -1 à 0.6.

Le deuxième représente le contrôle qui est variée de -1 à 1.

Les deux fonctions sont lisses.

function direct

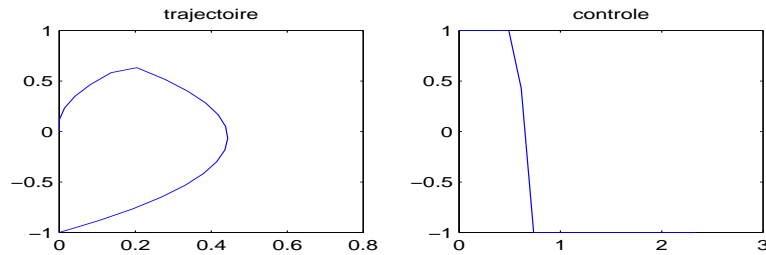
```
%discretisation directe(en utilisant fmincon.m)
%du problème de temps minimale
%xdot=y, ydot=u, |u| <= 1,
% le problème étant de joindre (0,0) a (0,-1)en temps minimal.
clear all; close all; clc;
N=100;%nombre de pas de discretisation
uinit= 2*rand(N,1)-1;%initialisation aléatoire du contrôle
tfinit= 1; xinit= [uinit; tfinit];
%point de depart pour fmincon
lb=-ones(N+1,1); lb(N+1)=0; ub=ones(N+1,1); ub(N+1)=100;
% contrainte sur le contrôle |u| <= 1, et 0 <= tf <= 100
%programme principale
[rep,Fval,exitflag]=fmincon(@tempsfinal,xinit,[],[],[],[],lb,ub,@cond);
exitflag
tf=rep(end); x(1)=0; y(1)=0;
for i=1:N
```

```

x(i+1)=x(i)+tf/N*y(i);
y(i+1)=y(i)+tf/N*rep(i);
end
%calcul de la trajectoire optimale
subplot(121); plot(x,y);axis square;
title('trajectoire');
subplot(122); plot(linspace(0,tf,N),rep(1:N));
axis square; title('contrôle');
%-----
function [c,ceq]= cond(x)
    N=length(x)-1;
    c=0;
    tf=x(end); xf=0; yf=0;
    for i=1:N
        xf=xf+tf/N*yf; %calcul de point final au temps tf
        yf=yf+tf/N*x(i); %avec la méthode d'Euler explicite
    end
    ceq=[xf;yf+1]; on impose la condition finale xf=0, yf=-1
%-----
function val= tempsfinal(x)
    val=x(end); x=[u,tf], %ou u est le discrétise du contrôle,et tf est le temps final

```

Les résultat sont tracer sur la figure suivante:



Résultat de la méthode directe

Dans cette figure on a 2 graphes:

Le premier graphe représente la trajectoire qui est varié de -1 à 0.6

Le deuxième graphe représente le contrôle qui est varié de -1 à 1

Les deux fonctions sont cassés.

Exemple 3.2. soit le problème:

$$\begin{aligned} & \min \int_0^2 u^2 dt \\ \dot{x} &= y & x(0) &= 0, y(0) = 0 \\ \dot{y} &= u & x(2) &= 0.5, y(2) = 0 \end{aligned}$$

avec: $tf = 2$

La fonction Hamiltonien:

$$H = p^0 f^0 + p'(t)f(t,x,u) = -u^2 + (p_1 \ p_2) \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix} = -u^2 + p_1 y + p_2 u$$

Le principe du maximum:

$$\begin{aligned} \max_{|u| \leq 1} H &= \max(p^0 f^0 + p'(t)f(t,x,u)) = -u^2 + (p_1 \ p_2) \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix} = -u^2 + p_1 y + p_2 u \\ \frac{\partial H}{\partial u} &= -2u(t) + p_2 = 0 \Rightarrow u(t) = \frac{1}{2}p_2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -2 < 0 \Rightarrow u = \frac{1}{2}p_2 \text{ est un max}$$

donc:

$$\text{si } |\frac{1}{2}p_2| < 1 \text{ alors } u^* = \frac{1}{2}p_2$$

si $|\frac{1}{2}p_2| \geq 1$ alors $u^* = \text{signe}(p_2)$

Les vecteurs adjoints:

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \Rightarrow p_1(t) = C_0$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial y} = -p_1(t) \Rightarrow p_2(t) = -c_0 t + c_1$$

si $|\frac{1}{2}p_2| < 1$ alors $u^* = \frac{1}{2}p_2$

si $|\frac{1}{2}p_2| \geq 1$ alors $u^* = \text{signe}(p_2)$

Application de la méthode tir simple:

Nous avons le problème aux deux bouts:

$$(PDB) = \begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = u(t) \\ \dot{p}_x(t) = 0 \\ \dot{p}_y(t) = -p_x(t) \\ x(0) = 0; y(0) = 0 \\ x(tf) = 0.5; y(tf) = 0 \end{cases}$$

En posons:

$$z(t) = (x(t); y(t); p_x(t); p_y(t)) = (z_1(t); z_2(t); z_3(t); z_4(t))$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) = u(t) \\ \dot{z}_3(t) = 0 \\ \dot{z}_4(t) = -z_3(t) \\ z_1(0) = 0; z_2(0) = 0 \\ z_3(0) = c_1 \in \mathbb{R}; z_4(0) = c_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.1)$$

on pose $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$

Donc le problème aux deux bouts est équivalent:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Z} = F(t,Z), \\ Z(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \end{array} \right. \quad Z(tf) = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Le problème de Cauchy associée au problème est:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Z} = F(t,Z) \\ Z(0) = h \end{array} \right. \quad (3.3)$$

La fonction de tir est défini par:

$$G(h) = Z(tf,h) - Z(tf)$$

La connaissance de la fonction de tir permet de considérer que ce problème optimal est entièrement résolu mathématiquement .

Résoudre le problème (PDB) est équivalent à chercher un zéro de l'équation $G(h) = 0$ c'est à dire chercher: $h/ G(h) = 0$

Résolution avec Matlab

function direct

%discritisation directe (en utilisant fmincon.m du problème de temps minimale)

%xdot=y, ydot=u, |u| <= 1,

%le problème étant de joindre (0,0) a (0.5,0)en temps minimal.

clear all; close all; clc;

global tf

N=100; %nombre de pas de discritisation

*uinit=2*rand(N,1)-1; %initialisation aléatoire du contrôle*

%point de départ pour fmincon

lb=-ones(N,1);

ub=ones(N,1);

%contrainte sur le contrôle |u| <= 1

%programme principale

[rep,Fval,exitflag]=fmincon(@energie,uinit,[],[],[],[],lb,ub,@cond);

exitflag

```

    x(1)=0;
    y(1)=0;
    for i=1:N
        x(i+1)=x(i)+2/N*y(i);
        y(i+1)=y(i)+2/N*rep(i);
    end
    %calcul de la trajectoire optimale

```

```

    subplot(121); plot(x,y);axis square;
    title('trajectoire');
    subplot(122); plot(linspace(0,tf,N),rep(1:N));
    axis square; title('contrôle');
    %-----

```

```

    function [c,ceq]= cond(u) global tf;
    N=length(u);
    c=0;
    xf=0;
    yf=0;
    for i=1:N
        xf=xf+tf/N*yf;%calcul de point final au temps tf
        yf=yf+tf/N*u(i); %avec la méthode d'Euler explicite
    end
    ceq=[xf-0.5;yf];
    %on impose la condition finale xf=0,yf=-1
    %-----

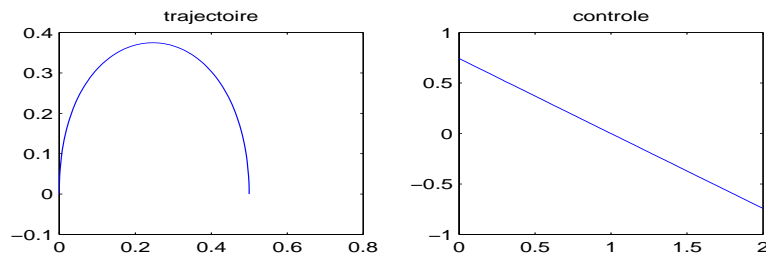
```

```

    function val = energie(u)
    global tf;
    N=length(u);
    val=0;
    for i=1:N
        val=val+tf/N*u(i)*u(i);
    end

```

Les résultats sont tracés sur la figure suivante:



Résultat de la méthode directe

Sur cette figure on a 2 graphes:

Le premier représente la trajectoire qui est variée de 0 à 0.39.

Le deuxième graphe représente le contrôle qui est varié de -0.6 à 0.6 .

Les deux fonctions sont cassées.

function tirsimple

%Méthode de tir simple, en utilisant fsolve, pour le système de contrôle

% $\dot{x}=y$, $\dot{y}=u$, $|u| \leq 1$;

%on veut aller de (0,0) à (0.5,0) en temps minimal

clear all; clf; clc; format long;

global x0 tf

X0=[0;0];

p0=[0.5;0.5];

%calcul de p0;

options = optimset('Display','iter','largescale','on');

%programme principale

[p0tf,FVAL,EXITFLAG]=fsolve(@F,p0,options);

EXITFLAG

%1 si la méthode converge, -1 sinon

```

    %Trace de la trajectoire optimale
    options= odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9);
    [t,z]=ode45(@sys,[0;tf],[x0;p0tf],options);
    subplot(121);plot(z(:,1),z(:,2));
    axis square;title('trajectoire');
    if abs(z(:,4)) < 2
    z(:,5)= -z(:,4)/2;
    else
    z(:,5)=-sign(z(:,4));
    end
    subplot(122);plot(t,z(:,5));
    axis square; title('contrôle');
    %-----
    function Xzero=F(X)
    %définition de la fonction dont on cherche un zéro
    global x0 tf;
    options = odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9);
    [t,z]=ode113(@sys,[0;tf],[x0;X],options);
    Xzero =
    [ z(end,1)-0.5      %on impose xf=0.5
    z(end,2)];      %on impose yf=0

```

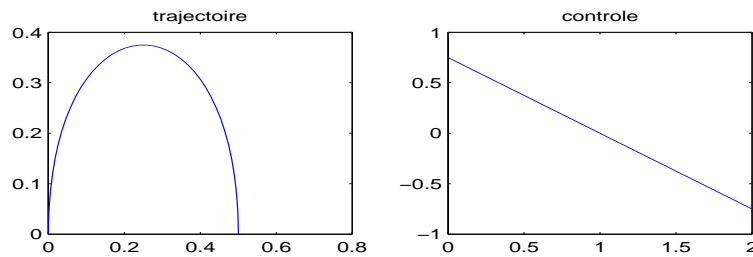
%-----

```

function zdot =sys(t,z)
if abs(z(4)) < 2
u= -z(4)/2;
else
u=-sign(z(4));
end
zdot=
[z(2)
u
0
-z(3)];% système extrêmal

```

Les résultat sont tracer sur la figure suivante:



Résultat de la méthode de tir simple

Dans cet figure on a deux graphe le premier représente la trajectoire qui est varié entre 0 et 0.39 .

Le deuxième représente le contrôle qui est varié de -0.6 à 0.6 ;
qui sont deux fonctions lisses.

Remarque 3.3. Si on compare les résultat de la méthode directe et celle de la méthode indirecte dans les deux exemples on trouve que les méthodes indirecte sont plus précise.

Chapitre 4

Exemple d'application

4.1 Véhicule électrique

Un véhicule électrique utilise une source d'énergie électrique pour son déplacement. Cette source d'énergie peut être réversible, dans le sens où elle peut être récupérée. Le problème de gestion de l'énergie des véhicule électrique peut être exprimé comme un problème de contrôle optimale. L'objectif étant l'optimisation de la consommation d'énergie sur un cycle de conduite donné.

4.1.1 Modèle de fonctionnement d'un véhicule électrique

En l'état actuel des connaissances, le moteur électrique constitue indéniablement une avancée technologique dans le domaine de l'efficacité énergétique par rapport à un moteur thermique classique. L'introduction d'un moteur électrique avec des batteries entraîne un rendement mécanique d'environ 90% quel que soit le régime auquel il travaille, contre environ 40% pour un moteur thermique.

Le moteur utilisé dans notre prototype est de type **RL** classique à courant continu. Ces moteurs, associés à des régulateurs électriques, ont des efficacité énergétique excellentes et de plus, ils sont très légers. Leur poids est notablement plus faible que celui d'un moteur thermique et de son réservoir. On pourrait disposer, à poids total équivalent, d'environ 200 kg de batteries.

La figure suivante représente le lien de traction standard entre les différentes composantes de la constitution du véhicule en question.

La modélisation de cette chaîne de transmission se compose de deux parties:

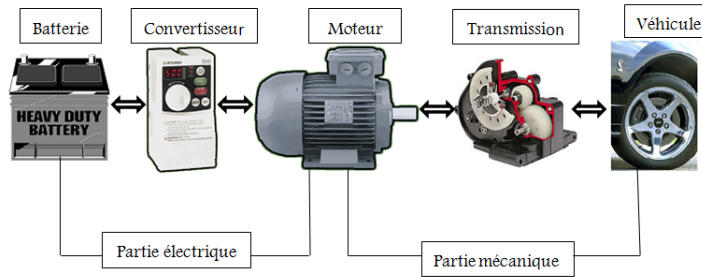


FIG-Chaîne de traction standard

la partie électrique en liaison avec la batterie, le convertisseur et le moteur, la partie mécanique en liaison avec la transmission et le véhicule. Chaque partie est décrite par une équation différentielle, une pour le courant dans le moteur et une pour la vitesse.

4.1.2 Modélisation de la partie électrique

L'énergie confinée dans la batterie est régulée dans le convertisseur par le paramètre de contrôle $u, u \in \{-1, 1\}$. La liaison délivrée peut se mettre sous la forme:

$$V_m = u_{alim}$$

Le courant délivré par la batterie sera alors:

$$i_{alim} = u_m$$

La maille sur le circuit moteur nous permet d'écrire l'équation suivante:

$$V_m = R_m i_m + L_m \frac{di_m}{dt} + K_m \times \Omega_m$$

D'où le courant délivré au moteur est modélisé par l'équation différentielle suivante:

$$\frac{d_{i_m}(t)}{dt} = \frac{u(t)V_{alim} - R_m i_m(t) - K_m \Omega_m(t)}{L_m} \quad (5.1)$$

La particularité de cette équation est d'être couplée à la partie mécanique par le terme:

$$K_m \cdot \Omega_m$$

Le couple fourni par le moteur est proportionnel au courant et peut s'écrire:

$$C_m = K_m \cdot i_m$$

4.1.3 Modélisation de la partie mécanique

La vitesse du moteur et celle des roues sont liées par une transmission soumise à un rapport de réduction K_r :

$$K_r = \frac{\Omega_m}{\Omega_{roue}}$$

La consommation électrique d'un véhicule est due principalement à la résistance de l'air, au frottement des roulements, on peut éventuellement citer d'autres facteurs tels que le chauffage et la climatisation... . La puissance nécessaire pour surmonter les frottements de roulement est une fonction linéaire par rapport à la vitesse alors que celle correspondant à la résistance de l'air croît de manière quadratique par rapport à celle-ci. Les forces appliquées au véhicule sont:

La force roulement:

$$F_{roul} = M \times g \times R_f$$

La force aérodynamique:

$$F_{aero} = 1/2 \times p \times S \times c_x \times V^2$$

La force liée à la pente:

$$F_{pente} = M \times g \times \sin\left(\frac{\pi}{180}\theta\right)$$

La somme des forces est donc:

$$F_{tot} = F_{roul} + F_{aero} + F_{pente}$$

Le couple résistant dû à ces forces est donc:

$$C_{roue} = F_{tot} \times r$$

Ce couple résistant peut être ramené au niveau du moteur avec la formule suivante:

$$C_{résistant} = \frac{C_{roue}}{K_r}$$

Finalement on obtient l'équation suivante:

$$C_{résistant} = \frac{M.g.R_f + 1/2p.S.C_x V^2 + M.g.\sin(\frac{\pi\theta}{180})}{k_r}$$

L'inertie total ramené au moteur est la somme de l'inertie propre du moteur et l'inertie du véhicule ramené au coté moteur:

$$J = J_m + \frac{M.r^2}{K_r^2}$$

L'équation différentielle de la vitesse est de la forme:

$$J \frac{d\Omega_m}{dt} = C_m - C_{résistant}$$

Cette équation est liée à celle du courant par le terme:

$$C_m - C_{résistant}$$

D'où l'équation différentielle de cette partie est donnée en vitesse de rotation du moteur par l'équation suivante:

$$\frac{d\Omega_m(t)}{dt} = 1/J(K_m i_m(t) - \frac{r}{K_r}(MgK_f + 1/2pSC_x \frac{(\Omega_m(t)r}{K_r})^2)) \quad (5.2)$$

Pour connaître la position du véhicule, nous pouvons la déduire de l'équation différentielle suivante:

$$\frac{dpos(t)}{dt} = \frac{\Omega_m(t)}{\times} r K_r \quad (5.3)$$

$V(t) = \frac{3.6 \times r}{K_r} \times \Omega_m(t)$ donne célérité linéaire du véhicule en Km/h .
l'énergie instantanée consommée par le véhicule est de la forme:

$$\frac{dE}{dt} = V_{alim} u(t) i_m(t) + R_{bat} u^2(t) i_m^2(t).$$

$V_m i_m(t)$ est la puissance délivrée par le moteur à laquelle on ajoute l'énergie consommée par la batterie qui vaut $R_{bat} i_{alim}^2$. Ce terme quadratique reflète les pertes dues à la résistance interne de la batterie.

Au cour de déplacement sur le cycle de temps $[0, t_f]$, l'indice de performance est donné par la formule de l'énergie totale consommée suivante:

$$E(t_f, i_m, u) = \int_0^{t_f} (u(t) i_m V_{alim} + R_{bat} u^2(t) i_m^2(t)) dt \quad (5,4)$$

La performance de ce type de véhicule est indissociable des performance des batteries, à cause des exigences de ce mode de locomotion. On peut récupérer l'énergie cinétique au freinage pour recharger la batterie, et pour gérer les surcharges lors des ralentissements et accélérations en ville, on peut adjoindre des condensateurs capables de stocker cette énergie.

Le problème peut être formulé comme un problème du contrôle optimale du véhicule de la manière suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{i_m(t), \Omega(t), pos(t)} E(t_f, i_m, u) \\ sc. \\ \dot{i}_m(t) = \frac{u(t) V_{alim} - R_m i_m(t) - K_m \Omega(t)}{L_m} \\ \dot{\Omega}(t) = 1/J (K_m i_m(t) - \frac{r}{K_r} (MgK_f + 1/2 \rho S C_x (\frac{\Omega(t)r}{K_r})^2)) \\ pos(t) = \frac{\Omega(t)r}{K_r} \\ |i_m(t)| \leq 150 \\ \Omega(t) \leq \frac{K_r}{3.6 \times r} \times V_l \\ u(t) \in [-1, 1] \\ (i_m(0), \Omega(0), pos(0)) = (i_m^0, \Omega^0, pos^0) \in \mathbb{R}^3 \\ (i_m(t_f), \Omega(t_f), pos(t_f)) \in \tau \subseteq \mathbb{R}^3. \end{array} \right.$$

Les variables d'états sont:

i_m : le courant traversant le moteur.

Ω : la vitesse de rotation du moteur.

pos : est la position du véhicule.

Le contrôle u est continu et borné dans $[-1,1]$. Dans ce problème, nous avons des contraintes sur les variables d'état: $|i_m(t)| \leq 150$ afin de limiter le courant dans le moteur pour écarter la possibilité de le détruire, et un déplacement contraintes $\Omega(t) \leq \frac{K_r}{3.6 \times r} \times V_l$, où V_l désigne la vitesse limite autorisée (donnée en Km/h) pour effectuer un trajet. Les autres termes sont des paramètres physiques fixes représentés dans le tableau (5.1).

Paramètre	signification	Valeur
K_r	Rapport de réduction	10
ρ	Densité de l'air	1.293Kg/m^3
C_x	Coefficient aérodynamique	0.4
S	Surface frontale du véhicule	2m^2
r	Rayon de la roue	0.33m
K_f	Coefficient de frottement aux roues	0.03
K_m	Coefficient de couple moteur	0.27
R_m	Résistance de l'induit	0.03 Ohms
L_m	Inductance de l'induit	0.05H
M	Masse du véhicule	250Kg
g	Constante de la gravité	9.81
J	Inertie du moteur	$M \times r^2 / K_r^2$
V_{alim}	Tension alimentation batterie	150volts
R_{bat}	Résistance de la batterie	0.005 Ohms

Ce problème est soumis aux conditions aux limites. Les conditions initiales sont données par le point de départ (i_m^0, Ω^0, pos^0) au temps initial $t_0 = 0$, mais l'ensemble cible τ au temps final t_f est libre et dépend du problème considéré, il pourrait être un point de \mathbb{R}^3 , mais une ou deux variables peuvent ne pas être fixées: par exemple, seulement la position finale égale à 100m est requise.

Le fait que nous ayons des contraintes sur l'état induit beaucoup de difficultés lors de l'utilisation de la méthode indirecte basée sur le PMP qui ne permet pas d'obtenir des solutions (même locale).

L'utilisation de méthode directe génère des problèmes d'optimisation standard, mais de grandes tailles en fonction du pas de discretisation utilisé.

4.1.4 Simulation

Dans notre cas la méthode est évaluée pour un déplacement de 100 mètres, et un cycle de temps $t_f = 10 \text{ secondes}$, avec une initialisation $(i_m(0), \Omega(0), pos(0)) = (0, 0, 0)$, et les conditions finales suivantes: $(i_m(t_f), \Omega(t_f), pos(t_f)) \in T = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times 100$.

Dans cet exemple on ne peut pas appliquer la méthode de tir simple car on a des contraintes sur l'état alors on applique seulement la méthode direct.

4.1.5 Application sur Matlab:

function direct

%discritisation directe(en utilisant fmincon.m)

%du problème de temps minimale

*%imdot=(u(t)*Va-Rm*im(t)-Km*im(t))/Lm*

*%omigadot=1/J(Km*im(t)-r/Kr(M*g*Kf+1/2(p*S*Cx)*(omiga(t)*r/Kr))*(omiga(t)*r/Kr))*

*%posdot(t)=omiga(t)*r/Kr, |u| <= 1, |im(t)| <= 150, |omiga(t)| <= kr/3.6 * r * Vl*

%le problème étant de joindre (0,0,0) a (imf,omigaf,posf)en temps minimal.

clear all; close all; clc;

global tf Kr S Lm Va p r M Cx Kf g Km Rm J Vl Rbat Kr=10; S=2;Lm=0.05;Va=150;

p=1.293;r=0.33;M=250;

Cx=0.4;Kf=0.03;g=9.81;

*Km=0.27;Rm=0.03;J=M*r*r/(Kr*Kr);Vl=50;*

Rbat=0.05;

tf=10;

N=100; %nombre de pas de discritisation

*%uinit= 2*rand(N,1)-1;*

uinit = zeros(N,1);

%point de depart pour fmincon

lb=-ones(N,1); ub=ones(N,1);

%contrainte sur le contrôle |u| <= 1, |im(t)| <= 150,

*%|omiga(t)| <= kr/3.6 * r * Vl*

```

options=optimset('Display','iter','Algorithm','active-set','MaxFunEvals',100000,'FunValCheck',
'on');
[rep,Fval,exitflag]=fmincon(@energie,uinit,[],[],[],[],lb,ub,@cond,options);
exitflag

```

```

im(1)=0; omiga(1)=0; pos(1)=0;
for i=1:N
im(i+1)=im(i)+tf/N*((rep(i)*Va-Rm*im(i)-Km*omiga(i))/Lm);
omiga(i+1)=omiga(i)+tf/N*(1/J*(Km*im(i)-r/Kr*(M*g*Kf+1/2*p*S*Cx*omiga(i)*
r/Kr*omiga(i)*r/Kr)));
vitesse(i+1)=omiga(i+1)*3.6*r/Kr;
pos(i+1)=pos(i)+tf/N*(omiga(i)*r/Kr);
end

```

```

%calcul de la trajectoire optimale
subplot(221); plot(linspace(0,tf,N),im(1:N));
title('Courant:A');grid on;
subplot(222);plot(linspace(0,tf,N),vitesse(1:N)); title('Vitesse: km/h');grid on;
subplot(223); plot(linspace(0,tf,N),pos(1:N)); title('Position: m');grid on;
subplot(224); plot(linspace(0,tf,N),rep(1:N));
title('Contrôle');grid on;
%-----
function [c,ceq]= cond(u)
global tf Kr S Lm Va p r M Cx Kf g Km Rm J Vl Rbat Kr=10; S=2 ;Lm=0.05;Va=150;
p=1.293;r=0.33;M=250;
Cx=0.4;Kf=0.03;g=9.81;
Km=0.27;Rm=0.03;J=M*r*r/(Kr*Kr);Vl=50;Rbat=0.05;
N=length(u);

```

```

im(1)=0; omiga(1)=0; pos(1)=0;
for i=1:N-1
im(i+1)=im(i)+tf/N*((u(i)*Va-Rm*im(i)-Km*omiga(i))/Lm);
omiga(i+1)=omiga(i)+tf/N*(1/J*(Km*im(i)-r/Kr*(M*g*Kf+1/2*p*S*Cx*omiga(i)*

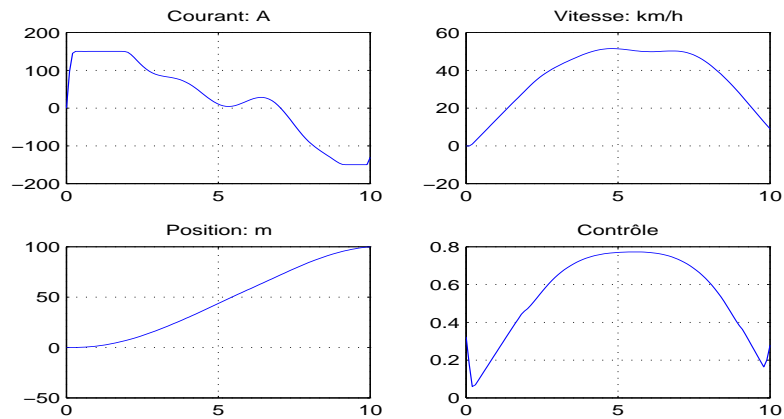
```

```

r/Kr*omiga(i)*r/Kr));
vitesse(i+1)=omiga(i+1)*3.6*r/Kr;
pos(i+1)=pos(i)+tf/N*(omiga(i)*r/Kr);
%calcul de point final au temps
%avec la méthode d'Euler explicite
end
c=abs(im)-150;
%c=[abs(im)-150;vitesse-50];

ceq=pos(end)-100; %on impose posf=100
%ceq=[pos(end)-100;vitesse(end)];
%-----
function val = energie(u)
global tf Kr S Lm Va p r M Cx Kf g Km Rm J Vl Rbat Kr=10; S=2;Lm=0.05;Va=150;
p=1.293;r=0.33;M=250;
Cx=0.4;Kf=0.03;g=9.81;
Km=0.27;Rm=0.03;J=M*r*r/(Kr*Kr);Vl=50;
Rbat=0.05;
N=length(u);
val=0; im=0; omiga=0;
for i=1:N
im=im+tf/N*((u(i)*Va-Rm*im-Km*omiga)/Lm);
omiga=omiga+tf/N*(1/J*(Km*im-r/Kr*(M*g*Kf+1/2*p*S*Cx*omiga*
r/Kr*omiga*r/Kr)));
val=val+tf/N*(u(i)*im*Va+Rbat*u(i)*u(i)*im*im);
end

```



Résultat de la méthode direct

Dans cette figure on a 4 graphes qui sont: le courant, la vitesse, la position et le contrôle.

le courant qui est varié entre -150 et 150.

la vitesse qui est varié entre 0 et 50.

la position est varié de 0 à 100.

le contrôle qui est varié de 0.1 à 0.7.

Conclusion Générale

Dans ce mémoire, nous avons donné quelques méthodes numériques d'intégration des équations différentielles, on a choisi parmi ces méthodes la méthode d'Euler et la méthode de Runge Kutta pour simuler la méthode directe.

Le problème de contrôle optimal, peut être interpréter comme un problème pour lequel on cherche un meilleur départ appartenant à un ensemble redéfini X_0 et une commande u qui nous permet de ramener le système de l'état initial $x(0)$ à l'état final $x(t_f)$.

pour la résolution du problème de contrôl optimal on a étudié deux grandes classes de méthodes: les méthodes directes et méthodes indirectes.

- Les méthodes directes consistent à discrétiser le problème le problème de contrôle (l'état et la commande) pour tout instant et on se ramené à un problème d'optimisation non linéaire, puis le résoudre en se basant par exemple sur les méthodes d'Euler, Runge Kutta..., ces méthodes sont les plus simple à mettre en oeuvre.

- les méthodes indirectes quant à elles, consistent à appliquer le principe du maximum de pontiyagin qui donne les conditions nécessaire d'optimalité du 1^{er} ordre.

Il serait préférable d'opter pour une méthode indirecte:

- Si la dimension d'espace est assez grande.

- Si on a besoin de calculer la trajectoire optimale d'une manière très précise.

- Dans un deuxième temps, après avoir appliqué une méthode directe qui a donné une première approximation de la solution optimale.

Et on termine avec le quatrième chapitre qui concerne l'exemple d'application sur un véhicule électrique qui est résolu avec la méthode direct sur Matlab.

Bibliographie

- [1] Aidene Mohamed, Louadj Kahina, *Un problème de contrôle optimal avec une entrée libre*. Exposé SMAI'2011.
- [2] D.P. Bertsekas and J.Tsitsiklis Parallel and Distributed computation. *Numerical Methods*, Englewood clifs : Prentice Hall. 1989.
- [3] P.Borne,G.Dauphin-Tanguy, J.P Richard, F.Rotella, I.Zambettakis. *Commande et optimisation des processus*. Editions Technip, 1990.
- [4] D.Chazan and Miranker D.Chazan and Miranker. *Chaoric Relaxation*.Linear Algebra Appl, 2, pp 199- 222. 1969.
- [5] M.Crouzeix, A.L Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles*. 2^{ème} Edition Masson. 1989.
- [6] Jean-Pierre Denailly. *Analyse numérique et équations différentielles*. EDP Sciences. 2006.
- [7] B.Lang, P.Spiteri. *Application des méthodes de relaxation à la résolution de problèmes multicritères. Commandes optimales de systèmes complexes*. 1983.
- [8] Louadj Kahina, Aidene Mohamed, **Spiteri Pierre, Messine Frederic**. *Résolution d'un problème de contrôle optimale avec la méthode de relaxation*. ISOR'11. 2011.

- [9] E. Trélat, *Contrôle optimal: théorie et applications*, Vuibert, Collection "Mathématiques Concrètes", 2005.

^