République Algérienne Démocratique et Populaire.
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.
Université de Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou

Faculté des Sciences
Département des Mathématiques

Mémoire de Master II
Spécialité
MATHÉMATIQUES
Option
Modélisation mathématique

Thème

Conditions aux limites approchées pour un problème de couche mince

Réalisé par :

Mokhtari Hanifa

Dirigé par :

M^{me} **RAHMANI Leila**

Devant le jury d'examen composé de :

M^r. MORSLI Mohamed	Professeur	UMMTO	Président
M^{me}. RAHMANI Leila	Maître de conférences B	UMMTO	Rapporteur
M^{me}. SMAALI Mannal	Maître de conférence A	UMMTO	Examinateur

Soutenu le 08 / 10 / 2014

Remerciements

Nous remercions, avant tout, le bon Dieu de nous avoir donné le courage et la volonté, pour l'élaboration de ce modeste travail.

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude et nos sincères remerciements à notre chère promotrice, Madame ***Rahmani. L*** *qui nous a fait l'honneur de diriger ce travail, sa gentillesse et ses précieux conseils furent d'un apport considérable.*

Nos vifs remerciements vont également au président ainsi qu'aux membres de jury pour l'honneur qu'ils nous font de juger ce travail.

Nous remercions tous les enseignants ayant contribué à notre formation de près ou de loin.

Sans oublier de remercier tous les amis (es) et camarades, pour leurs soutiens et leurs encouragements.

Merci infiniment à tous.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

Aux deux être les plus chers au monde, ma mère et mon père, source de tendresse et sacrifice, qui m'ont soutenue depuis l'enfance à suivre le chemin du savoir, que Dieu les protège ;
A mon très cher et unique frère Yacine ;
A mes très chères sœurs : Anissa, Safia, Kahina et son époux Hocine ;
A ma très chère nièce Loubna ;
A ma grand-mère ;
A ma très chère amie Kahina à qui je souhaite la réussite dans la vie et à toute sa famille ;
A mes très chères amies avec lesquelles je garde les meilleurs souvenirs de ma vie : Soraya, Lynda, Dyhia ;
A mes amis : Merzouk, Youcef ;
A tous ceux ou celles qui ont participés de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail ;
A toute la promotion 2013/2014 ;
A ceux que j'aime et m'aiment.

Hanifa

Table des matières

Introduction générale

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'analyse asymptotique d'un problème aux limites posé sur un domaine avec une couche mince d'épaisseur ε, ε étant un paramètre positif destiné à tendre vers 0. Cette étude est motivée par les difficultés rencontrées lors de la simulation numérique de la solution par la méthode des éléments finis : La présence de la couche mince nécessite un maillage très fin, ce qui entraîne des contraintes de coût qui dégradent l'efficacité de la méthode. Pour contourner ces difficultés, l'alternative consiste à chercher un problème approché qui ne fait pas intervenir la couche mince, mais dont la solution est "proche" (quand ε est voisin de 0) de la solution du problème initial. Le problème approché doit être assez riche pour pouvoir rendre compte de l'effet de la couche mince.
L'analyse asymptotique, basée sur la construction d'un développement asymptotique de la solution par rapport au petit paramètre ε, permet d'identifier des problèmes approchés à différents ordres et de les analyser avec précision. L'effet de la couche mince sera remplacé par de nouvelles conditions aux limites, dite "conditions aux limites approchés".
L'étude que nous proposons comporte deux parties : la première est consacrée à l'étude d'un problème de transmission en dimension 1. Ce problème est régi par le Laplacien posé sur un domaine avec couche mince, auquel on ajoute des conditions de transmission et aux limites (Dirichlet ou Neumann). Physiquement, il correspond au problème stationnaire de diffusion de la chaleur dans une tige hétérogène comportant une couche mince. Dans les deux cas (Dirichlet ou Neumann), des modèles approchés sont identifiés et une analyse d'erreur est donnée. La deuxième partie consiste en la généralisation de cette étude à la dimension 2 : Un problème bidimensionnel correspondant à la propagation de la chaleur dans une plaque comportant une couche mince est étudié. Cette étude est présentée dans le papier [Vial].

Chapitre 1

Problème de transmission en dimension 1

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude d'un problème de transmission en dimension 1. Ce problème correspond physiquement à un problème stationnaire de diffusion de la chaleur dans une tige hétérogène comportant une couche mince. En écrivant un développement asymptotique de la solution, qu'on justifie avec une estimation d'erreur, on identifie des conditions aux limites approchées qui modélisent l'effet de la couche mince. L'analyse asymptotique permet d'avoir des estimations d'erreur optimales entre la solution exacte et la solution du problème initial.

1.1 Formulation du problème

Soit $\Omega^\varepsilon = \Omega_+ \cup \Omega_-^\varepsilon$ un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}$, avec $\Omega_+ =]0,1[$ et $\Omega_-^\varepsilon =]1, 1+\varepsilon[$. Soit ε un paramètre destiné à tendre vers zéro, et qui décrit l'épaisseur de la couche mince (voir Fig. 1.1 - Le problème de couche mince en dimension 1).
Nous considérons le problème de transmission suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_+ + k_+^2 u_+ & = & f & \textit{dans } \ \Omega_+, \\ \\ -\Delta u_- + k_-^2 u_- & = & 0 & \textit{dans } \ \Omega_-^\varepsilon, \\ u_+(1) & = & u_-(1) & \textit{pour } \ x=1, \\ u_+'(1) & = & u_-'(1) & \textit{pour } \ x=1, \\ u_+(0) & = & u_-(1+\varepsilon)=0 & \textit{pour } \ x=0, \quad (\textit{Dirichlet}) \\ & \boldsymbol{ou} & & \\ u_+'(0) & = & u_-'(1+\varepsilon)=0 & \textit{pour } \ x=0, \quad (\textit{Neumann}) \end{cases} \tag{1.1}$$

où k est une constante strictement positive.

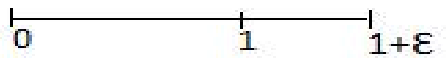

FIG. 1.1 - Le problème de couche mince en dimension 1

1.2 Formulation variationnelle du problème (1.1)

On multiplie les deux premières équations du problème (1.1) par une fonction test v avec : $v = v_+$ sur Ω_+, $v = v_-$ sur Ω_-^ε, et on intègre sur Ω^ε. On obtient alors :

$$\int_{\Omega_+} -\Delta u_+ v_+ dx + k_+^2 \int_{\Omega_+} u_+ v_+ dx - \int_{\Omega_-^\varepsilon} \Delta u_- v_- dx + k_-^2 \int_{\Omega_-^\varepsilon} u_- v_- dx = \int_{\Omega^\varepsilon} f\, v\, dx.$$

En utilisant la formule de Green (formule d'intégration par parties), on obtient :

$$\int_{\Omega_+} \nabla u_+ \nabla v_+ dx + \int_{\Omega_-^\varepsilon} \nabla u_- \nabla v_- dx + k_+^2 \int_{\Omega_+} u_+ v_+ dx + k_-^2 \int_{\Omega_-^\varepsilon} u_- v_- dx = \int_{\Omega^\varepsilon} f\, v\, dx.$$

La formulation variationnelle associée au problème (1.2), est donnée par :

$$\begin{cases} Trouver\ \ u \in V, \\ a\,(u, v) = l\,(v)\,,\ \ \forall\, v \in V, \end{cases} \tag{1.2}$$

avec

$$a\,(u, v) = \int_{\Omega^+} \nabla u_+ \nabla v_+ dx + \int_{\Omega_-^\varepsilon} \nabla u_- \nabla v_- dx + k_+^2 \int_{\Omega_+} u_+ v_+ dx + k_-^2 \int_{\Omega_-^\varepsilon} u_- v_- dx,$$

et

$$l\,(v) = \int_{\Omega^\varepsilon} f\, v\, dx,$$

où $V = H_0^1(\Omega^\varepsilon)$ dans le cas Dirichlet et $V = H^1(\Omega^\varepsilon)$ dans le cas Neumann.

1.3 Existence et unicité de la solution

Pour pouvoir appliquer le théorème de Lax-Milgram il faut vérifier :

1. La continuité de la forme linéaire l ***:***

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient :

$$|\, l\,(v)\,| \leq \|\, f\,\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\,\|\, v\,\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\,,$$

d'où la continuité de l sur V.

2. La continuité de la forme bilinéaire a ***:***

$$\begin{aligned}
|\, a\,(u,v)\,| &\leq \|\, \nabla u_+\,\|_{L^2(\Omega_+)}\,\|\, \nabla v_+\,\|_{L^2(\Omega_+)} + k_+^2\,\|\, u_+\,\|_{L^2(\Omega_+)}\,\|\, v_+\,\|_{L^2(\Omega_+)}\\
&\quad + \|\, \nabla u_-\,\|_{L^2\left(\Omega_-^\varepsilon\right)}\,\|\, \nabla v_-\,\|_{L^2\left(\Omega_-^\varepsilon\right)} + k_-^2\,\|\, u_-\,\|_{L^2\left(\Omega_-^\varepsilon\right)}\,\|\, v_-\,\|_{L^2\left(\Omega_-^\varepsilon\right)}\\
&\leq 2C_1\,\|\, u_+\,\|_{H^1(\Omega_+)}\,\|\, v_+\,\|_{H^1(\Omega_+)} + 2C_2\,\|\, u_-\,\|_{H^1\left(\Omega_-^\varepsilon\right)}\,\|\, v_-\,\|_{H^1\left(\Omega_-^\varepsilon\right)}\\
&\leq C\left(\|\, u_+\,\|_{H^1(\Omega_+)} + \|\, u_-\,\|_{H^1\left(\Omega_-^\varepsilon\right)}\right)\left(\|\, v_+\,\|_{H^1(\Omega_+)} + \|\, v_-\,\|_{H^1\left(\Omega_-^\varepsilon\right)}\right)\\
&\leq C\,\|\, u\,\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\,\|\, v\,\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}
\end{aligned}$$

avec $C_1 = \max\left(1, k_+^2\right)$, $C_2 = \max\left(1, k_-^2\right)$ et $C = 2\max\left(C_1, C_2\right)$.

3. La coercivité de la forme bilinéaire a ***:***

On a :

$$\begin{aligned}
a\,(u,u) &= \|\, \nabla u_+\,\|_{L^2(\Omega_+)}^2 + k_+^2\,\|\, u_+\,\|_{L^2(\Omega_+)}^2 + \|\, \nabla u_-\,\|_{L^2\left(\Omega_-^\varepsilon\right)}^2 + k_-^2\,\|\, u_-\,\|_{L^2\left(\Omega_-^\varepsilon\right)}^2\\
&\geq C\left[\|\, \nabla u_+\,\|_{L^2(\Omega_+)}^2 + \|\, u_+\,\|_{L^2(\Omega_+)}^2 + \|\, \nabla u_-\,\|_{L^2\left(\Omega_-^\varepsilon\right)}^2 + \|\, u_-\,\|_{L^2\left(\Omega_-^\varepsilon\right)}^2\right]\\
&= C\left[\|\, u_+\,\|_{H^1(\Omega_+)}^2 + \|\, u_-\,\|_{H^1\left(\Omega_-^\varepsilon\right)}^2\right]\\
&= C\,\|\, u\,\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}^2
\end{aligned}$$

avec $C = \min\left(1, k_+^2, k_-^2\right)$.

Alors, le théorème de Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité de la solution du problème (1.1). $\blacksquare$

1.4 Développement asymptotique de la solution

Dans cette section, nous écrivons un développement asymptotique de la solution u par rapport au petit paramètre ε. Comme le domaine Ω^ε dépend de ε, on se ramène par un changement d'échelle à un problème posé sur le domaine fixe $\Omega =]0, 2[$.

Pour ce faire, considérons la fonction u^ε définie par :

$$u^\varepsilon(x) = \begin{cases} u(x) & \textit{si } \ 0 \leq x \leq 1 \\ u(1+\varepsilon(x-1)) & \textit{si } \ 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \tag{1.3}$$

Les équations du problème (1.1) deviennent alors :

$$\begin{cases} -\Delta u_+^\varepsilon + k_+^2 u_+^\varepsilon & = & f & \textit{dans } \ \Omega_+, & \\ -\dfrac{1}{\varepsilon^2}\Delta u_-^\varepsilon + k_-^2 u_-^\varepsilon & = & 0 & \textit{dans } \ \Omega_-, & \\ u_+^\varepsilon(1) & = & u_-^\varepsilon(1) & \textit{pour } \ x=1, & \\ \varepsilon u_+'^\varepsilon(1) & = & u_-'^\varepsilon(1) & \textit{pour } \ x=1, & \\ u_+^\varepsilon(0) & = & u_-(2)=0 & \textit{pour } \ x=0, & (\textit{Dirichlet}) \\ & \boldsymbol{ou} & & & \\ u_+'^\varepsilon(0) & = & u_-'^\varepsilon(2)=0 & \textit{pour } \ x=0. & (\textit{Neumann}) \end{cases} \tag{1.4}$$

Le problème (1.4) est posé dans l'ouvert $\Omega = [0,2]$.
Les développements asymptotiques de u_+^ε et u_-^ε s'écrivent :

$$\begin{cases} u_+^\varepsilon & = & u_+^0 + \varepsilon u_+^1 + \varepsilon^2 u_+^2 + \cdots \\ u_-^\varepsilon & = & u_-^0 + \varepsilon u_-^1 + \varepsilon^2 u_-^2 + \cdots \end{cases} \tag{1.5}$$

En injectant (1.5) dans la première équation du (1.4), on obtient :

$$-\Delta\left(u_+^0 + \varepsilon u_+^1 + \varepsilon^2 u_+^2 + \cdots\right) + k_+^2\left(u_+^0 + \varepsilon u_+^1 + \varepsilon^2 u_+^2 + \cdots\right) = f,$$

et en les regroupant en fonction des puissances successives de ε, on obtient :

$$\left(-\Delta u_+^0 + k_+^2 u_+^0\right) + \varepsilon\left(-\Delta u_+^1 + k_+^2 u_+^1\right) + \varepsilon^2\left(-\Delta u_+^2 + k_+^2 u_+^2\right) + \cdots = f.$$

En identifiant les puissances successives de ε, on obtient les équations suivantes :

$$\begin{cases} -\Delta u_+^0 + k_+^2 u_+^0 & = & f & \textit{dans } \ \Omega_+, \\ -\Delta u_+^n + k_+^2 u_+^n & = & 0 & \textit{pour } \ n \geq 1. \end{cases} \tag{1.6}$$

En injectant (1.5) dans la deuxième équation du (1.4), on obtient :

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\Delta\left(u_-^0 + \varepsilon u_-^1 + \varepsilon^2 u_-^2 + \cdots\right) + k_-^2\left(u_-^0 + \varepsilon u_-^1 + \varepsilon^2 u_-^2 + \cdots\right) = 0,$$

et en les regroupant en fonction des puissances successives de ε, on obtient :

$$-\varepsilon^{-2}\Delta u_-^0 - \varepsilon^{-1}\Delta u_-^1 + \left(-\Delta u_-^2 + k_-^2 u_-^0\right) + \varepsilon\left(-\Delta u_-^3 + k_-^2 u_-^1\right) + \cdots = 0.$$

En identifiant les puissances successives de ε à 0, on obtient les équations suivantes :

$$\begin{cases} -\Delta u_-^0 & = & 0, \\ -\Delta u_-^1 & = & 0, \\ -\Delta u_-^n + k_-^2 u_-^{n-2} & = & 0 \quad \textit{pour} \;\; n \geq 2. \end{cases} \tag{1.7}$$

De la même manière, en remplaçant (1.5) dans les conditions de transmission et aux limites de (1.4), on obtient :

$$\begin{cases} u_+^n(1) & = & u_-^n(1) & \textit{pour} \;\; n \geq 0, \\ u_-'^n(1) & = & u_+'^{n-1}(1) & \textit{pour} \;\; n \geq 1, \\ u_-'^0(1) & = & 0, & \\ u_+^n(0) & = & u_-^n(2), & (\textit{Dirichlet}) \\ & \boldsymbol{ou} & & \\ u_+'^n(0) & = & u_-'^n(2). & (\textit{Neumann}) \end{cases} \tag{1.8}$$

Dans ce qui suit, on va étudier les problèmes de Dirichlet et Neumann séparément, étant donné qu'ils présentent quelques différences.

1.4.1 Problème de Dirichlet

A l'ordre 0 :

<u>*A l'extérieur*</u> : le terme extérieur u_-^0 résout le problème mixte suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_-^0 & = & 0 & \textit{dans} \;\; \Omega_-, \\ u_-'^0(1) & = & 0 & \textit{pour} \;\; x = 1, \\ u_-^0(2) & = & 0 & \textit{pour} \;\; x = 2. \end{cases} \tag{1.9}$$

Comme on est en dimension 1, la première équation de (1.9) équivaut à :

$$-u_-''^0(x) = 0,$$

qui est une équation différentielle du deuxième ordre, dont la solution est :

$$u_-^0(x) = Ax + B,$$

où A et B sont des constantes arbitraires.

Pour déterminer A et B, on utilise les conditions aux limites $u'^{0}_{-}(1) = 0$ et $u^{0}_{-}(2) = 0$, ce qui donne :

$$u^{0}_{-}(x) = 0.$$

<u>*A l'intérieur*</u> : on a le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u^{0}_{+} + k_{+}^{2} u^{0}_{+} & = & f & \textit{dans } \ \Omega_{+}, \\ u^{0}_{+}(1) & = & u^{0}_{-}(1) & \textit{pour } \ x = 1, \\ u^{0}_{+}(0) & = & 0 & \textit{pour } \ x = 0. \end{cases}$$

Comme $u^{0}_{+}(1) = u^{0}_{-}(1) = 0$, on aura le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u^{0}_{+} + k_{+}^{2} u^{0}_{+} & = & f & \textit{dans } \ \Omega_{+}, \\ u^{0}_{+}(1) & = & 0 & \textit{pour } \ x = 1, \\ u^{0}_{+}(0) & = & 0 & \textit{pour } \ x = 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

A l'ordre 1 :

<u>*A l'extérieur*</u> : on a le problème mixte suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u^{1}_{-} & = & 0 & \textit{dans } \ \Omega_{-}, \\ u'^{1}_{-}(1) & = & u'^{0}_{+}(1) & \textit{pour } \ x = 1, \\ u^{1}_{-}(2) & = & 0 & \textit{pour } \ x = 2. \end{cases} \tag{1.11}$$

La résolution de (1.11) donne :

$$u^{1}_{-}(x) = \alpha (x - 2), \quad \textit{o}\text{ù} \quad \alpha = u'^{0}_{+}(1).$$

<u>*A l'intérieur*</u> : le terme intérieur u^{1}_{+} résout le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u^{1}_{+} + k_{+}^{2} u^{1}_{+} & = & 0 & \textit{dans } \ \Omega_{-}, \\ u^{1}_{+}(1) & = & u^{1}_{-}(1) & \textit{pour } \ x = 1, \\ u^{1}_{+}(0) & = & 0 & \textit{pour } \ x = 0. \end{cases}$$

Comme $u^{1}_{+}(1) = u^{1}_{-}(1) = -\alpha$, on obtient :

$$\begin{cases} -\Delta u^{1}_{+} + k_{+}^{2} u^{1}_{+} & = & 0 & \textit{dans } \ \Omega_{-}, \\ u^{1}_{+}(1) & = & -\alpha & \textit{pour } \ x = 1, \\ u^{1}_{+}(0) & = & 0 & \textit{pour } \ x = 0. \end{cases} \tag{1.12}$$

La résolution de la première équation de (1.12) (qui équivaut à $-u''^{1}_{+} + k_{+}^{2} u^{1}_{+} = 0$) donne :

$$u_+^1(x) = Ae^{k_+ x} + Be^{-k_+ x},$$

où A et B sont des constantes arbitraires.
Les conditions aux limites associées permettent de déterminer A et B. On obtient alors :

$$u_+^1(x) = \frac{-\alpha}{e^{k_+} - e^{-k_+}} \left(e^{k_+ x} - e^{-k_+ x}\right).$$

A l'ordre 2 :

<u>*A l'extérieur*</u> : on a le problème mixte suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_-^2 &= 0 & \textit{dans } \Omega_-, \\ u_-'^2(1) &= u_+'^1(1) = \dfrac{-\alpha k_+}{e^{k_+} - e^{-k_+}} \left(e^{k_+} + e^{-k_+}\right) & \textit{pour } x = 1, \\ u_-^2(2) &= 0 & \textit{pour } x = 2. \end{cases} \tag{1.13}$$

La résolution de la première équation de (1.13) donne :

$$u_-^2(x) = Ax + B,$$

où A et B sont des constantes arbitraires.
Les conditions aux limites associées permettent de déterminer A et B, ce qui donne l'expression de u_-^2 :

$$u_-^2(x) = \frac{-\alpha k_+ (x-2)}{e^{k_+} - e^{-k_+}} \left(e^{k_+} + e^{-k_+}\right).$$

<u>*A l'intérieur*</u> : on a le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_+^2 + k_+^2 u_+^2 &= 0 & \textit{dans } \Omega_+, \\ u_+^2(1) &= u_-^2(1) & \textit{pour } x = 1, \\ u_+^2(0) &= 0 & \textit{pour } x = 0, \end{cases} \tag{1.14}$$

comme $u_-^2(1) = \dfrac{\alpha k_+}{e^{k_+} - e^{-k_+}} \left(e^{k_+} + e^{-k_+}\right)$, on obtient :

$$\begin{cases} -\Delta u_+^2 + k_+^2 u_+^2 &= 0 & \textit{dans } \Omega_+, \\ u_+^2(1) &= \dfrac{\alpha k_+}{e^{k_+} - e^{-k_+}} \left(e^{k_+} + e^{-k_+}\right) & \textit{pour } x = 1, \\ u_+^2(0) &= 0 & \textit{pour } x = 0. \end{cases} \tag{1.15}$$

La résolution de ce système donne :

$$u_+^2(x) = \frac{\alpha k_+ \left(e^{k_+} + e^{-k_+}\right)}{e^{k_+} - e^{-k_+}} \left(e^{k_+ x} - e^{-k_+ x}\right).$$

Remarque 1.1. Les autres termes peuvent être calculés de la même manière que précédemment.

1.4.2 Problème de Neumann

A l'ordre 0 :

A l'extérieur : on a le problème de Neumann suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_-^0 & = & 0 & dans \;\; \Omega_-, \\ u_-^{\prime 0}(1) & = & 0 & pour \;\; x=1, \\ u_-^{\prime 0}(2) & = & 0 & pour \;\; x=2. \end{cases} \tag{1.16}$$

La résolution de ce système montre que $u_-^0 = c^{ste} = a_0$.
A l'intérieur : on a le problème mixte suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_+^0 + k_+^2 u_+^0 & = & f & dans \;\; \Omega_+, \\ u_+^0(1) & = & u_-^0(1) & pour \;\; x=1, \\ u_+^{\prime 0}(0) & = & 0 & pour \;\; x=2, \end{cases} \tag{1.17}$$

comme $u_-^0(1) = a_0$, (1.17) devient :

$$\begin{cases} -\Delta u_+^0 + k_+^2 u_+^0 & = & f & dans \;\; \Omega_+, \\ u_+^0(1) & = & a_0 & pour \;\; x=1, \\ u_+^{\prime 0}(0) & = & 0 & pour \;\; x=0. \end{cases} \tag{1.18}$$

A l'ordre 1 :

A l'extérieur : on a le problème de Neumann suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_-^1 & = & 0 & dans \;\; \Omega_-, \\ u_-^{\prime 1}(1) & = & u_+^{\prime 0}(1) & pour \;\; x=1, \\ u_-^{\prime 1}(2) & = & 0 & pour \;\; x=2. \end{cases} \tag{1.19}$$

La résolution de (1.19) donne :

$$u_-^1(x) = a_1, \quad où \quad a_1 = u_+^{\prime 0}(1).$$

Mais, pour que (1.19) soit résoluble, il faut que $u_+^{\prime 0}(1) = 0$.
A l'intérieur : le terme intérieur u_+^1 résout le problème mixte suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_+^1 + k_+^2 u_+^1 & = & 0 & dans \;\; \Omega_+, \\ u_+^1(1) & = & u_-^1(1) & pour \;\; x=1, \\ u_+^{\prime 1}(0) & = & 0 & pour \;\; x=0. \end{cases} \tag{1.20}$$

Comme $u_-^1 = a_1$, on obtient :

$$\begin{cases} -\Delta u_+^1 + k_+^2 u_+^1 & = & 0 & dans \;\; \Omega_+, \\ u_+^1(1) & = & a_1 & pour \;\; x=1, \\ u_+'^1(0) & = & 0 & pour \;\; x=0. \end{cases} \tag{1.21}$$

La résolution de la première équation de (1.21) (qui équivaut à $u_+''^1 + k_+^2 u_+^1 = 0$), donne :

$$u_+^1(x) = Ae^{k_+ x} + Be^{-k_+ x},$$

où A et B sont des constantes arbitraires.
Les conditions aux limites associées permettent de déterminer A et B. On obtient alors :

$$u_+^1(x) = \frac{a_1}{e^{k_+} + e^{-k_+}} \left(e^{k_+ x} + e^{-k_+ x}\right).$$

A l'ordre 2

A l'extérieur : on a le problème de Neumann suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_-^2 + k_-^2 a_0 & = & 0 & dans \;\; \Omega_+, \\ u_-'^2(1) = u_+'^1(1) & = & \dfrac{a_1 k_+}{e^{k_+} + e^{-k_+}} \left(e^{k_+} - e^{-k_+}\right) & pour \;\; x=1, \\ u_-'^2(2) & = & 0 & pour \;\; x=2. \end{cases} \tag{1.22}$$

On a :

$$u_-''^2 = k_-^2 a_0,$$

on intègre cette dernière quantité sur l'intervalle $[2, x]$, on obtient :

$$\int_2^x u_-''^2(t)\, dt = \int_2^x k_-^2 a_0 dt.$$

Il s'ensuit que :

$$u_-'^2(x) - u_-'^2(2) = k_-^2 a_0 (x-2),$$

comme $u_-'^2(2) = 0$, alors on obtient :

$$u_-'^2(x) = k_-^2 a_0 (x-2).$$

On intègre cette dernière quantité sur l'intervalle $[1, x]$, on obtient :

$$\int_1^x u_-'^2(t)\, dt = \int_1^x k_-^2 a_0 (t-2)\, dt.$$

Il s'ensuit que :

$$u_-^2(x) - u_-^2(1) = k_-^2 a_0 \frac{(x-2)^2}{2}.$$

En posant $u_-^2(1) = a_2$, on obtient :

$$u_-^2(x) = k_-^2 a_0 \frac{(x-2)^2}{2} + a_2.$$

<u>A l'intérieur</u> : on a le problème mixte suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_+^2 + k_+^2 u_+^2 & = & 0 & \textit{dans} \;\; \Omega_+, \\ u_+^2(1) & = & u_-^2(1) & \textit{pour} \;\; x = 1, \\ u_+'^2(0) & = & 0 & \textit{pour} \;\; x = 0. \end{cases} \tag{1.23}$$

Comme $u_+^2(1) = u_-^2(1) = \frac{1}{2} k_-^2 a_0 + a_2$, on obtient :

$$\begin{cases} -\Delta u_+^2 + k_+^2 u_+^2 & = & 0 & \textit{dans} \;\; \Omega_+, \\ u_+^2(1) & = & \frac{1}{2} k_-^2 a_0 + a_2 & \textit{pour} \;\; x = 1, \\ u_+'^2(0) & = & 0 & \textit{pour} \;\; x = 0. \end{cases} \tag{1.24}$$

La résolution de (1.24) donne :

$$u_+^2(x) = \frac{k_-^2 a_0 + a_2}{2\left(e^{k_+} + e^{-k_+}\right)} \left(e^{k_+ x} + e^{-k_+ x}\right).$$

1.5 Estimation d'erreur du développement asymptotique

Dans tout ce qui va suivre, nous convenons de noter par $u^{[n]}$ le développement asymptotique tronqué à l'ordre n, ie :

$$u^{[n]} = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i u^i.$$

Nous rappelons la notion de convergence au sens des développements asymptotiques :

Définition 1.1. *Soit V un espace vectoriel normé. On dit que $u^{[n]} \in V$ converge vers $u \in V$ au sens des développements asymptotiques quand ε tend vers 0 si et seulement si*

$$\exists\, n_0 > 0,\ \forall\ n \geq n_0,\ \exists\, C_n > 0,\ \varepsilon_0 > 0,\ \forall\, \varepsilon < \varepsilon_0, \quad \left\| u - u^{[n]} \right\|_V \leq C_n \varepsilon^{n-n_0}.$$

Le théorème qui suit montre la convergence du développement asymptotique construit au paragraphe précédent.

Théorème 1.1. *Le développement asymptotique* $u^{[n]}$ *converge au sens des développements asymptotiques vers la solution du problème (1.1).*

Preuve. *Condition de Dirichlet :*

Notons $v^n = u - u^{[n]}$.

En injectant $v_+^n = u_+ - u_+^{[n]}$ dans la première équation du (1.4), et en regroupant les termes en fonction des puissances successives de ε, on obtient :

$$\begin{aligned}-\Delta v_+^n + k_+^2 v_+^n = f &- \left(-\Delta u_+^0 + k_+^2 u_+^0\right) + \varepsilon\left(-\Delta u_+^1 + k_+^2 u_+^1\right) + \varepsilon^2\left(-\Delta u_+^2 + k_+^2 u_+^2\right)\\ &+ \cdots + \varepsilon^{n-1}\left(-\Delta u_+^{n-1} + k_+^2 u_+^{n-1}\right) + \varepsilon^n\left(-\Delta u_+^n + k_+^2 u_+^n\right),\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$-\Delta v_+^n + k_+^2 v_+^n = 0.$$

De même, en injectant $v_-^n = u_- - u_-^{[n]}$ dans la deuxième équation du (1.4), on obtient :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\varepsilon}\Delta v_-^n + \varepsilon k_-^2 v_-^n &= \frac{1}{\varepsilon}\left(-\Delta u + \Delta u_-^0\right) + \Delta u_-^1 + \varepsilon\left(\Delta u_-^2 + k_-^2 u_- - k_-^2 u_-^0\right)\\ &+ \varepsilon^2\left(\Delta u_-^3 - k_-^2 u_-^1\right) + \cdots + \varepsilon^{n-1}\left(\Delta u_-^n - k_-^2 u_-^{n-2}\right) - \varepsilon^n k_-^2 u_-^{n-1} - \varepsilon^{n+1} k_-^2 u_-^n\\ &= \left(-\frac{1}{\varepsilon}\Delta u_- + \varepsilon k_-^2 u_-\right) + \frac{1}{\varepsilon}\Delta u_-^0 + \Delta u_-^1 + \varepsilon\left(\Delta u_-^2 - k_-^2 u_-^0\right)\\ &+ \varepsilon^2\left(\Delta u_-^3 - k_-^2 u_-^1\right) + \cdots + \varepsilon^{n-1}\left(\Delta u_-^n - k_-^2 u_-^{n-2}\right) - \varepsilon^n k_-^2 u_-^{n-1} - \varepsilon^{n+1} k_-^2 u_-^n,\end{aligned}$$

en vertu des équations (1.7), on obtient :

$$-\frac{1}{\varepsilon}\Delta v_-^n + \varepsilon k_-^2 v_-^n = -\varepsilon^n k_-^2 u_-^{n-1} - \varepsilon^{n+1} k_-^2 u_-^n.$$

De la même manière, les conditions de transmission et aux limites satisfaites par v_+^n sont :

$$\begin{cases} v_+^n(0) &= & v_-^n(2) = 0, & \\ v_+^n(1) &= & v_-^n(1), & (Dirichlet)\\ & \boldsymbol{ou} & & \\ v_+'^n(1) &= & \dfrac{1}{\varepsilon} v_-'^n(1) + \varepsilon u_-'^n(1), & (Neumann)\end{cases}$$

si bien que v_+^n est solution du problème aux limites :

$$
\begin{cases}
-\Delta v_+^n + k_+^2 v_+^n & = & 0 & dans\ \ \Omega_+, \\
-\dfrac{1}{\varepsilon}\Delta v_-^n + \varepsilon k_-^2 v_-^n & = & g\left(x\right) & dans\ \ \Omega_-, \\
v_+^n\left(0\right) & = & v_-^n\left(2\right) = 0, & \\
v_+^n\left(1\right) & = & v_-^n\left(1\right), & (Dirichlet) \\
& \boldsymbol{ou} & & \\
v_+^{\prime n}\left(1\right) & = & \dfrac{1}{\varepsilon} v_-^{\prime n}\left(1\right) + h\left(1\right), & (Neumann)
\end{cases}
\tag{1.25}
$$

avec $g\left(x\right) = -\varepsilon^n k_-^2 u_-^{n-1} - \varepsilon^{n+1} k_-^2 u_-^n$ et $h\left(1\right) = \varepsilon^n u_-^{\prime n}\left(1\right).$

Nous allons maintenant écrire le problème (1.25) sous forme variationnelle . Pour cela, nous considérons l'espace fonctionnel :

$$V = \left\{\left(w_+, w_-\right) \in H^1\left(\Omega_+\right) \times H^1\left(\Omega_-\right) / w_+\left(1\right) = w_-\left(1\right)\ \ et\ \ w_+\left(0\right) = w_-\left(2\right) = 0\right\}.$$

Soit $w = \left(w_+, w_-\right) \in V$. En multipliant la première équation de (1.25) par w_+ et la deuxième par w_-, en intégrant sur Ω_+ et Ω_-, respectivement, on obtient (en les sommant) :

$$\int_{\Omega_+} \left(-\Delta v_+^n + k_+^2 v_+^n\right) w_+ dx + \int_{\Omega_+} \frac{-1}{\varepsilon}\left(\Delta v_-^n + \varepsilon k_-^2 v_-^n\right) w_- dx = \int_{\Omega_-} g(x) w_- dx,$$

une intégration par parties sur l'intervalle $[0, 2]$, nous donne :

$$\int_0^1 \left(v_+^{\prime n} w_+^{\prime} + k_+^2 v_+^n w_+\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{\varepsilon} v_-^{\prime n} w_-^{\prime} + \varepsilon k_-^2 v_-^n w_-\right) dx = h\left(1\right) w_+\left(1\right) + \int_{\Omega_-} g\left(x\right) w_- dx.$$

La formulation variationnelle associée au problème (1.25) est alors donnée par :

$$
\begin{cases}
Trouver \quad v \in V, \\
a\left(v, w\right) = l\left(w\right), \quad \forall\, w \in V
\end{cases}
\tag{1.26}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
a\left(v, w\right) &= a_+\left(v_+^n, w_+\right) + a_-^{\varepsilon}\left(v_-^n, w_-\right) \\
&= \int_0^1 \left(v_+^{\prime n} w_+^{\prime} + k_+^2 v_+^n w_+\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{\varepsilon} v_-^{\prime n} w_-^{\prime} + \varepsilon k_-^2 v_-^n w_-\right) dx,
\end{aligned}
$$

et

$$l\left(v\right) = h\left(1\right) w_+\left(1\right) + \int_{\Omega_-} g\left(x\right) w_- dx.$$

Nous allons maintenant déduire l'estimation d'erreur qui permettra de montrer la convergence du développement.

Dans la formulation variationnelle, on pose $w_+ = v_+^n$, on aura alors :

$$a_+\left(v_+^n, v_+^n\right) = \left\| v_+'^n \right\|_{L^2(\Omega_+)}^2 + k_+^2 \left\| v_+^n \right\|_{L^2(\Omega_+)}^2,$$

donc

$$a_+\left(v_+^n, v_+^n\right) \geq C \left\| v_+^n \right\|_{H^1(\Omega_+)}^2,$$

et

$$a_-^{\varepsilon}\left(v_-^n, v_-^n\right) = \frac{1}{\varepsilon} \left\| v_-'^n \right\|_{L^2(\Omega_-)}^2 + \varepsilon k_-^2 \left\| v_-^n \right\|_{L^2(\Omega_-)}^2,$$

comme $\varepsilon k_-^2 \left\| v_-^n \right\|_{L^2(\Omega_-)}^2 \geq 0$ et $\dfrac{1}{\varepsilon} > 1$ alors, on obtient :

$$a_-^{\varepsilon}\left(v_-^n, v_-^n\right) \geq \left\| v_-'^n \right\|_{L^2(\Omega_-)}^2,$$

donc

$$a_-^{\varepsilon}\left(v_-^n, v_-^n\right) \geq C \left\| v_-^n \right\|_{H^1(\Omega_-)}^2.$$

On déduit alors que :

$$\begin{aligned}
\left\| v_+^n \right\|_{H^1(\Omega_+)}^2 + \left\| v_-^n \right\|_{H^1(\Omega_-)}^2 &\leq C\left(a_+\left(v_+^n, v_+^n\right) + a_-^{\varepsilon}\left(v_-^n, v_-^n\right)\right) \\
&\leq C \left| h(1) \right| \left\| v_+^n \right\|_{H^1(\Omega_+)} + \left\| g \right\|_{L^2(\Omega_-)} \left\| v_-^n \right\|_{H^1(\Omega_-)} \\
&\leq C_1 \varepsilon^n \left\| v_+^n \right\|_{H^1(\Omega_+)} + \left(C_2 \varepsilon^{n+1} + C_3 \varepsilon^n\right) \left\| v_-^n \right\|_{H^1(\Omega_-)} \\
&\leq C_1 \varepsilon^n \left\| v_+^n \right\|_{H^1(\Omega_+)} + C_4 \varepsilon^n \left\| v_-^n \right\|_{H^1(\Omega_-)} \quad \left(car \quad \varepsilon^{n+1} < \varepsilon^n\right) \\
&\leq C \varepsilon^n \left\| v^n \right\|_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

on déduit alors que :

$$\left\| v^n \right\|_{H^1(\Omega)} \leq C \varepsilon^n.$$

On peut améliorer cette estimation, comme suit :

on a :

$$v^{n+2} = u - u^{[n+2]} = u - \left[u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \cdots + \varepsilon^n u^n + \varepsilon^{n+1} u^{n+1} + \varepsilon^{n+2} u^{n+2}\right],$$

il s'ensuit que :

$$v^{n+2} = v^n - \varepsilon^{n+1} u^{n+1} - \varepsilon^{n+2} u^{n+2},$$

soit encore :

$$v^n = v^{n+2} + \varepsilon^{n+1} u^{n+1} + \varepsilon^{n+2} u^{n+2},$$

donc, on obtient :

$$\begin{aligned}
\| v^n \|_{H^1(\Omega)} &= \left\| v^{n+2} + \varepsilon^{n+1} u^{n+1} + \varepsilon^{n+2} u^{n+2} \right\|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq \left\| v^{n+2} \right\|_{H^1(\Omega)} + \varepsilon^{n+1} \left\| u^{n+1} \right\|_{H^1(\Omega)} + \varepsilon^{n+2} \left\| u^{n+2} \right\|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq C_0 \varepsilon^{n+2} + C_1 \varepsilon^{n+1} + C_2 \varepsilon^{n+2},
\end{aligned}$$

on déduit alors que :

$$\| v^n \|_{H^1(\Omega)} \leq C \varepsilon^{n+1}.$$

Remarque 1.2. La démonstration est semblable dans le cas des conditions de Neumann.

1.6 Conditions aux limites approchées

Le but de cette section est de construire des conditions aux limites approchées qui prendront en compte l'effet de la couche mince. La méthode consiste à approcher u_+^ε par la série donnant son développement asymptotique tronqué à un ordre donné, les conditions vérifiées par cette approximation en $x = 1$ fournissent les conditions aux limites approchées recherchées.

1.6.1 Conditions aux limites approchées pour le problème de Dirichlet

Approximation d'ordre 0 :

Pour obtenir une approximation d'ordre 0 de la solution, on tronque le développement asymptotique de u_+^ε à l'ordre 0 et on pose :

$$u_+^{\{0\}} (x) = u_+^0 (x) ,$$

on a alors :

$$u_+^{\{0\}} (1) = u_+^0 (1) .$$

Or, $u_+^0 (1) = 0$, on déduit alors la condition aux limites approchées d'ordre 0 :

$$u_+^{\{0\}} (1) = 0.$$

Par conséquent, le problème approché d'ordre 0 est donné par :

$$\begin{cases}
-\Delta u_+^{\{0\}} + k_+^2 u_+^{\{0\}} &= f \quad \textit{pour} \;\; 0 < x < 1, \\
u_+^{\{0\}} (0) &= 0 \quad \textit{pour} \;\; x = 0, \\
u_+^{\{0\}} (1) &= 0 \quad \textit{pour} \;\; x = 1.
\end{cases}$$

Approximation d'ordre 1 :

Ici, on tronque le développement asymptotique de u_+^ε à l'ordre 1, et on pose :

$$u_+^{\{1\}}(x) = u_+^0(x) + \varepsilon u_+^1(x),$$

on a alors :

$$u_+^{\{1\}}(1) = u_+^0(1) + \varepsilon u_+^1(1).$$

Or, d'après les calculs précédents, $u_+^0(1) = 0$ et $u_+^1(1) = u_-^1(1) = -u_+'^0(1)$, ce qui donne :

$$u_+^{\{1\}}(1) + \varepsilon u_+'^0(1) = 0.$$

Comme $u_+'^0(1) = u_+'^{\{1\}}(1) - \varepsilon u_+'^1(1)$, l'équation ci-dessus devient :

$$u_+^{\{1\}}(1) + \varepsilon u_+'^{\{1\}}(1) - \varepsilon^2 u_+'^1(1) = 0,$$

soit encore :

$$u_+^{\{1\}}(1) + \varepsilon u_+'^{\{1\}}(1) = O\left(\varepsilon^2\right).$$

Ceci suggère l'idée de négliger le terme en $O(\varepsilon^2)$ pour obtenir une condition aux limites approchée d'ordre 1. Celle-ci s'écrit alors :

$$u_+^{\{1\}}(1) + \varepsilon u_+'^{\{1\}}(1) = 0.$$

Par conséquent, le problème approché d'ordre 1 est donné par :

$$\begin{cases} -\Delta u_+^{\{1\}} + k_+^2 u_+^{\{1\}} & = & f \quad \textit{pour} \ \ 0 < x < 1, \\ u_+^{\{1\}}(0) & = & 0 \quad \textit{pour} \ \ x = 0, \\ u_+^{\{1\}}(1) + \varepsilon u_+'^{\{1\}}(1) & = & 0 \quad \textit{pour} \ \ x = 1. \end{cases}$$

Approximation d'ordre 2 :

On pose :

$$u_+^{\{2\}}(x) = u_+^0(x) + \varepsilon u_+^1(x) + \varepsilon^2 u_+^2(x).$$

En $x = 1$, on a :

$$u_+^{\{2\}}(1) = u_+^0(1) + \varepsilon u_+^1(1) + \varepsilon^2 u_+^2(1).$$

Sachant que : $u_+^0(1) = 0$, $u_+^1(1) = -u_+'^0(1)$ et que $u_+^2(1) = -u_+'^1(1)$, on déduit que :

$$u_+^{\{2\}}(1) + \varepsilon u_+'^{\{2\}}(1) - \varepsilon^3 u_+'^2(1) = 0,$$

soit

$$u_+^{\{2\}}(1) + \varepsilon u_+'^{\{2\}}(1) = O\left(\varepsilon^3\right).$$

Pour obtenir une condition approchée d'ordre 2, on néglige le terme en $O(\varepsilon^3)$ et on obtient :

$$u_+^{\{2\}}(1) + \varepsilon u_+'^{\{2\}}(1) = 0.$$

Par conséquent, le problème approché d'ordre 2 est donné par :

$$\begin{cases} -\Delta u_+^{\{2\}} + k_+^2 u_+^{\{2\}} & = & f & \textit{pour} \;\; 0 < x < 1, \\ u_+^{\{2\}}(0) & = & 0 & \textit{pour} \;\; x = 0, \\ u_+^{\{2\}}(1) + \varepsilon u_+'^{\{2\}}(1) & = & 0 & \textit{pour} \;\; x = 1. \end{cases}$$

1.6.2 Conditions aux limites approchées pour le problème de Neumann

Approximation d'ordre 0 :

Pour obtenir une approximation d'ordre 0 de la solution, on tronque le développement asymptotique de u_+^ε à l'ordre 0 et on pose :

$$u_+^{\{0\}}(x) = u_+^0(x),$$

soit encore :

$$u_+'^{\{0\}}(1) = u_+'^0(1).$$

on a alors :

$$u_+'^{\{0\}}(1) = u_+'^0(1),$$

Or, $u_+'^0(1) = 0$, on déduit alors la condition aux limites approchée d'ordre 0 :

$$u_+'^{\{0\}}(1) = 0.$$

Par conséquent, le problème approché d'ordre 0 est donné par :

$$\begin{cases} -\Delta u_+^{\{0\}} + k_+^2 u_+^{\{0\}} & = & f & \textit{pour} \;\; 0 < x < 1, \\ u_+^{\{0\}}(0) & = & 0 & \textit{pour} \;\; x = 0, \\ u_+'^{\{0\}}(1) & = & 0 & \textit{pour} \;\; x = 1. \end{cases}$$

Approximation d'ordre 1 :

Ici, on tronque le développement asymptotique de u_+^ε à l'ordre 1, et on pose :

$$u_+^{\{1\}}(x) = u_+^0(x) + \varepsilon u_+^1(x),$$

soit encore :

$$u_+^{\prime\{1\}}(x) = u_+^{\prime 0}(x) + \varepsilon u_+^{\prime 1}(x),$$

on a alors :

$$u_+^{\prime\{1\}}(1) = u_+^{\prime 0}(1) + \varepsilon u_+^{\prime 1}(1).$$

Or, d'après les calculs précédents, $u_+^{\prime 0}(1) = 0$ et $\varepsilon u_+^{\prime 1}(1) = u_-^{\prime 1}(1) = u_+^{\prime 0}(1) = 0$, ce qui donne :

$$u_+^{\prime\{1\}}(1) = 0.$$

Par conséquent, le problème approché d'ordre 1 est donné par :

$$\begin{cases} -\Delta u_+^{\{1\}} + k_+^2 u_+^{\{1\}} & = & f \quad \textit{pour} \;\; 0 < x < 1, \\ u_+^{\{1\}}(0) & = & 0 \quad \textit{pour} \;\; x = 0, \\ u_+^{\prime\{1\}}(1) & = & 0 \quad \textit{pour} \;\; x = 1. \end{cases}$$

Approximation d'ordre 2 :

On tronque le développement asymptotique de u_+^ε à l'ordre 2, et on pose :

$$u_+^{\{2\}}(x) = u_+^0(x) + \varepsilon u_+^1(x) + \varepsilon^2 u_+^2(x),$$

soit encore :

$$u_+^{\prime\{2\}}(x) = u_+^{\prime 0}(x) + \varepsilon u_+^{\prime 1}(x) + \varepsilon^2 u_+^{\prime 2}(x).$$

En $x = 1$, on a :

$$u_+^{\prime\{2\}}(1) = u_+^{\prime 0}(1) + \varepsilon u_+^{\prime 1}(1) + \varepsilon^2 u_+^{\prime 2}(1).$$

Sachant que $u_+^{\prime 0}(1) = 0$, $\varepsilon u_+^{\prime 1}(1) = u_-^{\prime 1}(1)$ et que $u_-^{\prime 2}(1) = u_+^{\prime 2}(1) = k_-^2 u_+^0(1)$, on déduit que :

$$u_+^{\{2\}}(1) - \varepsilon k_-^2 u_1^{\{2\}}(1) + \varepsilon^3 k_-^2 u_+^{\{2\}}(1) = 0,$$

soit

$$u_+^{\prime\{2\}}(1) - \varepsilon k_-^2 u_1^{\{2\}}(1) = O\left(\varepsilon^3\right).$$

Ceci suggère l'idée de négliger le terme en $O(\varepsilon^3)$ pour obtenir une condition aux limites approchée d'ordre 2. Celle-ci s'écrit alors :

$$u_+^{\prime\{2\}}(1) - \varepsilon k_-^2 u_+^{\{2\}}(1) = 0.$$

Par conséquent, le problème approché d'ordre 2 est donné par :

$$\begin{cases} -\Delta u_+^{\{2\}} + k_+^2 u_+^{\{2\}} & = & f & \textit{pour} \;\; 0 < x < 1, \\ u_+^{\{2\}}(0) & = & 0 & \textit{pour} \;\; x = 0, \\ u_+^{\prime\{2\}}(1) - \varepsilon k_-^2 u_+^{\{2\}}(1) & = & 0 & \textit{pour} \;\; x = 1. \end{cases}$$

1.6.3 Estimation d'erreur

Nous allons maintenant établir une estimation d'erreur entre la solution exacte du problème u_+^ε et la solution approchée.

A l'ordre 0

Soit $u_+^{\{0\}}$ la solution du problème approché suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_+^{\{0\}} + k_+^2 u_+^{\{0\}} & = & f & \textit{pour} \;\; 0 < x < 1, \\ u_+^{\{0\}}(0) & = & 0 & \textit{pour} \;\; x = 0, \\ u_+^{\{0\}}(1) & = & 0 & \textit{pour} \;\; x = 1. \end{cases} \tag{1.27}$$

On a :

$$\left\| u_+^\varepsilon - u_+^{\{0\}} \right\| = \left\| u_+^\varepsilon - u_+^0 \right\| \leq C\varepsilon.$$

A l'ordre 1

Soit $u_+^{\{1\}}$ la solution du problème approché suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_+^{\{1\}} + k_+^2 u_+^{\{1\}} & = & f & \textit{pour} \;\; 0 < x < 1, \\ u_+^{\{1\}}(0) & = & 0 & \textit{pour} \;\; x = 0, \\ u_+^{\{1\}}(1) + \varepsilon u_+^{\prime\{1\}}(1) & = & 0 & \textit{pour} \;\; x = 1. \end{cases} \tag{1.28}$$

Pour calculer l'estimation d'erreur entre la solution de ce problème approché et celle du problème initial, il suffit de calculer $\left\| u_+^\varepsilon - u_+^{\{1\}} \right\|_{H^1(\Omega_+)}$.
On sait que :

$$\begin{aligned}\left\| u_+^\varepsilon - u_+^{\{1\}} \right\|_{H^1(\Omega_+)} &= \left\| u_+^\varepsilon - u_+^{[1]} + u_+^{[1]} - u_+^{\{1\}} \right\|_{H^1(\Omega_+)} \\ &\leq \left\| u_+^\varepsilon - u_+^{[1]} \right\|_{H^1(\Omega_+)} + \left\| u_+^{[1]} - u_+^{\{1\}} \right\|_{H^1(\Omega_+)} .\end{aligned}$$

Dans ce qui précède, on a montré que :

$$\left\| u_+^\varepsilon - u_+^{[1]} \right\|_{H^1(\Omega_+)} = \left\| v_+^1 \right\|_{H^1(\Omega_+)} \leq C\varepsilon,$$

il nous reste à comparer $u_+^{\{1\}}$ et $u_+^{[1]}$, c'est-à-dire qu'on cherche alors l'estimation $\left\| u_+^{[1]} - u_+^{\{1\}} \right\|_{H^1(\Omega_+)}$.
Si on regarde le problème résolu par $u_+^{[1]}$:

$$\left\{\begin{array}{lcll} -\Delta u_+^{[1]} + k_+^2 u_+^{[1]} & = & f & \textit{pour } \ 0 < x < 1, \\ u_+^{[1]}(0) & = & 0 & \textit{pour } \ x = 0, \\ u_+^{[1]}(1) + \varepsilon u_+^{\prime [1]}(1) & = & \varepsilon^2 u_+^{\prime 1}(1) = h & \textit{pour } \ x = 1, \end{array}\right. \tag{1.29}$$

avec

$$h = O\left(\varepsilon^2\right),$$

on constate que les problèmes (2.26) et (1.29) différent uniquement par h (en $x = 1$).
On pose : $w_+ = u_+^{\{1\}} - u_+^{[1]}$, donc w résout le problème :

$$\left\{\begin{array}{lcll} -\Delta w_+ + k_+^2 w_+ & = & 0 & \textit{pour } \ 0 < x < 1, \\ w_+(0) & = & 0 & \textit{pour } \ x = 0, \\ w_+(1) + \varepsilon w_+'(1) & = & -h & \textit{pour } \ x = 1. \end{array}\right. \tag{1.30}$$

Cherchons la formulation variationnelle associée au problème (1.30) :
Soit $v_+ \in V = \{v_+ \in H^1(\Omega_+),\ v_+(0) = 0\}$.
On multiplie l'équation du problème (1.30) par v_+, et on intègre sur l'intervalle $[0,1]$, on obtient :

$$\int_0^1 -\Delta w_+ v_+ dx + k_+^2 \int_0^1 w_+ v_+ dx = 0,$$

soit encore :

$$\int_0^1 \left(w_+' v_+' + k_+^2 w_+ v_+\right) dx + \frac{1}{\varepsilon} w_+(1)\, v_+(1) - \frac{1}{\varepsilon} h v_+(1) = 0,$$

ce qui donne :

$$\int_0^1 \left(w_+' v_+' + k_+^2 w_+ v_+\right) dx + \frac{1}{\varepsilon} w_+(1)\, v_+(1) = \frac{1}{\varepsilon} h v_+(1).$$

Pour $v_+ = w_+$, on aura :

$$\int_0^1 \left(w_+'^2 + k_+^2 w_+^2\right) dx + \frac{1}{\varepsilon}\left(w_+(1)\right)^2 = \frac{1}{\varepsilon} h w_+(1).$$

On a :

$$\int_0^1 \left(w_+'^2 + k_+^2 w_+^2\right) dx + \frac{1}{\varepsilon} \left| \left(w_+(1)\right) \right|^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} \left| h \right| \left\| w_+ \right\|_{H^1(\Omega_+)},$$

et comme

$$\int_0^1 \left(w_+'^2 + k_+^2 w_+^2\right) dx + \frac{1}{\varepsilon} \left| \left(w_+(1)\right) \right|^2 \geq \int_0^1 \left(w_+'^2 + k_+^2 w_+^2\right) dx \geq C \left\| w_+ \right\|^2_{H^1(\Omega_+)},$$

ce qui signifie que :

$$C \left\| w_+ \right\|^2_{H^1(\Omega_+)} \leq \frac{1}{\varepsilon} \left| h \right| \left\| w_+ \right\|_{H^1(\Omega_+)},$$

on déduit alors que :

$$\left\| w_+ \right\|_{H^1(\Omega_+)} \leq C\varepsilon.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \left\| u_+^\varepsilon - u_+^{\{1\}} \right\|_{H^1(\Omega_+)} &\leq \left\| u_+^\varepsilon - u_+^{[1]} \right\|_{H^1(\Omega_+)} + \left\| u_+^{[1]} - u_+^{\{1\}} \right\|_{H^1(\Omega_+)} \\ &\leq C\varepsilon^2 + C\varepsilon \\ &\leq C\varepsilon \end{aligned}$$

L'estimation d'erreur qu'on a trouvée à l'ordre 1 est donnée par :

$$\left\| u_+^\varepsilon - u_+^{\{1\}} \right\|_{H^1(\Omega_+)} \leq C\varepsilon.$$

Cette estimation n'est pas très optimale, on peut l'améliorer en utilisant la méthode suivante :
on va écrire un développement asymptotique pour notre problème approché avec les conditions approchées d'ordre 1 :

$$\left\{ \begin{array}{llll} -\Delta \tilde{v}_+ + k_+^2 \tilde{v}_+ & = & f & \textit{pour} \;\; 0 < x < 1, \\ \tilde{v}_+(0) & = & 0 & \textit{pour} \;\; x = 0, \\ \tilde{v}_+(1) + \varepsilon \tilde{v'}_+(1) & = & 0 & \textit{pour} \;\; x = 1. \end{array} \right. \tag{1.31}$$

Le développement asymptotique de $\tilde{v}_+$ est donné par :

$$\tilde{v}_+ = \tilde{v}_+^0 + \varepsilon \tilde{v}_+^1 + \varepsilon^2 \tilde{v}_+^2 + \cdots + \varepsilon^n \tilde{v}_+^n,$$

on injecte cette dernière quantité dans les équations du problème (1.31), on obtient les problèmes suivants :

A l'ordre 0 :

$$\begin{cases} -\Delta\tilde{v}_+^0 + k_+^2\tilde{v}_+^0 &= f \quad \textit{pour}\ \ 0 < x < 1, \\ \tilde{v}_+^0\,(0) &= 0 \quad \textit{pour}\ \ x = 0, \\ \tilde{v}_+^0\,(1) &= 0 \quad \textit{pour}\ \ x = 1. \end{cases} \tag{1.32}$$

A l'ordre 1 :

$$\begin{cases} -\Delta\tilde{v}_+^1 + k_+^2\tilde{v}_+^1 &= 0 \quad \textit{pour}\ \ 0 < x < 1, \\ \tilde{v}_+^1\,(0) &= 0 \quad \textit{pour}\ \ x = 0, \\ \tilde{v}_+^1\,(1) + \tilde{v'}_+^0\,(1) &= 0 \quad \textit{pour}\ \ x = 1. \end{cases} \tag{1.33}$$

On remarque que $\tilde{v}_+^0$ coincide avec u_+^0 et $\tilde{v}_+^1$ coincide avec u_+^1 (ils résolvent le même problème), donc

$$u_+^{[1]} = u_+^0 + \varepsilon u_+^1 = \tilde{v}_+^{[1]} = \tilde{v}_+^0 + \varepsilon\tilde{v}_+^1,$$

donc, si on veut comparer notre solution approchée $\tilde{v}$ avec la solution du problème initial u_+^ε :

$$\begin{aligned} \left\| u_+^\varepsilon - \tilde{v}_+ \right\|_{H^1(\Omega_+)} &= \left\| u_+^\varepsilon - u_+^{[1]} + u_+^{[1]} - \tilde{v}_+ \right\|_{H^1(\Omega_+)} \\ &\le \left\| u_+^\varepsilon - u_+^{[1]} \right\|_{H^1(\Omega_+)} + \left\| u_+^{[1]} - \tilde{v}_+ \right\|_{H^1(\Omega_+)} \\ &= \left\| u_+^\varepsilon - u_+^{[1]} \right\|_{H^1(\Omega_+)} + \left\| \tilde{v}_+^{[1]} - \tilde{v}_+ \right\|_{H^1(\Omega_+)}. \end{aligned}$$

Dans ce qui précède, on a montré que :

$$\left\| u_+^\varepsilon - u_+^{[1]} \right\|_{H^1(\Omega_+)} \le C\varepsilon^2,$$

il suffit de comparer $\tilde{v}_+^{[1]}$ et $\tilde{v}_+$, on cherche alors l'estimation $\left\| \tilde{v}_+^{[1]} - \tilde{v}_+ \right\|$.

On écrit une estimation d'erreur pour le développement asymptotique de notre problème approché. Si on pose : $\tilde{v}_+^{(k)} = \tilde{v}_+ - \tilde{v}_+^{[k]}$

$$\begin{cases} -\Delta\tilde{v}_+^{(k)} + k_+^2\tilde{v}_+^{(k)} &= 0 \quad \textit{pour}\ \ 0 < x < 1, \\ \tilde{v}_+^{(k)}\,(0) &= 0 \quad \textit{pour}\ \ x = 0, \\ \tilde{v}_+^{(k)}\,(1) + \varepsilon\tilde{v'}_+^{(k)}\,(1) &= \varepsilon^{k+1}\tilde{v'}_+^{(k)}\,(1) \quad \textit{pour}\ \ x = 1, \end{cases} \tag{1.34}$$

on établit une estimation d'erreur comme pour (1.30), on trouve :

$$\left\| \tilde{v}_+^{(k)} \right\|_{H^1(\Omega_+)} \le C\varepsilon^k.$$

On aura alors :

$$\left\| \tilde{v}_+^{(1)} \right\|_{H^1(\Omega_+)} = \left\| \tilde{v}_+ - \tilde{v}_+^{[1]} \right\|_{H^1(\Omega_+)} < C\varepsilon.$$

On peut améliorer cette estimation en posant :

$$\tilde{v}_+^{(2)} = \tilde{v}_+ - \tilde{v}_+^{[2]} = \varepsilon^3 \tilde{v}_+^3 + \varepsilon^4 \tilde{v}_+^4 + \cdots + \varepsilon^n \tilde{v}_+^n,$$

et

$$\tilde{v}_+^{(1)} = \tilde{v}_+ - \tilde{v}_+^{[1]} = \varepsilon^2 \tilde{v}_+^2 + \varepsilon^3 \tilde{v}_+^3 + \cdots + \varepsilon^n \tilde{v}_+^n,$$

donc

$$\tilde{v}_+^{(1)} = \tilde{v}_+^{(2)} + \varepsilon^2 \tilde{v}_+^2,$$

alors, on aura :

$$\left\| \tilde{v}_+^{(1)} \right\|_{H^1(\Omega_+)} \leq \left\| \tilde{v}_+^{(2)} \right\|_{H^1(\Omega_+)} + \varepsilon^2 \left\| \tilde{v}_+^2 \right\|_{H^1(\Omega_+)},$$

ce qui donne :

$$\left\| \tilde{v}_+ - \tilde{v}_+^{[1]} \right\|_{H^1(\Omega_+)} \leq \left\| \tilde{v}_+ - \tilde{v}_+^{[2]} \right\|_{H^1(\Omega_+)} + \varepsilon^2 \left\| \tilde{v}_+^2 \right\|_{H^1(\Omega_+)}.$$

On sait que :

$$\left\| \tilde{v}_+ - \tilde{v}_+^{[2]} \right\|_{H^1(\Omega_+)} \leq C\varepsilon^2,$$

et

$$\left\| \tilde{v}_+^2 \right\|_{H^1(\Omega_+)} \leq C\varepsilon^2,$$

on déduit alors que :

$$\left\| \tilde{v}_+ - \tilde{v}_+^{[1]} \right\|_{H^1(\Omega_+)} \leq C\varepsilon^2,$$

donc

$$\left\| u_+^\varepsilon - \tilde{v}_+ \right\|_{H^1(\Omega_+)} \leq C\varepsilon^2 + C\varepsilon^2 \leq C\varepsilon^2,$$

alors

$$\left\| u_+^\varepsilon - \tilde{v}_+ \right\|_{H^1(\Omega_+)} \leq C\varepsilon^2.$$

1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à l'analyse asymptotique d'un problème de transmission en dimension 1. La méthode consiste à remplacer la couche mince par des conditions aux limites approchées sur l'interface de jonction. Cette approche sera généralisée au chapitre suivant à la dimension 2.

Chapitre 2

Problème de transmission en dimension 2

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la généralisation de l'étude précédente à la dimension 2. Nous considérons alors un problème qui correspond physiquement à la diffusion de la chaleur dans une plaque entourée d'une couche mince. Des conditions aux limites approchées sont dérivées et une analyse d'erreur est donnée.

2.1 Formulation du problème

Soit Ω_+ un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^2$ et Γ son bord supposé de classe C^∞. Soit $n\,(t)$ la normale unitaire extérieure à t, pout $t \in \Gamma$. Pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit (ε un paramètre destiné à tendre vers zéro), on note par Ω_-^ε la couche mince d'épaisseur uniforme ε autour de Ω_+ donnée par :

$$\Omega_-^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2,\, x = t + s\vec{n}\,(t)\,,\, t \in \Gamma,\, 0 < s < \varepsilon\}.$$

On désigne par $\Omega^\varepsilon = \Omega_+ \cup \Omega_-^\varepsilon \cup \Gamma$ le domaine complet et Γ_-^ε son bord (voir Fig. 2.1 - Le problème de couche mince en dimension 2).

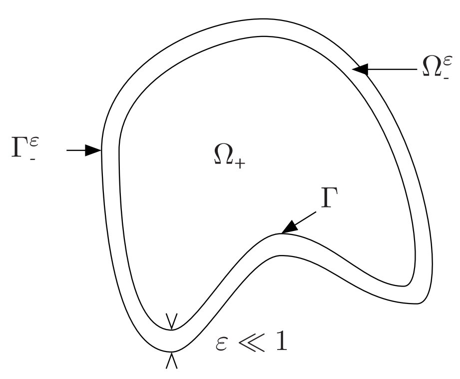

FIG. 2.1 – Le problème de couche mince en dimension 2

Soit α un nombre réel positif fixé. Nous nous intéressons au problème de transmission suivant :

Trouvons la solution u^ε, définie par u_+^ε dans Ω_+ et u_-^ε dans Ω_-^ε qui satisfait les équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lclll} \alpha\Delta u_+^\varepsilon & = & f_+ & dans & \Omega_+, \\ \Delta u_-^\varepsilon & = & f_- & dans & \Omega_-^\varepsilon, \\ u_+^\varepsilon - u_-^\varepsilon & = & 0 & sur & \Gamma, \\ \alpha\partial_n u_+^\varepsilon - \partial_n u_-^\varepsilon & = & g & sur & \Gamma, \\ u_- & = & 0 & sur & \Gamma_-^\varepsilon, \quad (Dirichlet) \\ & \boldsymbol{ou} & & & \\ \dfrac{\partial u_-}{\partial n} & = & 0 & sur & \Gamma_-^\varepsilon, \quad (Neumann) \end{array}\right. \tag{2.1}$$

où ∂_n est la dérivée normale (extérieure à Ω_+, intérieure à Ω_-^ε). Les fonctions $g \in L^2(\Gamma)$, $f_+ \in L^2(\Omega_+)$ et $f_- \in L^2\left(\Omega_-^\varepsilon\right)$ ne dépendent pas de ε.

2.2 Formulation variationnelle du problème (2.1)

On multiplie les deux premières équations du problème (2.1) par une fonction test v avec : $v = v_+$ sur Ω_+, $v = v_-$ sur Ω_-^ε, et on intègre sur Ω^ε, on obtient :

$$\int_{\Omega_+} \alpha\Delta u_+ v_+ dx + \int_{\Omega_-^\varepsilon} \Delta u_- v_- dx = \int_{\Omega_+} f_+ v_+ dx + \int_{\Omega_-^\varepsilon} f_- v_- dx.$$

En utilisant la formule de Green (formule d'intégration par parties), on obtient :

$$-\int_{\Omega_+} \alpha\nabla u_+ \nabla v_+ dx + \alpha\int_\Gamma \frac{\partial u_+}{\partial n} v_+ ds - \int_{\Omega_-^\varepsilon} \nabla u_- \nabla v_- dx + \int_\Gamma \frac{\partial u_-}{\partial n} v_- ds = \int_{\Omega_+} f_+ v_+ dx + \int_{\Omega_-^\varepsilon} f_- v_- dx,$$

ce qui donne :

$$\int_{\Omega_+} \alpha\nabla u_+ \nabla v_+ dx + \int_{\Omega_-^\varepsilon} \nabla u_- \nabla v_- dx = -\int_{\Omega_+} f_+ v_+ dx - \int_{\Omega_-^\varepsilon} f_- v_- dx + \int_\Gamma g\, v\, ds,$$

donc, la formulation variationnelle associée au problème (2.1), est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{l} Trouver \quad u \in V, \\ a(u,v) = l(v), \quad \forall\, v \in V \end{array}\right. \tag{2.2}$$

avec

$$a(u,v)=\int_{\Omega_+}\alpha\nabla u_+\nabla v_+dx+\int_{\Omega_-^\varepsilon}\nabla u_-\nabla v_-dx,$$

et

$$l(v)=-\int_{\Omega_+}f_+v_+dx-\int_{\Omega_-^\varepsilon}f_-v_-dx+\int_\Gamma g\,v\,ds,$$

où $V=H_0^1(\Omega^\varepsilon)$ dans le cas Dirichlet et $V=H^1(\Omega^\varepsilon)$ dans le cas Neumann.

2.3 Existence et unicité de la solution

Théorème 2.1. *Si $f_+\in L^2(\Omega_+)$, $f_-\in L^2\left(\Omega_-^\varepsilon\right)$ et $g\in L^2(\Gamma)$, alors le problème variationnel* (2.1) *admet une solution unique $u^\varepsilon\in V$. De plus il existe une constante C, indépendante de $\varepsilon\leq\varepsilon_0$, telle que :*

$$\|u^\varepsilon\|_{1,\Omega^\varepsilon}\leq C\left(\|f_+\|_{0,\Omega_+}+\|f_-\|_{0,\Omega_-^\varepsilon}+\|g\|_{0,\Gamma}\right).$$

Pour pouvoir appliquer le théorème de Lax-Milgram il faut vérifier :

1. La continuité de la forme linéaire l :

Pour démontrer la continuité de l, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz et on obtient :

$$|l(v)|\leq\|f_+\|_{L^2(\Omega_+)}\|v_+\|_{L^2(\Omega_+)}+\|f_-\|_{L^2\left(\Omega_-^\varepsilon\right)}\|v_-\|_{L^2\left(\Omega_-^\varepsilon\right)}+\|g\|_{L^2(\Gamma)}\|v\|_{L^2(\Gamma)}$$

Par la continuité da l'application trace de $H^1(\Omega^\varepsilon)$ dans $L^2(\Gamma)$, il existe une constante $C>0$ indépendante de ε, telle que :

$$\|v\|_{L^2(\Gamma)}\leq C\|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\quad\forall v\in H^1(\Omega^\varepsilon),$$

donc, on écrit :

$$|l(v)|\leq\|f_+\|_{L^2(\Omega_+)}\|v_+\|_{H^1(\Omega_+)}+\|f_-\|_{L^2\left(\Omega_-^\varepsilon\right)}\|v_-\|_{H^1\left(\Omega_-^\varepsilon\right)}+C\|g\|_{L^2(\Gamma)}\|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}.$$

Ainsi

$$|l(v)|\leq\left(\|f_+\|_{L^2(\Omega_+)}+\|f_-\|_{L^2\left(\Omega_-^\varepsilon\right)}+C\|g\|_{L^2(\Gamma)}\right)\|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)},$$

ce qui veut dire :

$$|l(v)|\leq C'\|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)},$$

avec $C'=\|f_+\|_{L^2(\Omega_+)}+\|f_-\|_{L^2\left(\Omega_-^\varepsilon\right)}+C\|g\|_{L^2(\Gamma)}$.

2. La continuité de la forme bilinéaire a :

Pour démontrer la continuité de a, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz. On obtient :

$$\begin{aligned}
|\, a\,(u,v)\,| &\leq \alpha \,\|\, \nabla u_+ \,\|_{L^2(\Omega_+)} \,\|\, \nabla v_+ \,\|_{L^2(\Omega_+)} + \|\, \nabla u_- \,\|_{L^2\left(\Omega_-^\varepsilon\right)} \,\|\, \nabla v_- \,\|_{L^2\left(\Omega_-^\varepsilon\right)} \\
&\leq 2C \left(\|\, u_+ \,\|_{H^1(\Omega_+)} \,\|\, v_+ \,\|_{H^1(\Omega_+)} + \|\, u_- \,\|_{H^1\left(\Omega_-^\varepsilon\right)} \,\|\, v_- \,\|_{H^1\left(\Omega_-^\varepsilon\right)} \right) \\
&\leq 2C \left(\|\, u_+ \,\|_{H^1(\Omega_+)} + \|\, u_- \,\|_{H^1\left(\Omega_-^\varepsilon\right)} \right) \left(\|\, v_+ \,\|_{H^1(\Omega_+)} + \|\, v_- \,\|_{H^1\left(\Omega_-^\varepsilon\right)} \right) \\
&\leq 2C \,\|\, u \,\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \,\|\, v \,\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}
\end{aligned}$$

avec $C = \max\,(\alpha, 1)$.

3. La coercivité de la forme bilinéaire a:

Dans le cas Dirichlet :

On utilise l'inégalité de Poincaré dans $H_0^1\,(\Omega^\varepsilon)$ suivante :

$$\int_{\Omega^\varepsilon} |\, u\,(x)\,|^2\, dx \leq C \int_{\Omega^\varepsilon} |\, \nabla u\,(x)\,|^2\, dx, \quad \forall u \in H_0^1\,(\Omega^\varepsilon)$$

donc

$$\begin{aligned}
a\,(u,u) &= \alpha \,\|\, \nabla u_+ \,\|^2_{L^2(\Omega_+)} + \|\, \nabla u_- \,\|^2_{L^2\left(\Omega_-^\varepsilon\right)} \\
&\geq C_1 \,\min\,(1,\alpha)\, \,\|\, u \,\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \\
&\geq C_2 \,\|\, u \,\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)}
\end{aligned}$$

avec $C_1 = 1/C$ et $C_2 = C_1 \min\,(1, \alpha)$.

Dans le cas Neumann :

L'existence et l'unicité de la solution est assurée moyennant une condition de compatibilité : On a :

$$\alpha \int_{\Omega_+} \nabla u_+ \nabla v_+ dx + \int_{\Omega_-^\varepsilon} \nabla u_- \nabla v_- dx = -\int_{\Omega_+} f_+ v_+ dx - \int_{\Omega_-^\varepsilon} f_- v_- dx + \int_\Gamma g v ds,$$

pour $v_+ = v_- = v = 1$, on aura :

$$-\int_{\Omega_+} f_+ dx - \int_{\Omega_-^\varepsilon} f_- dx + \int_\Gamma g ds = 0. \tag{2.3}$$

Pour que (2.3) soit satisfait pour tout $\varepsilon > 0$, il suffit que :

$$-\int_{\Omega_+} f_+ dx + \int_\Gamma g ds = 0 \;\; et \quad \int_{\Omega_-^\varepsilon} f_- dx = 0. \tag{2.4}$$

Sous les suppositions (2.4), on peut assurer l'unicité de la solution du problème de Neumann à l'interface, en imposant la propriété de la valeur moyenne suivante :

$$\int_{\Omega_+} u_+ dx = 0.$$

Pour démontrer la coercivité de a, on utilise l'estimation suivante :

$$\exists C > 0, \quad \| u \|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\| \nabla u \|_{L^2(\Omega)} + \int_{\Omega} u dx \right).$$

comme $u_+ \in H^1(\Omega_+)$ et $u_- \in H^1\left(\Omega_-^\varepsilon\right)$ alors $\int_{\Omega_+} u_+ dx = 0$ et $\int_{\Omega_-^\varepsilon} u_- dx = 0$ (respectivement), on aura alors :

$$\exists C > 0, \quad \| u \|_{L^2(\Omega)} \leq C \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\alpha \| \nabla u_+ \|^2_{L^2(\Omega_+)} + \| \nabla u_- \|^2_{L^2\left(\Omega_-^\varepsilon\right)} &\geq \alpha \| u_+ \|^2_{H^1(\Omega_+)} + C \| u_- \|^2_{H^1\left(\Omega_-^\varepsilon\right)} \\
&\geq \min(\alpha, C) \left(\| u_+ \|^2_{L^2(\Omega_+)} + \| u_- \|^2_{L^2\left(\Omega_-^\varepsilon\right)} \right) \\
&\geq C \| u \|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)},
\end{aligned}$$

d'où la coercivité de a.
Alors, le théorème du Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.1). ■
On cherche à trouver un problème proche de (2.1) dans lequel la couche mince n'apparaît plus, on recherche une condition aux limites $CL_\varepsilon\left(v, \dfrac{\partial v}{\partial n}\right)$ telle que :

$$\begin{cases}
\alpha \Delta v^\varepsilon & = f_+ \quad \textit{dans } \Omega_+, \\
CL_\varepsilon\left(v^\varepsilon, \dfrac{\partial v^\varepsilon}{\partial n}\right) & = 0 \quad \textit{sur } \Gamma,
\end{cases}$$

soit bien posé et que sa solution v^ε soit "proche" de u_+^ε quand $\varepsilon \to 0$.

2.4 Développement asymptotique de la solution

2.4.1 Changement d'échelle

Dans cette section, notre objectif est de construire un développement asymptotique de la solution u^ε. La méthode consiste à se ramener par un changement d'échelle dans Ω^ε à un problème posé dans un domaine fixe. Pour cela, nous écrivons l'expression du Laplacien en coordonnées locales.

Soient $\vec{\tau}$ le vecteur unitaire tangent et $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal, telles que :

$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} n_2 \\ -n_1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix},$$

Les deux vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{\tau}$ sont orthogonaux, i.e : ($\vec{\tau}\vec{n} = 0$).

Les formules de Frénet qui définissent la courbure $c(t)$ au point d'abscisse curviligne t sont données par :

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = -c(t)\,\vec{n} \;\; et \;\; \frac{d\vec{n}}{dt} = c(t)\,\vec{\tau}. \tag{2.5}$$

donc

$$\frac{d\vec{n}}{dt} = \begin{pmatrix} n_1'(t) \\ n_2'(t) \end{pmatrix} = c(t)\,\vec{\tau} = c(t)\begin{pmatrix} n_2 \\ -n_1 \end{pmatrix},$$

ce qui signifie que :

$$n_1'(t) = c(t)\,n_2 \;\; et \;\; n_2'(t) = -c(t)\,n_1.$$

Expression du Laplacien en coordonnées locales :

Pour trouver l'expression du Laplacien en coordonnées locales, il faut d'abord écrire les dérivées selon les variables cartésiennes en fonction des dérivées dans le repère de Frénet. Les formules de Frénet (2.5) donnent :

$$\begin{pmatrix} \partial_t \\ \partial_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+sc(t))\,n_2 & -(1+sc(t))\,n_1 \\ n_1 & n_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix}.$$

L'inversion de ce dernier système nous donne :

$$\begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{n_2}{(1+sc(t))} & n_1 \\ \dfrac{-n_1}{(1+sc(t))} & n_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_t \\ \partial_s \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2,$$

avec

$$\partial_1^2 = \partial_1(\partial_1) = \frac{n_2}{1+sc(t)}\partial_t\left(\frac{n_2}{1+sc(t)}\partial_t + n_1\partial_s\right) + n_1\partial_s\left(\frac{n_2}{1+sc(t)}\partial_t + n_1\partial_s\right),$$

et

$$\partial_2^2 = \partial_2 (\partial_2) = \frac{-n_1}{1+sc(t)} \partial_t \left(\frac{-n_1}{1+sc(t)} \partial_t + n_2 \partial_s \right) + n_2 \partial_s \left(\frac{-n_1}{1+sc(t)} \partial_t + n_2 \partial_s \right).$$

Donc

$$\begin{aligned} \Delta = & \frac{n_2}{1+sc(t)} \left[\frac{n_2'}{1+sc(t)} \partial_t + n_2 \partial_t \left(\frac{1}{1+sc(t)} \partial_t \right) + n_1' \partial_s + n_1 \partial_s \partial_t \right] + n_1 n_2 \partial_s \left(\frac{1}{1+sc(t)} \partial_t \right) + n_1^2 \partial_s^2 \\ & - \frac{n_1}{1+sc(t)} \left[\frac{-n_1'}{1+sc(t)} \partial_t - n_1 \partial_t \left(\frac{1}{1+sc(t)} \partial_t \right) + n_2' \partial_s + n_2 \partial_s \partial_t \right] - n_1 n_2 \partial_s \left(\frac{1}{1+sc(t)} \partial_t \right) + n_2^2 \partial_s^2 \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\Delta = \frac{n_1^2 + n_2^2}{1+sc(t)} \partial_t \left(\frac{1}{1+sc(t)} \partial_t \right) + (n_1^2 + n_2^2) \partial_s^2 + \frac{n_2 n_2'}{(1+sc(t))^2} \partial_t + \frac{n_1 n_1'}{(1+sc(t))^2} \partial_t + \frac{n_2 n_1'}{1+sc(t)} \partial_s - \frac{n_1 n_2'}{1+sc(t)} \partial_s.$$

En utilisant le fait que $n_1^2 + n_2^2 = 1$, $n_1'(t) = c(t) n_2$ et $n_2'(t) = -c(t) n_1$, on obtient l'expression du Laplacien en coordonnées locales :

$$\Delta = \frac{1}{1+sc(t)} \partial_t \left(\frac{1}{1+sc(t)} \partial_t \right) - \frac{c}{1+sc(t)} \partial_s + \partial_s^2.$$

2.4.2 Le problème dans un domaine fixe

Notre objectif est de poser le problème (2.1) dans un domaine fixe. On effectue alors une dilatation dans la couche mince d'un rapport $\frac{1}{\varepsilon}$ dans la direction de la normale. Pour cela, on introduit la variable dilatée S, telle que :

$$S = \varepsilon^{-1} s,$$

et on note par Ω_- l'image de Ω_-^ε par ce changement d'échelle :

$$\Omega_- = \{x \in \mathbb{R}^2,\ x = t + s\vec{n}(t),\ t \in \Gamma,\ 0 < s < 1\}.$$

Alors, l'opérateur Laplacien devient :

$$\Delta = \frac{1}{1+\varepsilon S c(t)} \partial_t \left(\frac{1}{1+\varepsilon S c(t)} \partial_t \right) + \frac{\varepsilon^{-1} c(t)}{1+\varepsilon S c(t)} \partial_S + \varepsilon^{-2} \partial_S^2. \tag{2.6}$$

Lemme 2.1. *L'expression du Laplacien en coordonnées dilatées (t, S) s'écrit sous la forme suivante :*

$$\Delta = \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\partial_S^2 + \sum_{l=1}^{N} \varepsilon^l A_l + \varepsilon^{N+1} T_\varepsilon^N \right), \tag{2.7}$$

où les A_l sont des opérateurs qui comportent au plus une dérivée selon S et T_ε^N est un opérateur uniformément borné en ε.

Remarque 2.1. On peut écrire un procédé récurrent de construction des opérateurs A_l. Néanmoins, on se contentera de donner les formes explicites de A_0, A_1, A_2 et A_3.
L'expression (2.6) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\Delta = \frac{1}{\varepsilon^2}\left[\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon S c\,(t)}\partial_t\left(\frac{1}{1+\varepsilon S c\,(t)}\partial_t\right) + \frac{\varepsilon c\,(t)}{1+\varepsilon S c\,(t)}\partial_S + \partial_S^2\right],$$

par identification de cette dernière quantité avec (2.7), on obtient :

$$A_0 = \partial_S^2,$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{N}\varepsilon^l A_l &= \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon S c\,(t)}\partial_t\left(\frac{1}{1+\varepsilon S c\,(t)}\partial_t\right) + \frac{\varepsilon c\,(t)}{1+\varepsilon S c\,(t)}\partial_S \\
&= \varepsilon^2\left[(1-\varepsilon S c+\varepsilon^2 S^2 c^2 - \cdots)\partial_t(1-\varepsilon S c+\varepsilon^2 S^2 c^2-\cdots)\partial_t\right] + \varepsilon c(1-\varepsilon S c+\varepsilon^2 S^2 c^2-\cdots)\partial_S \\
&= \varepsilon c\partial_S + \varepsilon^2(\partial_t^2 - S c^2\partial_S) + \varepsilon^3\left(c^3 S^2\partial_S - c' S\partial_t - 2cS\partial_t^2\right) + \cdots .
\end{aligned}$$

Par identification des puissances successives de ε, on obtient les formes suivantes :

$$A_1 = c\partial_S, \quad A_2 = \left(\partial_t^2 - S c^2\partial_S\right) \quad et \quad A_3 = \left(c^3 S^2\partial_S - c' S\partial_t - 2cS\partial_t^2\right).$$

Après ce changement d'échelle, le problème de transmission (2.1) devient :

$$\left\{\begin{array}{lcll}
\alpha\Delta u_+^\varepsilon & = & f_+ & dans \quad \Omega_+, \\
\dfrac{1}{\varepsilon^2}\left(\partial_S^2 + \displaystyle\sum_{l=1}^{N}\varepsilon^l A_l + \varepsilon^{N+1}T_\varepsilon^N\right)U_-^\varepsilon & = & F_- & dans \quad \Omega_-, \\
u_+^\varepsilon - U_-^\varepsilon\,(t{,}0) & = & 0 & sur \quad \Gamma, \\
\alpha\partial_n u_+^\varepsilon - \dfrac{1}{\varepsilon}\partial_S U_-^\varepsilon\,(t,0) & = & g & sur \quad \Gamma, \\
U_-\,(t,1) & = & 0 & sur \quad \Gamma, \quad (Dirichlet) \\
 & \boldsymbol{ou} & & \\
\partial_S U_-^\varepsilon\,(t,1) & = & 0 & sur \quad \Gamma_1, \quad (Neumann)
\end{array}\right. \tag{2.8}$$

où $U_-^\varepsilon\,(t,S) = u_-\,(t,s)$ et $F_-\,(t,S) = f_-\,(t,s)$ sont deux fonctions définies sur Ω_-^ε.

2.4.3 Les problèmes élémentaires

Dans ce qui va suivre, pour simplifier, on supposera que $F_- \equiv 0$.
Dans cette sous-section, pour construire un développement asymptotique de u^ε lorsque ε tend vers zéro, on effectue un développement asymptotique dans Ω_+ du type suivant :

$$u_+^\varepsilon = \sum_{n\geq 0} \varepsilon^n u_+^n,$$

et dans la couche mince Ω_-^ε du type suivant :

$$U_-^\varepsilon = \sum_{n\geq 0} \varepsilon^n U_-^n.$$

En injectant les expressions de u_+^ε et U_-^ε dans le problème (2.8) et en les regroupant en fonction des puissances successives de ε, on obtient :
A l'intérieur :

$$\begin{cases} \alpha \Delta u_+^n & = & f_+ \delta_0^n & \textit{dans} & \Omega_+, \\ u_+^n & = & U_-^n & \textit{sur} & \Gamma, \end{cases} \tag{2.9}$$

où δ désigne le symbole de Kronecker ($\delta_0^n = 1$ si $n = 0$ et $\delta_0^n = 0$ si $n \neq 0$).
A l'extérieur :

Cas Dirichlet :

$$\begin{cases} \partial_S^2 U_-^n(t,S) & = & -\displaystyle\sum_{\substack{l+p=n \\ l,p\geq 1}} A_l U_-^p & \textit{pour} \ \ 0 < S < 1, \\ \partial_S U_-^n(t,0) & = & \alpha \partial_n u_+^{n-1}(t,0) - g\delta_1^n & \textit{pour} \ \ S = 0, \\ U_-^n(t,1) & = & 0 & \textit{pour} \ \ S = 1. \end{cases} \tag{2.10}$$

Cas Neumann :

$$\begin{cases} \partial_S^2 U_-^n(t,S) & = & -\displaystyle\sum_{\substack{l+p=n \\ l,p\geq 1}} A_l U_-^p & \textit{pour} \ \ 0 < S < 1, \\ \partial_S U_-^n(t,0) & = & \alpha \partial_n u_+^{n-1}(t,0) - g\delta_1^n & \textit{pour} \ \ S = 0, \\ \partial_S U_-^n(t,1) & = & 0 & \textit{pour} \ \ S = 1. \end{cases} \tag{2.11}$$

2.4.4 Calcul des premiers termes pour le problème de Dirichlet

Termes de rang 0 :

<u>*A l'extérieur*</u> : on a le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} \partial_S^2 U_-^0 (t, S) & = & 0 & \textit{pour} \;\; 0 < S < 1, \\ \partial_S U_-^0 (t, 0) & = & 0 & \textit{pour} \;\; S = 0, \\ U_-^0 (t, 1) & = & 0 & \textit{pour} \;\; S = 1. \end{cases} \tag{2.12}$$

L'équation $\partial_S^2 U_-^0 (t, S) = 0$ implique que :

$$U_-^0 (t, S) = A (t) S + B (t) ,$$

où A et B ne dépendent pas de S.
Les conditions aux limites associées montrent que $A = 0$ et $B = 0$, d'où

$$U_-^0 (t, S) = 0.$$

<u>*A l'intérieur*</u> : on a le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} \alpha \Delta u_+^0 & = & f_+ & \textit{dans} \;\; \Omega_+, \\ u_+^0 (t, 0) & = & U_-^0 (t, S) & \textit{sur} \;\; \Gamma. \end{cases}$$

Comme $u_+^0 (t, 0) = U_-^0 (t, S) = 0$, alors le terme u_+^0 résout le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} \alpha \Delta u_+^0 & = & f_+ & \textit{dans} \;\; \Omega_+, \\ u_+^0 (t, 0) & = & 0 & \textit{sur} \;\; \Gamma. \end{cases} \tag{2.13}$$

Termes de rang 1 :

<u>*A l'extérieur*</u> : on a le problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_S^2 U_-^1 (t, S) & = & 0 & \textit{pour} \;\; 0 < S < 1, \\ \partial_S U_-^1 (t, 0) & = & \alpha \partial_n u_+^0 (t, 0) - g & \textit{pour} \;\; S = 0, \\ U_-^1 (t, 1) & = & 0 & \textit{pour} \;\; S = 1, \end{cases} \tag{2.14}$$

De même, $\partial_S^2 U_-^1 (t, S) = 0$ implique que :

$$U_-^1 (t, S) = A (t) S + B (t) ,$$

et les conditions aux limites en $S = 0$ et $S = 1$ donnent :

$$A = \alpha \partial_n u_+^0 (t, 0) - g \quad et \quad B = -\alpha \partial_n u_+^0 (t, 0) - g,$$

ce qui donne :

$$U_-^1 (t, S) = \left(\alpha \partial_n u_+^0 (t, 0) - g\right) (S - 1) .$$

<u>*A l'intérieur*</u> : on a le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} \alpha \Delta u_+^1 & = & 0 & dans \;\; \Omega_+, \\ u_+^1 (t, 0) & = & U_-^1 (t, S) & sur \quad \Gamma. \end{cases}$$

Comme $u_+^1 (t, 0) = U_-^1 (t, S) = -\alpha \partial_n u_+^0 (t, 0) + g$, alors le terme u_+^1 résout le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} \alpha \Delta u_+^1 & = & 0 & dans \;\; \Omega_+, \\ u_+^1 (t, 0) & = & -\alpha \partial_n u_+^0 (t, 0) + g & sur \quad \Gamma. \end{cases} \tag{2.15}$$

Termes de rang 2 :

Dans ce cas, pour trouver les problèmes résolus par les termes d'ordre 2 de Dirichlet, on utilise les expressions de A_1, A_2, U_-^0 et U_-^1.

<u>*A l'extérieur*</u> : U_-^2 résout le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} \partial_S^2 U_-^2 (t, S) & = & -c (t) \left(\alpha \partial_n u_+^0 (t, 0) - g\right) & pour \;\; 0 < S < 1, \\ \partial_S U_-^2 (t, 0) & = & \alpha \partial_n u_+^1 (t, 0) & pour \quad S = 0, \\ U_-^2 (t, 1) & = & 0 & pour \quad S = 1. \end{cases}$$

On a :

$$\partial_S^2 U_-^2 (t, S) = -c (t) \left(\alpha \partial_n u_+^0 (t, 0) - g\right) .$$

En intégrant cette dernière quantité sur l'intervalle $[1, S]$, on obtient :

$$\partial_S U_-^2 (t, S) - \partial_S U_-^2 (t, 1) = \int_1^S \left[-c (t) \left(\alpha \partial_n u_+^0 (t, 0) - g\right)\right] d\xi.$$

Comme $\partial_S U_-^2 (t, 1) = 0$, alors on obtient :

$$\partial_S U_-^2 (t, S) = -c (t) \left(\alpha \partial_n u_+^0 (t, 0) - g\right) (S - 1) .$$

De même, en intégrant cette dernière quantité sur l'intervalle $[0, S]$, on obtient :

$$U_-^2 (t, S) - U_-^2 (t, 0) = -c (t) \left(\alpha \partial_n u_+^0 (t, 0) - g\right) \frac{(S - 1)^2}{2},$$

comme $U_-^2(t,0) = \alpha\partial_n\left(u_+^1(t,0)\right)(S-1)$, alors on obtient :

$$U_-^2(t,S) = -c(t)\left(\alpha\partial_n u_+^0(t,0) - g\right)\frac{(S-1)^2}{2} + \alpha\partial_n u_+^1(S-1).$$

A l'intérieur : on a le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} \alpha\Delta u_+^2 &= 0 & \textit{dans } \Omega_+, \\ u_+^2 &= U_-^2(t,S) & \textit{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Comme $u_+^2(t,0) = U_-^2(t,S) = \dfrac{-c(t)}{2}\left(\alpha\partial_n u_+^0(t,0) - g\right) - \alpha\partial_n u_+^1(t,0)$, alors le terme u_+^2 résout le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} \alpha\Delta u_+^2 &= 0 & \textit{dans } \Omega_+, \\ u_+^2 &= \dfrac{-c(t)}{2}\left(\alpha\partial_n u_+^0(t,0) - g\right) - \alpha\partial_n u_+^1(t,0) & \textit{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{2.16}$$

2.4.5 Calcul des premiers termes pour le problème de Neumann

Termes de rang 0 :

A l'extérieur : on a le problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_S^2 U_-^0(t,S) &= 0 & \textit{pour } 0 < S < 1, \\ \partial_S U_-^0(t,0) &= 0 & \textit{pour } S = 0, \\ \partial_S U_-^0(t,1) &= 0 & \textit{pour } S = 1. \end{cases} \tag{2.17}$$

La résolution de ce système montre que :

$$U_-^0(t,S) = \beta_0(t),$$

où β_0 est une fonction en t qu'on ne peut pas fixer à ce stade.

Pour déterminer β_0 et fixer ainsi U_-^0, il faut exploiter le problème résolu par le terme extérieur d'ordre 1, U_-^1 :

$$\begin{cases} \partial_S^2 U_-^1(t,S) &= 0, & \textit{pour } 0 < S < 1, \\ \partial_S U_-^1(t,0) &= \alpha\partial_n u_+^0(t,0) - g & \textit{pour } S = 0, \\ \partial_S U_-^1(t,1) &= 0 & \textit{pour } S = 1. \end{cases}$$

On a alors $\partial_S U_-^1(t,S) = 0$ implique que :

$$\partial_S U_-^1(t,S) = \partial_S U_-^1(t,0),$$

et par conséquent :

$$\partial_S U^1_-(t,S) = \alpha \partial_n u^0_+(t,0) - g.$$

Or,

$$\partial_S U^1_-(t,1) = 0,$$

ce qui signifie que l'on a forcément :

$$\alpha \partial_n u^0_+(t,0) = g.$$

En vertu de ces résultats, le terme intérieur u^0_+ est solution du problème :

$$\begin{cases} \alpha \Delta u^0_+ & = & f_+ & \textit{dans} \;\; \Omega_+, \\ \alpha \partial_n u^0_+ & = & g & \textit{sur} \;\; \Gamma. \end{cases} \tag{2.18}$$

Puisque $u^\varepsilon_+ = U^\varepsilon_-$ sur Γ, on peut déterminer $\beta_0(t)$ comme suit :

$$\beta_0(t) = u^0_+(t,0),$$

ce qui permet de fixer U^0_- :

$$U^0_-(t,S) = u^0_+(t,0).$$

Termes de rang 1 :

<u>*A l'extérieur*</u> : on a le problème suivant :

$$\begin{cases} \partial^2_S U^1_-(t,S) & = & 0 & \textit{pour} \;\; 0 < S < 1, \\ \partial_S U^1_-(t,0) & = & \alpha \partial_n u^0_+(t,0) - g & \textit{pour} \;\; S = 0, \\ \partial_S U^1_-(t,1) & = & 0 & \textit{pour} \;\; S = 1. \end{cases} \tag{2.19}$$

La résolution de ce système montre que :

$$U^1_-(t,S) = \beta_1(t),$$

où $\beta_1(t)$ est une fonction en t qu'on déterminera en exploitant le problème satisfait par le terme extérieur d'ordre 2. En effet, U^2_- résout le système :

$$\begin{cases} \partial^2_S U^2_-(t,S) & = & -c(t)\,\partial_S U^1_-(t,S) - \left(\partial^2_t - Sc^2 \partial_S\right) U^0_-(t,S) & \textit{pour} \;\; 0 < S < 1, \\ \partial_S U^2_-(t,0) & = & \alpha \partial_n u^1_+(t,0) & \textit{pour} \;\; S = 0, \\ \partial_S U^2_-(t,1) & = & 0 & \textit{pour} \;\; S = 1. \end{cases} \tag{2.20}$$

On a :

$$\partial_S^2 U_-^2(t,S) = -c(t)\,\partial_S U_-^1(t,S) - \left(\partial_t^2 - Sc^2\partial_S\right) U_-^0(t,S),$$

qu'on intègre sur l'intervalle $[0,1]$, on obtient :

$$\int_0^1 \partial_S^2 U_-^2(t,S)\,dS = \int_0^1 \left[-c(t)\,\partial_S U_-^1(t,S) - \left(\partial_t^2 - Sc^2\partial_S\right) U_-^0(t,S)\right] dS.$$

Il s'ensuit que :

$$\partial_S U_-^2(t,1) - \partial_S U_-^2(t,0) = -\alpha\partial_n u_+^1(t,0) = -\partial_t^2 u_+^0(t,0),$$

donc, u_+^1 est la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \alpha\Delta u_+^1 & = & 0 & \textit{dans } \Omega_+, \\ \alpha\partial_n u_+^1 & = & -\partial_t^2 u_+^0(t,0) & \textit{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{2.21}$$

Puisque $u_-^\varepsilon = U_-^\varepsilon$ sur Γ, on peut déterminer $\beta_1(t)$ comme suit :

$$\beta_1(t) = u_+^1(t,0),$$

ce qui permet de fixer complètement U_-^1 :

$$U_-^1(t,S) = u_+^1(t,0).$$

Termes de rang 2 :

On a le problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_S^2 U_-^2(t,S) & = & -c(t)\,\partial_S U_-^1(t,S) - (\partial_t^2 - Sc^2\partial_S)\,U_-^0(t,S) & \textit{pour } 0 < S < 1, \\ \partial_S U_-^2(t,0) & = & \alpha\partial_n u_+^1(t,0) & \textit{pour } S = 0, \\ \partial_S U_-^2(t,1) & = & 0 & \textit{pour } S = 1. \end{cases} \tag{2.22}$$

On a :

$$\partial_S^2 U_-^2(t,S) = -c(t)\,\partial_S U_-^1(t,S) - \left(\partial_t^2 - Sc^2\partial_S\right) U_-^0(t,S).$$

On intègre cette dernière quantité sur l'intervalle $[1,S]$, on obtient :

$$\int_1^S \partial_\xi^2 U_-^2(t,\xi)\,d\xi = \int_1^S \left[-c(t)\,\partial_\xi U_-^1(t,\xi) - \left(\partial_t^2 - \xi c^2\partial_\xi\right) U_-^0(t,\xi)\right] d\xi.$$

Il s'ensuit que :

$$\partial_S U_-^2(t,S) - \partial_S U_-^2(t,1) = -\int_1^S \partial_t^2 U_-^0(t,\xi)\, d\xi,$$

ce qui donne aussi :

$$\partial_S U_-^2(t,S) - \partial_S U_-^2(t,1) = -\partial_t^2 U_-^0(t,S)(S-1).$$

Comme $\partial_S U_-^2(t,1) = 0$ et $U_-^0(t,S) = u_+^0(t,0)$, on obtient :

$$\partial_S U_-^2(t,S) = -\partial_t^2 U_-^0(t,S)(S-1) = -\partial_t^2\left(u_+^0(t,0)\right)(S-1).$$

On intègre cette dernière quantité sur l'intervalle $[0,S]$, il vient :

$$\int_0^S \partial_\xi U_-^2(t,\xi)\, d\xi = -\int_0^S \partial_t^2\left(u_+^0(t,0)\right)(\xi-1)\, d\xi.$$

Il s'ensuit que :

$$U_-^2(t,S) - U_-^2(t,0) = -\int_0^S \partial_t^2\left(u_+^0(t,0)\right)(\xi-1)\, d\xi,$$

soit encore :

$$U_-^2(t,S) - U_-^2(t,0) = -\frac{(S-1)^2}{2}\partial_t^2 u_+^0(t,0),$$

donc

$$U_-^2(t,S) = -\frac{(S-1)^2}{2}\partial_t^2 u_+^0(t,0) + U_-^2(t,0).$$

On pose $\beta_2 = U_-^2(t,0)$, fonction qu'on déterminera en exploitant le système résolu par le terme extérieur U_-^3. On a :

$$\partial_S^2 U_-^3(t,S) = -A_3 U_-^0(t,S) - A_2 U_-^1(t,S) - A_1 U_-^2(t,S).$$

Dans cette dernière quantité, en remplaçant les expressions de A_0, A_2 et A_3 , on obtient :

$$\partial_S^2 U_-^3(t,S) = 2cS\partial_t^2 U_-^0(t,S) + c' S\partial_t U_-^0(t,S) - \partial_t^2 U_-^1(t,S) - c\partial_S U_-^2(t,S). \tag{2.23}$$

D'après les calculs précédents, on a :

$$\partial_S U_-^2(t,S) = -\partial_t^2\left(u_+^0(t,0)\right)(S-1) \quad et \quad U_-^\varepsilon(t,S) = u_+^\varepsilon(t,0). \tag{2.24}$$

En injectant (2.24) dans (2.23), on obtient :

$$\partial_S^2 U_-^3(t,S) = 2cS\partial_t^2 u_+^0(t,0) + c' S\partial_t u_+^0(t,0) - \partial_t^2 u_+^1(t,0) + c\partial_t^2\left(u_+^0(t,0)\right)(S-1),$$

on intègre cette dernière expression sur l'intervalle $[0,1]$, on obtient :

$$\int_0^1 \partial_S^2 U_-^3\,(t,S)\,dS = \int_0^1 \left[2cS\partial_t^2 u_+^0\,(t,0) + c'S\partial_t u_+^0\,(t,0) - \partial_t^2 u_+^1\,(t,0) + c\partial_t^2\left(u_+^0\,(t,0)\right)(S-1)\right] dS.$$

Il s'ensuit que :

$$\partial_S U_-^3\,(t,1) - \partial_S U_-^3\,(t,0) = c\partial_t^2 u_+^0\,(t,0) + \frac{c'}{2}\partial_t u_+^0\,(t,0) - \partial_t^2 u_+^1\,(t,0) - \frac{c}{2}\partial_t^2 u_+^0\,(t,0)\,,$$

comme $\partial_S U_-^3\,(t,1) = 0$ et $\partial_S U_-^3\,(t,0) = \alpha\partial_n u_+^2$, on obtient :

$$\alpha\partial_n u_+^2 = -\frac{c}{2}\partial_t^2 u_+^0\,(t,0) - \frac{c'}{2}\partial_t u_+^0\,(t,0) + \partial_t^2 u_+^1\,(t,0)\,,$$

donc, u_+^2 est la solution du problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcll} \alpha\Delta u_+^2 & = & 0 & \textit{dans}\ \ \Omega_+, \\ \alpha\partial_n u_+^2 & = & -\frac{c}{2}\partial_t^2 u_+^0\,(t,0) - \frac{c'}{2}\partial_t u_+^0\,(t,0) + \partial_t^2 u_+^1\,(t,0) & \textit{sur}\quad \Gamma, \end{array}\right. \tag{2.25}$$

puisque $u_\varepsilon^+ = U_-^\varepsilon$ sur Γ, on peut déterminer $\beta_2\,(t)$ comme suit :

$$\beta_2\,(t) = u_+^2\,(t,0)\,,$$

ce qui permet de fixer U_-^2 :

$$U_-^2\,(t,S) = u_+^2\,(t,0)\,.$$

2.5 Le développement complet. Estimation du reste

Le procédé décrit précédemment peut-être poursuivi à tout ordre, pourvu que les données soient suffisamment régulières. Il permet l'obtention du développement asymptotique de la solution u^ε du problème. On peut aussi estimer l'erreur commise en tronquant la série à un nombre fini de termes. Ceci est illustré dans le théorème suivant :

Théorème 2.2. *Si f_+ et f_- sont de classe C^∞, $g \in C^\infty$ et Γ une courbe de classe C^∞. On peut construire la suite $\left(u_+^n, U_-^n\right)$-indépendante de ε- définie par les équations de* (2.9), (2.10) *et* (2.11). *Alors, la solution u^ε du problème* (2.1) *admet le développement asymptotique suivant :*

$$u^\varepsilon = \sum_{n\geq 0} \varepsilon^n u^n \quad \textit{où} \quad u^n|_{\Omega_+} = u_+^n \ \ \textit{et} \ \ u^n|_{\Omega_-^\varepsilon}\,(t,s) = U_-^n\,(t,S)\,.$$

Les termes u_+^n et U_-^n ne dépendent pas du paramètre ε, ces termes on peut les construire par les équations de (2.9), (2.10) *et* (2.11).

En définissant le reste d'ordre N comme la différence entre la solution exacte et la série tronquée :

$$r_\varepsilon^N = u^\varepsilon - \sum_{n=0}^{n=N} \varepsilon^n u^n,$$

on a l'estimation suivante :

$$\left\| r_{\varepsilon,+}^N \right\|_{1,\Omega_+} + \sqrt{\varepsilon} \left\| r_{\varepsilon,-}^N \right\|_{1,\Omega_-^\varepsilon} \leq C_N \varepsilon^{N+1},$$

où C_N ne dépend pas de ε.

Remarque 2.2. L'estimation du théorème 2.1 n'assure pas la convergence de la série $\sum u^n$. On s'intéresse alors à la convergence de r_ε^N quand ε tend vers 0 et pas quand N tend vers l'infini (dans ce cas, on dit que cette série est convergente au sens des développements asymptotiques).

Preuve. Si les seconds membres f_+ et f_- sont de classe C^∞, alors les problèmes (2.9) et (2.10) sont bien posés dans $H_0^1(\Omega^\varepsilon)$ (cas Dirichlet) et les problèmes (2.9) et (2.11) sont bien posés dans $H^1(\Omega^\varepsilon)$ (cas Neumann).

Maintenant, nous examinons le reste r_ε^N comme suit :

Dans Ω_-^ε :

$$\begin{aligned}
\Delta r_{\varepsilon,-}^N &= \Delta u_-^\varepsilon - \sum_{n=0}^{N} \varepsilon^n \Delta u_-^n \\
&= \Delta u_-^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n=0}^{N} \varepsilon^n \left[\partial_S^2 U_-^n + \sum_{l=1}^{N} \varepsilon^l A_l U_-^n + O\left(\varepsilon^{N+1}\right) \right] \\
&= \Delta u_-^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n=0}^{N} \varepsilon^n \partial_S^2 U_-^n - \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n=0}^{N} \varepsilon^n \sum_{l=1}^{N} \varepsilon^l A_l U_-^n + O\left(\varepsilon^{N-1}\right) \\
&= f_- - \sum_{n=0}^{N} \varepsilon^{n-2} F_-^{n-2}(t)\, S^{n-2} - \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{l=1}^{N} \left[\sum_{n=l}^{N} \varepsilon^n A_l U_-^{n-l} - \sum_{n=l}^{N+l} \varepsilon^n A_l U_-^{n-l} \right] + O\left(\varepsilon^{N-1}\right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{l=1}^{N} \left[\sum_{n=N+1}^{N+l} \varepsilon^n A_l U_-^{n-l} \right] + O\left(\varepsilon^{N-1}\right) \\
&= O\left(\varepsilon^{N-1}\right),
\end{aligned}$$

donc, on écrit :

$$\Delta r_{\varepsilon,-}^N = O\left(\varepsilon^{N-1}\right).$$

Dans Ω_+ :

$$\begin{aligned}\alpha\Delta r^N_{\varepsilon,+} &= \alpha\Delta\left(u^\varepsilon_+ - \sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n u^n_+\right)\\ &= \alpha\Delta u^\varepsilon_+ - \sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n\alpha\Delta u^n_+\\ &= f_+ - \sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n\alpha\Delta u^n_+.\end{aligned}$$

D'après (2.9), on a :

$$\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n\alpha\Delta u^n_+ = \sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n f_+\delta^n_0,$$

donc, on aura :

$$\alpha\Delta r^N_{\varepsilon,+} = 0.$$

Sur Γ : Pour la dérivée normale

$$\begin{aligned}\alpha\partial_n r^N_{\varepsilon,+} - \partial_n r^N_{\varepsilon,-} &= \alpha\partial_n\left(u^\varepsilon_+ - \sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n u^n_+\right) - \partial_n\left(u^\varepsilon_- - \sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n U^n_-\right)\\ &= \alpha\partial_n u^\varepsilon_+ - \partial_n u^\varepsilon_- + \sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n\left(\partial_n U^n_- - \alpha\partial_n u^n_+\right)\\ &= g + \sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n\left(\partial_n U^n_- - \alpha\partial_n u^n_+\right).\end{aligned}$$

D'après (2.10) ou (2.11), on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n\left(\partial_n U^n_- - \alpha\partial_n u^n_+\right) &= \sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n\left[\left(\alpha\partial_n u^{n-1}_+ - g\delta^n_1\right) - \alpha\partial_n u^n_+\right]\\ &= -g + \varepsilon^N\alpha\partial_n u^N_+,\end{aligned}$$

d'où

$$\alpha\partial_n r^N_{\varepsilon,+} - \partial_n r^N_{\varepsilon,-} = \varepsilon^N\alpha\partial_n u^N_+,$$

donc, on aura :

$$\alpha\partial_n r^N_{\varepsilon,+} - \partial_n r^N_{\varepsilon,-} = O\left(\varepsilon^N\right).$$

Puisque $U^\varepsilon_- = u^\varepsilon_+$, donc il est claire que :

$$r^N_{\varepsilon,+} = r^N_{\varepsilon,-}.$$

Sur Γ_-^ε :

Pour Dirichlet : (2.10) nous donne :

$$r_{\varepsilon,-}^N = u_-^\varepsilon - \sum_{n=0}^{N} \varepsilon^n U_-^n = 0.$$

Pour Neumann : (2.11) nous donne :

$$\partial_n r_{\varepsilon,-}^N = \partial_n u_-^\varepsilon - \sum_{n=0}^{N} \varepsilon^n \partial_n U_-^n = 0.$$

Ainsi, on déduit que r_ε^N vérifie le problème suivant :

$$\begin{cases} \alpha \Delta r_{\varepsilon,+}^N & = & 0 & \textit{dans} \;\; \Omega_+, \\ \Delta r_{\varepsilon,-}^N & = & O\left(\varepsilon^{N-1}\right) & \textit{dans} \;\; \Omega_-^\varepsilon, \\ \alpha \partial_n r_{\varepsilon,+}^N & = & \partial_n r_{\varepsilon,-}^N + O\left(\varepsilon^N\right) & \textit{sur} \;\; \Gamma, \\ r_{\varepsilon,+}^N & = & r_{\varepsilon,-}^N & \textit{sur} \;\; \Gamma, \\ r_{\varepsilon,-}^N & = & 0 & \textit{sur} \;\; \Gamma_-^\varepsilon, \quad (\textit{Dirichlet}) \\ & \boldsymbol{ou} & & \\ \partial_n r_{\varepsilon,-}^N & = & 0 & \textit{sur} \;\; \Gamma_-^\varepsilon. \quad (\textit{Neumann}) \end{cases}$$

L'estimation à priori du théorème 2.2 permet de déduire que :

$$\left\| r_{\varepsilon,+}^N \right\| = O\left(\varepsilon^{N-1}\right).$$

Pour obtenir la majoration annoncée, il suffit d'écrire :

$$r_\varepsilon^N = r_\varepsilon^{N+2} + \varepsilon^{N+1} u^{N+1} + \varepsilon^{N+2} u^{N+2}.$$

Pour l'estimation à l'intérieur on a :

$$\begin{array}{rcl} \left\| r_{\varepsilon,+}^N \right\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} & = & \left\| r_\varepsilon^{N+2} + \varepsilon^{N+1} u_+^{N+1} + \varepsilon^{N+2} u_+^{N+2} \right\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \\ & \leq & \left\| r_\varepsilon^{N+2} \right\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} + \varepsilon^{N+1} \left\| u_+^{N+1} \right\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} + \varepsilon^{N+2} \left\| u_+^{N+2} \right\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \\ & \leq & C_0 \varepsilon^{N+2} + C_1 \varepsilon^{N+1} + C_2 \varepsilon^{N+2}, \end{array}$$

on déduit alors que :

$$\left\| r_{\varepsilon,+}^N \right\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \leq C \varepsilon^{N+1}.$$

Pour la partie extérieure, l'utilisation de la variable semi-dilatée donne :

$$R_-^N = U_-^\varepsilon - \sum_{n=0}^{N} \varepsilon^n U_-^n,$$

avec R_-^N est le reste d'ordre N dans les variables (t, S).
De même, on obtient :

$$\| R_-^N \|_{1,\Omega_-^\varepsilon} \leq C' \varepsilon^{N+1}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\left\| r_{\varepsilon,-}^N \right\|_{1,\Omega_-^\varepsilon}^2 &= \int_0^\varepsilon \int_\Gamma \left(r_{\varepsilon,-}^N\right)^2 + \int_0^\varepsilon \int_\Gamma \left(\frac{\partial r_{\varepsilon,-}^N}{\partial t}\right)^2 + \int_0^\varepsilon \int_\Gamma \left(\frac{\partial r_{\varepsilon,-}^N}{\partial s}\right)^2 \\
&= \varepsilon \int_0^1 \int_{\Omega_-} \left(R_{\varepsilon,-}^N\right)^2 + \varepsilon \left(\int_0^1 \int_{\Omega_-} \left(\frac{\partial R_{\varepsilon,-}^N}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^1 \int_{\Omega_-} \left(\frac{\partial R_{\varepsilon,-}^N}{\partial S}\right)^2 \right) \\
&= \varepsilon \left\| R_{\varepsilon,-}^N \right\|_{L^2(\Omega_-)}^2 + \varepsilon \left\| \frac{\partial R_{\varepsilon,-}}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega_-)}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \left\| \frac{\partial R_{\varepsilon,-}}{\partial S} \right\|_{L^2(\Omega_-)}^2 \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon} \left(\left\| R_{\varepsilon,-}^N \right\|_{L^2(\Omega_-)}^2 + \left\| \frac{\partial R_{\varepsilon,-}^N}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega_-)}^2 + \left\| \frac{\partial R_{\varepsilon,-}^N}{\partial S} \right\|_{L^2(\Omega_-)}^2 \right) \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon} \left\| R_{\varepsilon,-}^N \right\|_{H^1(\Omega_-)}^2,
\end{aligned}$$

ce qui signifie que :

$$\left\| r_{\varepsilon,-}^N \right\|_{1,\Omega_-^\varepsilon} \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left\| R_{\varepsilon,-}^N \right\|_{1,\Omega_-}.$$

Comme $\left\| R_{\varepsilon,-}^N \right\|_{1,\Omega_-} \leq C' \varepsilon^{N+1}$, on déduit alors que :

$$\left\| r_{\varepsilon,-}^N \right\|_{1,\Omega_-^\varepsilon} \leq C' \varepsilon^{N+\frac{1}{2}},$$

par conséquent :

$$\left\| r_{\varepsilon,+}^N \right\| + \sqrt{\varepsilon} \left\| r_{\varepsilon,-}^N \right\| \leq C_N \varepsilon^{N+1}.$$

2.6 Conditions aux limites approchées

Le but de cette section est de construire des conditions aux limites approchées qui prendront en compte l'effet de la couche mince. La méthode consiste à approcher u_+^ε par la série donnant son développement asymptotique tronqué à un ordre donné, les conditions vérifiées par cette approximation en $x = 0$ fournissent les conditions aux limites approchées recherchées.

2.6.1 Conditions aux limites approchées pour le problème de Dirichlet

Approximation d'ordre 0 :

Pour obtenir une approximation d'ordre 0 de la solution, on tronque le développement asymptotique de u_+ à l'ordre 0 et on pose :

$$u_+^{\{0\}}(x) = u_+^0(x),$$

on a alors :

$$u_+^{\{0\}}(0) = u_+^0(0).$$

Or, $u_+^0(0) = 0$, on déduit alors la condition aux limites approchées d'ordre 0 :

$$u_+^{\{0\}}(0) = 0.$$

Par conséquent, le problème approché d'ordre 0 est donné par :

$$\begin{cases} \alpha\Delta u_+^{\{1\}} & = & f_+ & dans & \Omega_+, \\ u_+^{\{0\}}(0) & = & 0 & sur & \Gamma. \end{cases}$$

Approximation d'ordre 1 :

Ici, on tronque le développement asymptotique de u_+ à l'ordre 1, et on pose :

$$u_+^{\{1\}}(x) = u_+^0(x) + \varepsilon u_+^1(x),$$

on a alors :

$$u_+^{\{1\}}(0) = u_+^0(0) + \varepsilon u_+^1(0).$$

Or, d'après les calculs précédents, $u_+^0(0) = 0$ et $u_+^1(0) = -\alpha\partial_n u_+^0(0) + g$, ce qui donne :

$$u_+^{\{1\}}(0) = -\varepsilon\alpha\partial_n u_+^0(0) + \varepsilon g.$$

Comme $u_+^0(0) = u_+^{\{1\}}(0) - \varepsilon u_+^1(0)$, l'équation ci-dessus devient :

$$u_+^{\{1\}}(0) + \varepsilon\alpha\partial_n u_+^{\{1\}}(0) - \varepsilon g = \varepsilon^2\alpha\partial_n u_+^1(0),$$

soit encore :

$$u_+^{\{1\}}(0) + \varepsilon\alpha\partial_n u_+^{\{1\}}(0) - \varepsilon g = O\left(\varepsilon^2\right).$$

Ceci suggère l'idée de négliger le terme en $O(\varepsilon^2)$ pour obtenir une condition aux limites approchée d'ordre 1. Celle-ci s'écrit alors :

$$u_+^{\{1\}}(0) + \varepsilon\alpha\partial_n u_+^{\{1\}}(0) - \varepsilon g = 0.$$

Par conséquent, le problème approché d'ordre 1 est donné par :

$$\begin{cases} \alpha\Delta u_+^{\{1\}} & = & f_+ & dans & \Omega_+, \\ u_+^{\{1\}}(0) + \varepsilon\alpha\partial_n u_+^{\{1\}}(0) - \varepsilon g & = & 0 & sur & \Gamma. \end{cases}$$

Approximation d'ordre 2 :

Pour simplifier, on suppose que $g = 0$.
On tronque le développement asymptotique de u_+ à l'ordre 2, et on pose :

$$u_+^{\{2\}}(x) = u_+^0(x) + \varepsilon u_+^1(x) + \varepsilon^2 u_+^2(x).$$

En $x = 0$, on a :

$$u_+^{\{2\}}(0) = u_+^0(0) + \varepsilon u_+^1(0) + \varepsilon^2 u_+^2(0).$$

Sachant que : $u_+^0(0) = 0$, $u_+^1(0) = -\alpha\partial_n u_+^0(0)$ et que $u_+^2(0) = -\frac{c}{2}\alpha\partial_n u_+^0(0) - \alpha\partial_n u_+^1(0)$, on déduit que :

$$u_+^{\{2\}}(0) + \varepsilon\alpha\partial_n u_+^0(0) + \varepsilon^2\frac{c}{2}\alpha\partial_n u_+^0(0) + \varepsilon^2\alpha\partial_n u_+^1(0) = 0,$$

comme $u_+^0(0) = u_+^{\{2\}}(0) - \varepsilon u_+^1(0) - \varepsilon^2 u_+^2(0)$, on déduit que :

$$u_+^{\{2\}}(0) + \frac{\varepsilon}{2}(2 + \varepsilon c)\,\alpha\partial_n u_+^{\{2\}}(0) - \varepsilon^3\alpha\partial_n u_+^2(0) - \varepsilon^3\frac{c}{2}\alpha\partial_n u_+^1(0) - \varepsilon^4\frac{c}{2}\alpha\partial_n u_+^2(0) = 0,$$

soit encore :

$$u_+^{\{2\}}(0) + \frac{\varepsilon}{2}(2 + \varepsilon c)\,\alpha\partial_n u_+^{\{2\}}(0) = O\left(\varepsilon^3\right).$$

Pour obtenir une condition approchée d'ordre 2, on néglige le terme en $O(\varepsilon^3)$ et on obtient :

$$u_+^{\{2\}}(0) + \frac{\varepsilon}{2}(2 + \varepsilon c)\,\alpha\partial_n u_+^{\{2\}}(0) = 0.$$

Par conséquent, le problème approché d'ordre 2 est donné par :

$$\begin{cases} \alpha\Delta u_+^{\{1\}} & = & f_+ & dans & \Omega_+, \\ u_+^{\{2\}}(0) + \frac{\varepsilon}{2}(2 + \varepsilon c)\,\alpha\partial_n u_+^{\{2\}}(0) & = & 0 & sur & \Gamma. \end{cases}$$

2.6.2 Conditions aux limites approchées pour le problème de Neumann

Approximation d'ordre 0 :

Pour obtenir une approximation d'ordre 0 de la solution, on tronque le développement asymptotique de u_+ à l'ordre 0 et on pose :

$$u_+^{\{0\}}(x) = u_+^0(x),$$

soit encore :

$$\partial_n u_+^{\{0\}}(x) = \partial_n u_+^0(x),$$

on a alors :

$$\partial_n u_+^{\{0\}}(0) = \partial_n u_+^0(0).$$

Or, $\partial_n u_+^0(0) = g$, on déduit alors la condition aux limites approchée d'ordre 0 :

$$\partial_n u_+^{\{0\}}(0) - g = 0.$$

Par conséquent, le problème approché d'ordre 0 est donné par :

$$\begin{cases} \alpha \Delta u_+^{\{1\}} & = & f_+ & dans & \Omega_+, \\ \partial_n u_+^{\{0\}}(0) - g & = & 0 & sur & \Gamma. \end{cases}$$

Approximation d'ordre 1 :

Ici, on tronque le développement asymptotique de u_+ à l'ordre 1, et on pose :

$$u_+^{\{1\}}(x) = u_+^0(x) + \varepsilon u_+^1(x),$$

soit encore :

$$\partial_n u_+^{\{1\}}(x) = \partial_n u_+^0(x) + \varepsilon \partial_n u_+^1(x),$$

on a alors :

$$\partial_n u_+^{\{1\}}(0) = \partial_n u_+^0(0) + \varepsilon \partial_n u_+^1(0).$$

Or, d'après les calculs précédents, $\partial_n u_+^0(0) = g$ et $\partial_n u_+^1(0) = \partial_t^2 u_+^0(0)$, ce qui donne :

$$\partial_n u_+^{\{1\}}(0) - g - \varepsilon \partial_t^2 u_+^0(0) = 0.$$

Comme $u_+^0(0) = u_+^{\{1\}}(0) - \varepsilon u_+^1(0)$, l'équation ci-dessus devient :

$$\partial_n u_+^{\{1\}}(0) - g - \varepsilon \partial_t^2 u_+^{\{1\}}(0) + \varepsilon^2 \partial_t^2 u_+^1(0) = 0,$$

soit encore :

$$\partial_n u_+^{\{1\}}(0) - g - \varepsilon \partial_t^2 u_+^{\{1\}}(0) = O\left(\varepsilon^2\right).$$

Ceci suggère l'idée de négliger le terme en $O(\varepsilon^2)$ pour obtenir une condition aux limites approchée d'ordre 1. Celle-ci s'écrit alors :

$$\partial_n u_+^{\{1\}}(0) - g - \varepsilon \partial_t^2 u_+^{\{1\}}(0) = 0.$$

Par conséquent, le problème approché d'ordre 1 est donné par :

$$\begin{cases} \alpha \Delta u_+^{\{1\}} & = & f_+ & dans & \Omega_+, \\ \partial_n u_+^{\{1\}}(0) - g - \varepsilon \partial_t^2 u_+^{\{1\}}(0) & = & 0 & sur & \Gamma. \end{cases}$$

Approximation d'ordre 2 :

Pour simplifier, on suppose $g = 0$.

On tronque le développement asymptotique de u_+ à l'ordre 2, et on pose :

$$u_+^{\{2\}}(x) = u_+^0(x) + \varepsilon u_+^1(x) + \varepsilon^2 u_+^2(x),$$

soit encore :

$$\partial_n u_+^{\{2\}}(x) = \partial_n u_+^0(x) + \varepsilon \partial_n u_+^1(x) + \varepsilon^2 \partial_n u_+^2(x).$$

En $x = 0$, on a :

$$\partial_n u_+^{\{2\}}(0) = \partial_n u_+^0(0) + \varepsilon \partial_n u_+^1(0) + \varepsilon^2 \partial_n u_+^2(0).$$

Sachant que $\partial_n u_+^2(0) = \frac{c}{2} \partial_t^2 u_+^0(0) + \partial_t^2 u_+^1(0) - \frac{c'}{2} \partial_t u_+^0(0) - c \partial_t^2 u_+^0(0)$, $\partial_n u_+^0(0) = g = 0$, et que $\partial_n u_+^1(0) = \partial_t^2 u_+^0(0)$, on déduit que :

$$\partial_n u_+^{\{2\}}(0) - \varepsilon \partial_t^2 u_+^0(0) - \varepsilon^2 \frac{c}{2} \partial_t^2 u_+^0(0) - \varepsilon^2 \partial_t^2 u_+^1(0) + \varepsilon^2 \frac{c'}{2} \partial_t u_+^0(0) + \varepsilon^2 c \partial_t^2 u_+^0(0) = 0.$$

Comme $u_+^0(0) = u_+^{\{2\}}(0) - \varepsilon u_+^1(0) - \varepsilon^2 u_+^2(0)$, l'équation ci-dessus devient :

$$\begin{aligned} \partial_n u_+^{\{2\}}(0) & - \varepsilon \partial_t^2 u_+^{\{2\}}(0) + \varepsilon^2 \frac{c}{2} \partial_t^2 u_+^{\{2\}}(0) + \varepsilon^2 \frac{c'}{2} \partial_t u_+^{\{2\}}(0) + \varepsilon^3 \partial_t^2 u_+^2(0) + \varepsilon^3 \frac{c}{2} \partial_t^2 u_+^1(0) \\ & - \varepsilon^3 \frac{c'}{2} \partial_t u_+^1(0) - \varepsilon^3 c \partial_t^2 u_+^1(0) + \varepsilon^4 \frac{c}{2} \partial_t^2 u_+^2(0) - \varepsilon^4 \frac{c'}{2} \partial_t u_+^2(0) - \varepsilon^4 c \partial_t^2 u_+^2(0) = 0, \end{aligned}$$

soit encore :

$$\partial_n u_+^{\{2\}}(0) - \frac{\varepsilon}{2}(2 - c\,\varepsilon)\,\partial_t^2 u_+^{\{2\}}(0) + \varepsilon^2 \frac{c'}{2} \partial_t u_+^{\{2\}}(0) = O\left(\varepsilon^3\right).$$

Ceci suggère l'idée de négliger le terme en $O(\varepsilon^3)$ pour obtenir une condition aux limites approchée d'ordre 2. Celle-ci s'écrit alors :

$$\partial_n u_+^{\{2\}}(0) - \frac{\varepsilon}{2}(2 - c\,\varepsilon)\,\partial_t^2 u_+^{\{2\}}(0) + \varepsilon^2 \frac{c'}{2} \partial_t u_+^{\{2\}}(0) = 0.$$

Par conséquent, le problème approché d'ordre 1 est donné par :

$$\begin{cases} \alpha \Delta u_+^{\{1\}} & = & f_+ & dans \;\; \Omega_+, \\ \partial_n u_+^{\{2\}}(0) - \dfrac{\varepsilon}{2}(2 - c\,\varepsilon)\,\partial_t^2 u_+^{\{2\}}(0) + \varepsilon^2 \dfrac{c'}{2} \partial_t u_+^{\{2\}}(0) & = & 0 & sur \;\; \Gamma. \end{cases}$$

2.6.3 Estimation d'erreur

Nous allons maintenant établir une estimation d'erreur entre la solution exacte du problème u_+^ε et la solution approchée.

A l'ordre 1

On note par $u^{\{1\}}$ la solution approchée du problème approché suivant :

$$\begin{cases} \alpha \Delta u_+^{\{1\}} & = & f & dans \;\; \Omega_+, \\ u_+^{\{1\}} + \alpha \varepsilon \partial_n u_+^{\{1\}} - \varepsilon g & = & 0 & sur \;\; \Gamma. \end{cases} \tag{2.26}$$

Pour calculer l'estimation d'erreur entre la solution de ce problème approché et celle du problème initial, il suffit de calculer $\left\| u_+^\varepsilon - u_+^{\{1\}} \right\|_{H^1(\Omega_+)}$.
La démonstration de cette estimation est analogue à celle étudiée dans le chapitre 1.
On obtient alors une estimation de ε^2 :

$$\left\| u_+^\varepsilon - u_+^{\{1\}} \right\|_{H^1(\Omega_+)} \leq C\varepsilon^2.$$

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'analyse asymptotique d'un problème de transmission en dimension 1 et en dimension 2. La construction d'un développement asymptotique de la solution a permis d'identifier des modèles approchés ne faisant pas intervenir la couche mince qui rendent compte de son effet. Cet effet se traduit par des nouvelles conditions aux limites sur l'interface de jonction. L'approche adopté dans cette étude s'applique à d'autres modèles plus compliqués (bilaplacien, non linéaires, ... etc) et se généralise aussi à d'autres géométries (par exemples : des domaines avec coins, ...).

Bibliographie

[1] Article de Grégory Vial, *Asymptotic expansion of the solution of an interface problem in a polygonal domain with thin layer.*

[2] Sanchez-hubert, et E-Sanchez Palencia. *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation.* Masson. 1992.

[3] Cousteix, J. and Mauss, J. *Analyse asymptotique et couche limite*, Springer. 2006.

[4] Brezis H., *Analyse fonctionnelle (Théorie et applications)* Masson Paris. 1983.

[5] Dautray R., Lions J.L., *Analyse mathématique et calcul numérique **4**, Masson Paris. 1985.*

[6] Doneddu A., *Géométrie différentielle. Intégrales multiples **6** Vuibert Paris. 1978.*