



**Faculté des Sciences
Département des Mathématiques**

Mémoire de MASTER II
Spécialité: MATHEMATIQUES
Option: Modélisation Mathématique
Intitulé du mémoire

**Contrôleur \mathcal{H}_∞ basé-observateur pour une classe de systèmes
non linéaires à paramètres incertains**

Réalisé par :

SAIDJ Lynda

Devant le jury d'examen composé de :

_____	_____	_____	UMMTO	Président
Bedouhene	Fazia	Professeur	UMMTO	Rapporteur
_____	_____	_____	UMMTO	Examinateur
_____	_____	_____	UMMTO	Examinatrice
Kheloufi	Houria	Doctorante	UMMTO	Invitée

Promotion: 2013/2014

Table des matières

Notations	3
Introduction générale	4
1 Outils de base pour l'analyse de la stabilisation des systèmes linéaires	7
1.1 Introduction	7
1.2 Matrices carrées définies en signe: la relation d'ordre partiel de Loëwner	7
1.3 Représentation d'état d'un système de contrôle linéaire	8
1.4 Point d'équilibre ou point stationnaire	10
1.5 Stabilité au sens de Lyapunov	10
1.6 Stabilisation par retour d'état statique	12
1.7 Stabilisation par retour d'état dynamique	12
1.7.1 Observabilité des systèmes linéaires	12
1.7.2 Estimation d'état des systèmes linéaire: Observateur de Luenberger	13
1.7.3 Stabilisation d'un système linéaire par retour d'état dynamique	15
1.8 Les LMI	16
1.8.1 Les BMI	17
1.8.2 Un outil utile: le complément de Schur	17
1.9 Problème standard \mathcal{H}_∞	18
2 Commande \mathcal{H}_∞ basé observateur pour une classe de systèmes Lipschitziens à temps discret et à paramètres incertains	21
2.1 Introduction	21
2.2 Préliminaire et position du problème	25
2.3 Conception d'un contrôleur \mathcal{H}_∞ basé-observateur	28
2.4 Commentaires sur les méthodes de [Kheloufi et al.(2013d)] et [Ibrir(2008)]	33
2.4.1 Discussions sur la méthode de [Kheloufi et al.(2013d)]	33
2.4.2 Commentaire sur le résultat de [Ibrir(2008)]	34
2.5 Application numérique	35

Notations

Certaines notations seront utilisées tout au long de ce mémoire que nous listons ci-dessous :

- A^T : représente la matrice transposée de A .
- $(*)$: est utilisée pour introduire un bloc de symétrie.
- Pour une matrice carré S , $S > 0$, ($S < 0$) est une matrice semi définie positive (semi définie négative).
- $e_s(i) = \underbrace{(0, \dots, \overbrace{1}^{i\text{eme}}, \dots, 0)}_{s \text{ composantes}}^T \in \mathbb{R}^s$; $s \geq 1$ est un vecteur de base canonique de \mathbb{R}^s .
- $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne usuelle.
- La notation $\|x\|_{l_2^s} = \left(\sum_{k=0}^{k=\infty} \|x(k)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ est une norme de l_2 du vecteur $x \in \mathbb{R}^s$.
- L'ensemble l_2^s est l'espace des suites de vecteurs de \mathbb{R}^s carrés sommables :

$$l_2^s = \{x \in \mathbb{R}^s, \|x\|_{l_2^s} < +\infty\}$$

muni de la norme

$$\|x\|_{l_2^s} = \left(\sum_{k=0}^{k=\infty} \|x(k)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Introduction générale

Souvent, les modèles linéaires ont été considérés comme suffisamment bons et suffisamment précis pour traduire le comportement d'un système donné. En pratique, ceci n'est pas vrai à cause de la notion d'incertitudes dans la modélisation et de la présence de non linéarité. Un modèle incertain est défini comme modèle approchant un système réel. En effet, un système se modélise dans l'espace d'état sous la forme $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$. Cette représentation est sensée être la plus complète possible et représenter tous les modes de fonctionnement. C'est de là (l'avantage d'être une représentation complète) que naquit la modélisation incertaine, comme approche débutante dont l'objectif de représenter le système.

Dans la littérature, on pourra dire que l'un des premiers ouvrages où l'on a pris en compte explicitement une incertitude fut publié par Horowitz en 1960 [Garcia et al., 1997]. Il y a eu synthèse d'une loi de commande robuste pour ces systèmes incertains et pas mal d'autres méthodes ont pu être développées dans ce contexte. Mais, bien que très élégante de point de vue mathématique, ces techniques ne pouvaient être facilement extensibles au milieu industriel. Les automaticiens trouvaient ces techniques peu réalistes pour représenter les systèmes où les incertitudes étaient fortement présentées. La demande d'une représentation plus fidèle pour être utilisable se faisait réclamer. Cette difficulté a contribué à une baisse importante de l'intérêt porté à ces systèmes pendant les années 1970. C'est pendant la période allant de 1970 à 1980, que l'intérêt pour ces problèmes de robustesse reprit place.

Plusieurs résultats importants contribuèrent alors au redéveloppement de la commande robuste (entre autre les résultats de Lyapunov, [Garcia et al., 1997]). Un autre élément non négligeable est l'avancée considérable des techniques numériques comme l'utilisation des inégalités matricielles linéaires (LMI) [Boyd et al., 1994]. La recherche sur les systèmes linéaires est alors relancée dans le contexte de la commande robuste [Zhou et al., 1996], [Bhattacharyya et al., 1995a]...

D'après [Daafouz, 1997],[Garcia, 1999], l'origine des incertitudes dans un système serait lié aux trois points cités ci-après :

- Une connaissance imparfaite des valeurs numériques des paramètres du modèle obtenu.
- Les approximations et les erreurs faites (volontairement ou pas) lors de la modélisation du procédé.
- La présence de certains phénomènes dans le comportement du système physique qui ne sont pas pris en compte directement par le modèle.

Comme exemple de paramètres incertains affectant les systèmes, on peut citer : la raideur, l'inertie,

les coefficients de viscosité pour les systèmes mécaniques, les coefficients aérodynamiques dans les commandes de vols, les valeurs de résistances ou de capacités dans les circuits électriques [Gahinet et al., 1996]. Mais en plus du terrain d'ingénierie, les incertitudes interviennent aussi bien dans les processus écologiques que dans les processus économiques [Weinmann, 1991].

On définit ainsi la robustesse d'un système par l'invariance de certaines propriétés qualitatives de ce système (telles que la stabilité et les performances) vis à vis des incertitudes intervenant sur le modèle. On dit d'un système qu'il est robuste s'il conserve sa stabilité et des performances acceptables malgré la présence des incertitudes [Bachelier, 1998].

La synthèse d'une loi de commande s'articule ainsi autour de 2 étapes fondamentales, qui en pratique sont répétées alternativement jusqu'à ce que le concepteur juge les résultats satisfaisants :

- Calcul du régulateur (ou feedback) ou contrôle : dans cette étape, peuvent être pris en compte certains objectifs de performances et certains objectifs de robustesse seulement.
- Analyse des propriétés du système commandé, tant du point de vue des performances que de la robustesse de celles-ci.

Dans cette optique, on s'est intéressé dans le cadre de ce mémoire au problème la la synthèse de commande robuste basée-observateur pour une classe de systèmes dynamiques à paramètres incertains. Plus précisément, nous aborderons la classe suivante des systèmes non linéaires incertains à temps discret :

$$x_{k+1} = \left(A + \Delta A(k) \right) x_k + B u_k + \phi(x_k, u_k) + D \omega_k \quad (1a)$$

$$y_k = \left(C + \Delta C(k) \right) x_k + \psi(x_k, u_k) + E \omega_k \quad (1b)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur état, $y \in \mathbb{R}^p$ est la sortie et $u \in \mathbb{R}^m$ est le contrôle, le vecteur

$$\omega \in l_2^s = \{x \in \mathbb{R}^s, \|x\|_{l_2^s} < +\infty\}$$

est une perturbation exogène inconnu avec $\|x\|_{l_2^s} = \left(\sum_{k=0}^{k=\infty} \|x_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

A, B, C, D et E sont des matrices constantes de dimensions appropriées. Les paramètres du système sont soumis aux hypothèses suivantes :

- Les paires (A, B) et (A, C) sont respectivement stabilisables et détectables;
- Les incertitudes $\Delta A(t)$ et $\Delta C(t)$ sont supposées structurées et bornées en normes, c'est-à-dire: il existe des matrices $M_i, N_i, F_i(t), i = 1, 2$, de dimensions appropriées telles que

$$\Delta A(t) = M_1 F_1(t) N_1, \quad \Delta C(t) = M_2 F_2(t) N_2$$

où les matrices **inconnues** $F_i(t)$ vérifient la condition $F_i^T(t) F_i(t) \leq I$, pour $i = 1, 2$.

- Les non linéarités Φ et Ψ sont Lipschitziennes par rapport à x , uniformément en u et $\phi(0, u^*) = \psi(0, u^*) = 0$ pour tout u^* .

L'objectif principale étant de construire un observateur de la forme

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= A\hat{x}_k + Bu_k + \phi(\hat{x}_k, u_k) \\ &+ L\left(y_k - C\hat{x}_k - \psi(\hat{x}_k, u_k)\right) \end{aligned} \quad (2)$$

qui ne prend pas en compte l'effet des incertitudes (donc robuste vis-à-vis des incertitudes) de sorte que le système (1), sous l'action du contrôleur $u_k = -K\hat{x}_k$, soit globalement asymptotiquement stable et satisfaisant un critère de performance dit H_∞ . Le problème revient donc à déterminer les deux matrices L et K (dites de gain) telles que le système augmenté

$$z_{k+1} = \begin{bmatrix} A - BK + \Delta A(k) & BK \\ \Delta A(k) - L\Delta C(k) & A - LC \end{bmatrix} z_k + \begin{bmatrix} \phi(x_k, -K\hat{x}_k) \\ \Delta\phi(x_k, \hat{x}_k) - L\Delta\psi(x_k, \hat{x}_k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \\ D - LE \end{bmatrix} \omega_k \quad (3)$$

où $z_k^T = (x_k^T, e_k^T)$, $e_k = x_k - \hat{x}_k$ et

$$\begin{aligned} \Delta\phi(x_k, \hat{x}_k) &= \phi(x_k, -K\hat{x}_k) - \phi(\hat{x}_k, -K\hat{x}_k) \\ \Delta\psi(x_k, \hat{x}_k) &= \psi(x_k, -K\hat{x}_k) - \psi(\hat{x}_k, -K\hat{x}_k) \end{aligned}$$

soit robustement asymptotiquement stable. C'est le problème de la commande H_∞ basée-observateur. L'analyse de la stabilité du système (2) se fait en utilisant la théorie de Lyapunov. Cette dernière conduit à la recherche d'une fonction candidate de Lyapunov adéquate qui assure à la fois la convergence exponentielle de l'observateur vers l'état réel x et au même temps la stabilité robuste du système (1). L'inégalité de Lyapunov associée au problème (1) étant le problème précédent se traduit par la résolution d'une inégalité de Lyapunov. Celle-ci étant une inégalité bilinéaire matricielle (BMI). D'un point de vue numérique, le problème de la commande H_∞ basée-observateur est un problème NP-difficile. Il existe plusieurs approches consacrées à ce sujet [Ibrir and Diopt(2008)], [Abbaszadeh and Marquez(2010)], [?], [Kheloufi et al.(2013c)], [Kheloufi et al.(2013d)], ... En se basant sur la théorie de Lyapunov et le maniement judicieux de l'inégalité de Young, Kheloufi et al. ont développés de nouvelles méthodes d'optimisation exprimées par des conditions LMI qui calculent simultanément les deux gains K et L . L'intérêt des inégalités linéaires matricielles (LMIs) vient du fait que ces dernières peuvent être résolues par la programmation convexe.

L'objet de ce mémoire consiste à exposer la méthode de [Kheloufi et al.(2013d)].

Chapitre 1

Outils de base pour l'analyse de la stabilisation des systèmes linéaires

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous avons essayé de faire quelques rappels nécessaires et indispensables à la compréhension de ce mémoire. En premier lieu, on donne quelques notions sur les matrices carrées définies en signe en passant par la représentation d'état d'un système de contrôle linéaire. Ensuite nous définissons les différents cas de stabilité. Enfin, on terminera avec la définition de l'inégalité matricielle en utilisant l'outil utile : le complément de Schur.

1.2 Matrices carrées définies en signe : la relation d'ordre partiel de Loëwner

Soit une matrice $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$. M est définie positive (respectivement semi-définie positive) si et seulement si

$$x^T M x > 0 \text{ (resp. } \geq 0) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ non nul} \quad (1.1)$$

De même, on dit que M est définie négative (respectivement semi-définie négative) si et seulement si $-M$ est définie positive (resp. semi-définie positive). On note :

$$M > (\geq) 0 \text{ et } M < (\leq) 0 \quad (1.2)$$

Il existe différents tests pour savoir si une matrice est définie en signe, notamment basées sur les calculs des mineurs de la matrice. Toutefois, nous n'aurons à manipuler que des matrices symétriques dont les valeurs propres sont réelles. Pour ces matrices, on a

$$\begin{cases} M < (\leq) 0, & \iff \lambda_{\max}(M) < (\leq) 0 \\ M > (\geq) 0, & \iff \lambda_{\min}(M) > (\geq) 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Ainsi toute matrice semi-définie en signe est déficiente en rang.

Par ailleurs, de manière naturelle, pour un couple de matrices $\{M; N\} \in \{\mathbb{R}^{n \times n}\}^2$, on définit :

$$M > (\geq) N \iff M - N > (\geq) 0 \text{ ou } M < (\leq) N \iff M - N < (\leq) 0 \quad (1.4)$$

Il existe une relation d'ordre partiel entre les matrices de même dimension, partiel simplement car, par exemple, une matrice symétrique peut ne pas être définie en signe (c'est-à-dire avoir des valeurs propres négatives et positives). On parle parfois de la relation d'ordre partiel de Löwner.

Une matrice symétrique définie en signe peut s'exprimer elle même en fonction d'autres matrices qui représentent des éléments inconnus de l'expression. On parle alors d'inéquations matricielles, ou, de manière plus habituelle mais quelque peu impropre, d'inégalités matricielles.

Exemple 1.

$$M = M^T = AX^3 + (X^3)^T A^T + e^B Y Y^T (e^B)^T < 0$$

où A et B sont connues et X et Y sont inconnues, est une inégalité matricielle.

Ces inégalités sont généralement impossibles à résoudre. Toutefois, deux cas particuliers vont nous intéresser :

les LMI et les BMI.

Il est par ailleurs utile de constater les propriétés suivantes :

- Si M_1 et M_2 sont deux matrices définies négatives, on a

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} < 0 \quad (1.5)$$

De ce fait, les inégalités $M_1 < 0$ et $M_2 < 0$ constituent ce qu'on appelle un système d'inégalités matricielles ou tout simplement une autre inégalité matricielle.

- Si la matrice $M = M^T \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$, définie négative, est aussi composée :

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2^T & M_3 \end{pmatrix} < 0 \quad (1.6)$$

alors $M_1 = M_1^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $M_3 = M_3^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sont aussi définies négatives. En effet, l'inégalité scalaire $x^T M x < 0 \forall x \in \mathbb{R}^{n+m}$ peut être instanciée en :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_1 \in \mathbb{R}^n \text{ \& } x = \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R}^m \quad (1.7)$$

ce qui conduit à $x_1^T M_1 x_1 < 0 \forall x_1 \in \mathbb{R}^n \iff M_1 < 0$ et $x_3^T M_3 x_3 < 0 \forall x_3 \in \mathbb{R}^m \iff M_3 < 0$.

1.3 Représentation d'état d'un système de contrôle linéaire

Dans ce chapitre le système de contrôle linéaire considéré, d'état $x \in \mathbb{R}^n$ est modélisé avec la forme la plus générale : il possède une entrée exogène $w \in \mathbb{R}^s$ et une entrée de commande $u \in \mathbb{R}^m$

ainsi qu'une sorties $z \in R^l$ et une sortie de mesure $y \in R^p$. L'entrée w la sortie z seront utilisés pour définir la norme \mathcal{H}_∞ du système. Le système (dans le cas continu) peut alors se représenter par :

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + \Delta A(t))x + Bu + Dw \\ y = (C + \Delta C(t))x + Ew \\ Z = Hx + Ew \end{cases} \quad (1.8)$$

avec les deux entrées :

- w représente les entrées extérieures, notamment le vecteur de consigne de commande, les perturbations et les bruits.
- u représente le vecteur de commande.

et deux sorties :

- Z les sorties à optimiser pour avoir un bon comportement de la commande.
- y les mesures disponibles utilisées par le contrôleur pour calculer la commande.

Les quantités $\Delta A(t)$ et $\Delta C(t)$ sont dites matrices d'incertitudes. Le système (1.8) comporte en fait deux types d'incertitudes :

– **Incertitudes non structurées**

Ces incertitudes sont dites également non paramétriques dans la mesure où on ne connaît rien de leur influence sur la dynamique du modèle nominal. Ainsi, d'après [Dubuisson, 1990][Oustaloup et Mathieu, 1999], la seule information dont on dispose est que ces incertitudes sont bornées en norme et qu'elles représentent des dynamiques externes inconnues (bruits de mesures, perturbations externes, etc.). Dans le cas du système (1.8), les incertitudes non structurées sont représentées par les perturbations externes w et Z , bornées telles que leur énergie est donnée par la norme \mathcal{L}_2 .

– **Incertitudes structurées**

Les incertitudes structurées ou bien paramétriques concernent quant à elles la partie modélisée de la dynamique du modèle et non les dynamiques externes au système. Elles sont généralement dues à des erreurs de modélisation ou encore aux approximations et simplifications nécessaires pour l'obtention d'un modèle exploitable respectant au mieux la réalité d'un système physique. Ce type d'incertitude est représenté dans le modèle linéaire (1.8) par les matrices variables dans le temps $\Delta A(t)$ et $\Delta C(t)$ et permettent d'enrichir en information la dynamique globale du système considéré. Dès lors, elles peuvent être réécrites telles que :

$$\Delta A(t) = M_1 F_1(t) N_1, \quad \Delta C(t) = M_2 F_2(t) N_2$$

où M_i et N_i sont des matrices connues de dimensions appropriées et les matrices $F_i(t)$ sont inconnues et vérifient la condition $F_i^T(t)F_i(t) \leq I$, pour $i = 1, 2$

1.4 Point d'équilibre ou point stationnaire

Définition 1.1. L'état x_e est appelé état d'équilibre ou point d'équilibre pour le système (1.9) :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= x_0 \end{cases} \quad (1.9)$$

si lorsque $x(t_0) = x_e$ alors $x(t) = x_e$ pour tout $t \geq t_0$. En d'autres termes, x_e vérifie l'équation $f(x_e) = 0$.

1.5 Stabilité au sens de Lyapunov

Soit un système dynamique à temps continue sans entrée exogène, de vecteur d'état x et d'équation d'état $\dot{x} = f(x)$. Soit x_0 un point d'équilibre, vérifiant donc la condition d'équilibre $f(x_0) = 0$. Pour que le système soit stable autour de cet équilibre, il faut aussi que ce point d'équilibre soit attractif c'est à dire les trajectoires de x convergent vers x_0 .

Définition 1.5.1 (Fonction d'énergie ou fonction de Lyapunov). x_0 est un point stable au sens de Lyapunov s'il existe une fonction de Lyapunov $V(x)$ vérifiant la condition suivante: $\frac{\partial(V(x))}{dt} < 0$ pour $x \neq x_0$, à partir d'une condition initiale x_i différente de x_0 , l'énergie interne du système va décroître jusqu'à atteindre son minimum qui correspond à l'unique point x_0 , l'état du système tendra donc vers nécessairement vers x_0 . Pour démontrer la stabilité par cette méthode, la difficulté réside dans le choix d'une "bonne" fonction d'énergie. Une classe de fonctions souvent utilisées sont les fonctions quadratiques ($v(x) = (x - x_0)^T P (x - x_0)$) avec $P = P^T > 0$. On parlera alors de stabilité quadratique, pour la fonction d'énergie choisie, il reste à démontrer que:

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ pour tout } x.$$

Théorème 1.1 (Stabilité par la méthode directe). On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= x_0 \end{cases} \quad (1.10)$$

supposons que l'origine est un point singulier de (1.10) et posons $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ fonction de classe C^1 définie dans un voisinage U de l'origine tel que :

1. $V(0) = 0$
2. $V(x) > 0$ pour $x \neq 0, x \in U$

Si $\dot{V}(x) \leq 0$ dans $U - \{0\}$ l'origine est donc stable.

Si $\dot{V}(x) < 0$ dans $U - \{0\}$ l'origine est asymptotiquement stable.

Si $\dot{V}(x) > 0$ dans $U - \{0\}$ l'origine est instable.

Dans ces conditions, la fonction V est appelée fonction de Lyapunov, elle est définie positive (1) et (2)

sont vérifiées. Notons qu'avec ces deux hypothèses, la fonction V est seulement la fonction candidate de Lyapunov. Les propriétés de stabilité sont dites globales si U est égale à \mathbb{R}^n .

Pour un système linéaire $\dot{x}(t) = Ax(t)$ où $A \in M_n(\mathbb{R})$, on rappelle que l'origine est un point d'équilibre et la stabilité locale est équivalente à la stabilité globale. C'est une conséquence directe du théorème ci dessous caractérisant la stabilité des systèmes linéaires autonomes.

Théorème 1.2. – S'il existe une valeur propre λ de A telle que $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ alors le point d'équilibre 0 est instable.

- Si toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative, alors le point 0 est asymptotiquement stable.
- Le point d'équilibre 0 est stable si et seulement si toute valeur propre de A a une partie réelle négative ou nulle, et si toute valeur propre à partie réelle nulle est simple.

Dans ce cas présent, la stabilité quadratique au sens de Lyapunov est équivalente au sens des systèmes linéaires (valeurs propres à parties réelles négatives); on énonce ainsi le théorème suivant :

Théorème (Stabilité d'un système linéaire à temps continu). Le système $\dot{x} = Ax$ est stable si et seulement si il existe une matrice positive Q vérifiant le système d'inégalité suivant :

$$Q > 0$$

$$A^T Q + Q A < 0.$$

Cas des systèmes à temps discret

Considérons un système d'équation d'état $x(k+1) = Ax(k)$ et une fonction de Lyapunov quadratique $V(x) = x^T Q x$ avec $Q = Q^T > 0$.

Théorème 1.3 (Stabilité d'un système linéaire à temps discret). Le système $x(k+1) = Ax(k)$ est stable si et seulement si il existe une matrice définie positive Q vérifiant le système LMI suivant :

$$Q > 0$$

$$A^T Q A - Q < 0.$$

En effet, la décroissance de l'énergie s'écrit

$$\Delta V = V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0$$

ce qui s'écrit encore :

$$x^T (A^T Q A - Q) x < 0.$$

Dans ce qui suit, nous allons aborder le problème de la stabilisation des systèmes contrôlés linéaires. La stabilisation des systèmes contrôlés-observés fait appel à la notion d'observabilité. Son étude ne sera présentée qu'après avoir introduit les notions d'observabilité et d'observateur.

1.6 Stabilisation par retour d'état statique

Définition 1.2. Le système $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ est dit stabilisable (par retour d'état linéaire, ou par feedback linéaire, ou aussi par régulateur linéaire) s'il existe une matrice $K \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ tel que le système bouclé par le feedback $u(t) = Kx(t)$, i.e.

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) \quad (1.11)$$

soit asymptotiquement stable, i.e., la matrice $(A + BK)$ est de Hurwitz.

La matrice de feedback K s'appelle les **gains**.

Le théorème 1.5 ci-dessus donne une condition suffisante de stabilisation d'un système linéaire autonome en terme de commandabilité. Rappelons d'abord le problème de commandabilité (ou contrôlabilité) : étant donnés deux états $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, existe-t-il un temps T et un contrôle admissible u tels que la trajectoire $x_u(t)$ associée à ce contrôle joigne $x_0 = x(0)$ à $x_1 = x(T)$ C'est le problème de contrôlabilité. On peut poser le même problème avec le temps T fixé.

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas d'un système linéaire, elle est dite condition de Kalman.

Théorème 1.4 ([Trelat (2007)]). Le système $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ est dit contrôlable en temps T si et seulement si : la matrice $C = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ est de rang égal à n .

La matrice C est appelée matrice de Kalman. La condition $\text{rang } C = n$ est appelée condition de Kalman.

Théorème 1.5 ([Trelat (2007)]). Si la paire (A, B) est commandable, on peut choisir la matrice de K pour placer arbitrairement les valeurs propres de la matrice $A + BK$, en d'autres termes, pour tout polynôme réel unitaire de degré n , il existe $K \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ tel que le polynôme caractéristique de $A + BK$ est égal à P .

Ce résultat, connu sous le nom du théorème de placement des pôles, montre que l'on peut choisir la matrice K de telle sorte que la matrice $A + BK$ soit de Hurwitz et que l'origine du système bouclé (1.11) soit asymptotiquement stable. Donc tout système linéaire contrôlable est stabilisable (globalement).

1.7 Stabilisation par retour d'état dynamique

1.7.1 Observabilité des systèmes linéaires

Considérons le système dynamique linéaire autonome :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (1.12)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ et $y(t) \in \mathbb{R}^p$. Les matrices A , B et C sont de dimensions appropriées. Sans perte de généralité, on peut supposer que $D = 0$ (voir [Trelat et Haberkorn]).

Définition 1.3. Le système (1.12) est observable en temps T , si pour toute paire d'états initiaux x_0

et x_1 , avec $x_0 \neq x_1$, il existe une entrée $u \in L^\infty([0, T], \mathbb{R})$ qui distingue x_0 et x_1 . Autrement dit :

$$\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n, \quad x_0 \neq x_1 \implies \exists u \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}) \quad \text{tel que } y(t, x_0, u(\cdot)) \neq y(t, x_1, u(\cdot))$$

De manière équivalente, on peut dire :

$$\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n, \quad \forall u(\cdot) \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}^m) \quad y(t, x_0, u(\cdot)) = y(t, x_1, u(\cdot)) \implies x_0 = x_1$$

Le problème de l'observabilité est donc d'établir l'injectivité de l'application $x_0 \rightarrow y(t, x_0, u(\cdot))$. Si cette application est injective pour une certaine entrée $u \in L^\infty([0, T], \mathbb{R})$, le système (1.12) est dit observable. Si elle est injective pour toutes les entrées u , le système (1.12) est dit uniformément observable.

Il existe une caractérisation algébrique de l'observabilité d'un système linéaire due à Kalman :

Théorème 1.6 ([Trelat et Haberkorn]). Le système linéaire (1.12) est observable (en temps T quelconque) si et seulement si la matrice d'observabilité de Kalman

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

est de rang n . On dit alors que la paire (A, C) est observable.

1.7.2 Estimation d'état des systèmes linéaire : Observateur de Luenberger

Motivation : supposons que le système

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (1.13)$$

soit observable. Il est classique de noter par \hat{x} une estimation de la quantité x . Nous cherchons ici à obtenir une estimation de l'état sans utiliser les dérivées de y et u . La première idée qui vient à l'esprit est de copier la dynamique du système. On intègre directement

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t)$$

à partir d'une condition initiale \hat{x}_0 . Si la matrice A est stable, alors \hat{x} peut être pris comme estimation de x car l'erreur $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ tend vers zéro puisque $\dot{e} = Ae$. Si A est instable cette méthode ne marchera pas. En effet, une petite erreur initiale $e_0 = e(0)$ sera amplifiée exponentiellement. Intuitivement, si l'erreur $x - \hat{x}$ devient grande, alors, le système étant observable, l'erreur sur les sorties $\hat{y} - y$ devient grande également¹. Comme y est connue, il est alors tentant de modifier $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu$

1. On a noté $\hat{y} = C\hat{x}$.

par l'ajout d'un terme du type $L(y - \hat{y})$ qu'on connaît et qui correspond à l'erreur de l'observation. Ainsi, se pose le problème suivant : peut-on choisir la matrice L de façon à ce que la solution \hat{x} du système

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu(t) + L(\hat{y} - y(t)) \\ \hat{y} &= C\hat{x}\end{aligned}$$

converge vers x ? Puisque $y = Cx$, la question se pose ainsi : peut-on ajuster la matrice L de façon à obtenir une équation différentielle d'erreur stable :

$$\dot{e} = (A + LC)e?$$

Pour un choix judicieux de L , peut-on imposer à $A + LC$ d'avoir toutes ses valeurs propres à parties réelles strictement négatives?

Or les valeurs propres restent inchangées par la transposition : $A + LC$ admet le même spectre que $A^T + C^T L^T$. De plus la paire (A, C) est observable si, et seulement si, la paire (A^T, C^T) est commandable : on obtient le critère de Kalman de commandabilité en transposant celui de l'observabilité. Ainsi le théorème de placement de pôles se transpose au Théorème de placement de pôle propres de l'observateur que nous énonçons après avoir donné la définition de l'observateur de Luenberger.

Définition 1.4. Un observateur de Luenberger $\hat{x}(\cdot)$ de $x(\cdot)$ est une solution d'un système du type

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= \underbrace{A\hat{x}(t) + Bu(t)}_{(I)} + \underbrace{L(C\hat{x}(t) - y(t))}_{(II)} \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t)\end{aligned}\tag{1.14}$$

La partie (I) est celle correspondante à la dynamique du système et la partie (II) est le correctif. Par définition d'un observateur, la matrice $L \in \mathcal{M}_{n,p}$ (dite matrice de gains) est telle que

$$\forall x(0), \hat{x}(0) \in \mathbb{R}^n, \quad x(t) - \hat{x}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$

Remarque 1.1. La dynamique de l'erreur $e(\cdot)$ vérifie l'équation différentielle

$$\dot{e}(t) = (A + LC)e(t)$$

et donc $e(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$, pour toute valeur initiale $e(0)$ si et seulement si la matrice $A + LC$ est de Hurwitz. Construire donc un observateur de Luenberger revient à déterminer une matrice de gain L telle que la matrice $A + LC$ soit de Hurwitz. Ainsi, de manière duale au théorème de placement de pôles, on a :

Théorème 1.7 (Théorème de placement des modes propres de l'observateur). Si la paire (A, C) est observable, alors le système admet un observateur de Luenberger, i.e., on peut construire une matrice de gains L telle que $A + LC$ soit de Hurwitz.

Démonstration. La paire (A^T, C^T) étant contrôlable, d'après le théorème de placement des pôles, il existe une matrice L^T telle que la matrice $A^T + C^T L^T$ soit de Hurwitz. \square

On a vu comment stabiliser un système par retour d'état. Or il peut s'avérer coûteux de mesurer l'état complet d'un système. On peut alors se demander si la connaissance partielle de cet état permet de reconstituer l'état complet (c'est la propriété d'observabilité), et de stabiliser le système entier : c'est la stabilisation par retour d'état dynamique, ou synthèse régulateur-observateur.

1.7.3 Stabilisation d'un système linéaire par retour d'état dynamique

On peut se demander si, étant donné un système contrôlable et observable $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$, il existe un feedback $u = Ky$ stabilisant le système, i.e. si la matrice $A + BKC$ est de Hurwitz. La réponse est non. Pour le voir, considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad 0).$$

Le système $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$ est trivialement contrôlable et observable. Pourtant, pour toute matrice scalaire $K = (k)$, la matrice $A + BKC$ n'est pas de Hurwitz.

En conclusion, un feedback par retour d'état statique (bouclage statique) ne suffit pas en général, c'est pourquoi, dans la suite on va voir comment construire un retour d'état dynamique (bouclage dynamique) via un observateur asymptotique.

On a vu comment construire :

- un régulateur (feedback) pour un système contrôlable,
- un observateur de Luenberger pour un système observable.
- Il semble naturel, pour un système contrôlable et observable, de construire un bouclage dynamique en fonction de l'observateur de l'état : c'est l'étape de **synthèse régulateur-observateur**.

Définition 1.5. *On appelle régulateur-observateur (ou feedback de sortie, ou commande basée-observateur) du système*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (1.15)$$

le bouclage dynamique $u = K\hat{x}$, où

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y)$$

Une solution du problème de stabilisation d'un système linéaire contrôlé-observé est apporté par le théorème ci-dessous :

Théorème 1.8 (Théorème de stabilisation par retour dynamique de sortie). *Si le système $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$, est contrôlable et observable, alors il est stabilisable par retour dynamique*

de sortie, i.e., il existe des matrices de gain $K \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telles que les matrices $A + BK$ et $A + LC$ soient de Hurwitz, et alors le système bouclé

$$\dot{x} = Ax + BK\hat{x} \quad (1.16)$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + BK\hat{x} + L(C\hat{x} - y) \quad (1.17)$$

est asymptotiquement stable.

Démonstration. L'équation de la dynamique du vecteur augmenté $\begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix}$ est équivalente à

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + BK & BK \\ 0 & A + LC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix}$$

ce dernier système étant asymptotiquement stable si et seulement si les matrices $A + BK$ et $A + LC$ sont de Hurwitz, ce qui est possible avec les propriétés de contrôlabilité et d'observabilité. \square

Les valeurs propres de $A + BK$ sont dites modes propres du régulateur, et les valeurs propres de $A + LC$ sont dites modes propres de l'observateur.

1.8 Les LMI

Il s'agit d'inégalités matricielles dans lesquelles les deux membres ont une expression affine par rapport aux inconnues. On appelle ces inégalités LMI², acronyme de Linear Matrix Inequality.

Les techniques d'optimisation dites "de point intérieur" permettent aujourd'hui d'obtenir numériquement une solution à la LMI (c'est-à-dire un jeu de variable qui vérifie la LMI), si elle existe. Des logiciels et boîtes à outils, utilisant par exemple le noyau de MATLAB, permettent d'envisager ce type de problèmes.

Exemple 2. Comme exemple connue de LMI: seconde méthode de Lyapunov appliquée au cas des systèmes linéaires invariants dans le temps.

Théorème 1.9. 1: Soit le système autonome: - à temps continu:

$$\dot{x} = Ax \quad \text{où } x \in \mathbb{R}^n \quad (1.18)$$

-respectivement à temps discret:

$$x_{k+1} = Ax_k \quad \text{où } x_k \in \mathbb{R}^n \quad (1.19)$$

2. Certains auteurs font preuve de plus de rigueur et les appellent des AMI (A pour affine) mais ce terme reste anecdotique aussi conserverons-nous le terme LMI

Ce système est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vérifiant l'inégalité:

$$A^T P + P A < 0 \quad (1.20)$$

respectivement:

$$-P + A^T P A < 0 \quad (1.21)$$

Ces inéquations sont appelées inégalités de Lyapunov. Dans le cas continu, c'est une LMI en A ou en P . Dans le cas discret, c'est une LMI en P mais non en A .

On peut inclure la contrainte $P > 0$ dans le système LMI en remplaçant les inégalités précédentes par

$$\begin{pmatrix} A^T P + P A & 0 \\ 0 & -P \end{pmatrix} < 0 \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} -P + A^T P A & 0 \\ 0 & -P \end{pmatrix} < 0 \quad (1.22)$$

1.8.1 Les BMI

Ces inégalités correspondent au cas où les expressions sont Biliéaires (B pour Bilinear) par rapport aux variables comme dans

$$A X + X^T A^T + X B Y + Y^T B^T X^T > 0$$

où X et Y sont des variables.

Elles sont difficiles à résoudre même numériquement. On note que si l'on parvient à figer une des deux variables (X ou Y) à une valeur, l'inégalité devient linéaire. C'est donc une LMI.

L'on eut aussi noter que l'inéquation de Lyapunov (1.21) est une BMI en A .

1.8.2 Un outil utile: le complément de Schur

Ce résultat, très souvent utilisé dans le contexte LMI, peut s'exprimer ainsi:

Le lemme de Schur est introduit pour déduire une LMI (faisable).

Lemme 1.1 (Lemme de Schur ou complément de Schur). Soient A, B, C trois matrices de dimensions quelconques telles que: $A = A^T$ et $C = C^T$. alors:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} < 0 \iff \begin{cases} C < 0 \text{ et } A - B C^{-1} B^T < 0 \\ A < 0 \text{ et } C - B^T A^{-1} B < 0 \end{cases} \quad (1.23)$$

Preuve. Posons $G = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}$. En utilisant le principe de congruence, on déduit que

$$G < 0 \implies M^T G M < 0, \forall M \text{ inversible}$$

En choisissant $M = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, on obtient

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & B^T \\ B & A \end{pmatrix}.$$

D'où l'équivalence

$$\begin{pmatrix} C & B^T \\ B & A \end{pmatrix} < 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} < 0.$$

Pour démontrer (1.23), il suffit de choisir $M = \begin{pmatrix} I & BC^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}$ et de remarquer que la matrice M est inversible, de plus on a

$$\begin{pmatrix} I & BC^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & -BC^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

. En effet, il suffit d'utiliser la factorisation suivante

$$G = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & BC^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - BC^{-1}B^T & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & BC^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}^T$$

pour avoir les inégalités désirées. La preuve est ainsi achevée.

Exemple 1.1. En appliquant le complément de Schur, on peut réécrire l'inégalité de Lyapunov relative au cas discret (compte-tenu du fait que $P > 0$) en une LMI en P ou en A :

$$\begin{pmatrix} -P + A^T P A & 0 \\ 0 & -P \end{pmatrix} < 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -P & A^T P \\ P A & -P \end{pmatrix} < 0 \quad (1.24)$$

1.9 Problème standard \mathcal{H}_∞

La synthèse \mathcal{H}_∞ est une méthode qui sert à la conception de commandes optimales. Il s'agit essentiellement d'une méthode d'optimisation, qui prend en compte une définition mathématique des contraintes en ce qui concerne le comportement attendu en boucle fermée. La commande \mathcal{H}_∞ a pour principal avantage la capacité d'inclure dans un même effort de synthétisation les concepts liés à la commande classique et à la commande robuste.

Le mot "optimal" est utilisé dans le sens où la commande synthétisée est celle qui minimisera l'effet des entrées/sorties du système. Le "infini" dans \mathcal{H}_∞ signifie que ce type de commande est conçu pour imposer des restrictions de type minimax au sens de la théorie de la décision (minimiser la perte maximale possible) dans le domaine fréquentiel. La norme \mathcal{H}_∞ d'un système dynamique est l'amplification maximale que le système peut exercer sur l'énergie du signal d'entrée.

On rappelle que la matrice de transfert $G(s)$ (unique) correspondant au système (1.8) est

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D \quad (1.25)$$

s est la variable de Laplace. Rappelons aussi les valeurs singulières sont égales aux racines carrées des valeurs propres de MM^* . La valeur singulière maximale est aussi appelée norme-2, norme \mathcal{L}_2 ou norme spectrale.

A supposer que $X(s)$ soit la transformée de Laplace d'une fonction vectorielle $x(t)$ de même dimension, à variable dans \mathbb{R}^+ , le théorème de Parseval nous permet de redéfinir la norme dans l'espace des fonctions à variable réelle positive :

$$\|X\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(i\omega)^* X(i\omega) d\omega \right)^{1/2} \quad (1.26)$$

$$= \left(\int_0^{\infty} x(t)^* x(t) dt \right)^{1/2} \quad (1.27)$$

$$= \left(\int_0^{\infty} \|x(t)\|_2^2 dt \right)^{1/2} \quad (1.28)$$

$$= \|x\|_2 \quad (1.29)$$

La norme $\|X\|_2$ peut par exemple servir à exprimer la norme de l'énergie d'un signal temporel décrit par $x(t)$.

Remarque 1.2. Pour des raisons évidentes, si l'on se réfère à l'équation ci-dessus, il convient de distinguer $\|x(t)\|_2$, qui est la norme euclidienne du vecteur correspondant à l'instance de x pour t , de $\|x\|_2$ qui est la norme \mathcal{L}_2 de la fonction vectorielle $x(t)$. Plus précisément, $\|x(t)\|_2$ traduit une énergie instantanée alors que $\|x\|_2$ traduit une énergie sur un horizon de temps infini.

Soit l'ensemble \mathcal{L}_∞^n des fonctions vectorielles $X(s)$ de dimension n , à composantes complexes, à variable s complexe, et bornées sur l'axe imaginaire, c'est-à-dire vérifiant

$$\|X\|_\infty = \sup_{\omega} \|X(i\omega)\|_2 < +\infty.$$

La quantité $\|X\|_\infty$ est appelée norme \mathcal{L}_∞^n de la fonction $X(s)$. La norme \mathcal{H}_∞ n'est autre que la norme $\|\cdot\|_\infty$ de la matrice transfert G . Si l'on connaît l'expression de la valeur singulière maximale de la matrice de transfert, on a donc

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega} \|G(i\omega)\|_2 = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(G(i\omega)) \quad (1.30)$$

Même si la norme \mathcal{H}_∞ de la matrice de transfert $G(s)$ est une extension immédiate de la norme \mathcal{L}_∞ au cas matriciel comme nous venons de le voir, elle est "en quelque sorte" induite par la norme \mathcal{L}_2 . Pour les cas pratiques rencontrés en Automatique, si l'on suppose que les signaux sont à énergies finies (i.e. sont donc dans \mathcal{L}^2). Ainsi, si l'on suppose que Z est l'image de w par un opérateur \mathcal{R} , alors on peut définir le gain \mathcal{L}^2 de \mathcal{R} par

$$\mathcal{G}_{\mathcal{L}^2}(\mathcal{R}) = \sup_{w \in \mathcal{L}^2} \frac{\|Z\|_2}{\|w\|_2} \quad (1.31)$$

Le gain $\mathcal{G}_{\mathcal{L}^2}(\mathcal{R})$ est en fait le plus grand gain en énergie associé à l'opérateur \mathcal{R} . La norme \mathcal{H}_∞ d'une matrice de transfert correspond donc au gain \mathcal{L}_2 du système. Le problème général de la commande \mathcal{H}_∞ , s'énonce comme suit :

À un niveau de performance γ garanti pour la norme \mathcal{H}_∞ , le problème de commande \mathcal{H}_∞ correspond à déterminer une commande $u = -Kx$ stabilisante (sous forme de retour d'état statique par exemple) sous la contrainte sous-optimale \mathcal{H}_∞ de niveau γ : $\|G\|_\infty < \gamma$. En d'autres termes, supposant que le contrôleur K et le bruit w jouent un jeu à somme nulle, dans lequel le coût est $\|Z\|_2^2 - \gamma^2\|w\|_2^2$, quel est le plus petit γ tel que le contrôleur gagne le jeu (i.e., atteindre un coût négatif).

Chapitre 2

Commande \mathcal{H}_∞ basé observateur pour une classe de systèmes Lipschitziens à temps discret et à paramètres incertains

2.1 Introduction

Il existe de nombreuses approches dans la littérature traitant le problème de la conception de contrôleur basé observateur pour les systèmes (continus et discrets) non-linéaires à paramètres incertains. Des résultats intéressants dans ce domaine sont considérés dans [Abbaszadeh and Marquez(2009)], [Abbaszadeh and Marquez(2008)], [Ibrir(2008)], [Ibrir and Diopt(2008)], [Grandvallet et al.(2013)], [Ibrir et al.(2005)], [Song and Hedrick(2004)], [Pertew et al.(2007)], [Abbaszadeh and Marquez(2012)], [Abbaszadeh and Marquez(2010)] via l'approche des LMIs. Cependant, toutes ces méthodes présentent des inconvénients, tels que la présence de la contrainte égalité dans les conditions de conception, en raison de la nature NP-difficile du problème (d'un point de vue numérique) et aussi la difficulté à étudier le problème pour les systèmes avec des mesures perturbées, ce qui est fréquemment rencontrés dans les différents systèmes. Différentes conditions de synthèse moins restrictives sont proposées dans la littérature. Cependant, ces dernières concernent des classes particulières de systèmes Lipschitziens, tels que les systèmes avec des non linéarités plus régulières (de classe C^1) [Ibrir et al.(2005)], [Ibrir and Diopt(2008)].

Dans ce chapitre, nous abordons l'approche LMI proposée par [Kheloufi et al.(2013d)] pour l'étude du problème dans le cas des systèmes discrets non linéaires et à paramètres incertains. Cette approche est inspirée de [Kheloufi et al.(2013b)]. Tout d'abord, une reformulation de la propriété de Lipschitz est considérée, celle-ci permet de prendre en compte toutes les propriétés des non-linéarités du système et conduit à une approche LPV. Deuxièmement, en utilisant la stabilité de Lyapunov combinée avec la technique des variables d'écart [de Oliveira et al.(1999)] et certaines transformations algébrique judicieuses [Grandvallet et al.(2013)], [Kheloufi et al.(2013b)], on obtient des conditions LMIs permettant de calculer simultanément les gains de l'observateur et du contrôleur avec un critère de performance \mathcal{H}_∞ .

Commençons d'abord par la présentation de quelques lemmes technique.

Lemme 2.1 (Inégalité de Young généralisée). *Pour toutes matrice X et Y de dimensions quelconques, pour toute matrice S symétrique définie positive et pour tous scalaires $\alpha > 0$, $\beta > 0$, on a l'estimation suivante :*

$$X^T Y + Y^T X \leq \frac{\alpha^2}{\beta^2} X^T S X + \frac{\beta^2}{\alpha^2} Y^T S^{-1} Y \quad (2.1)$$

Preuve. *Comme $S > 0$ alors $S^{\frac{1}{2}}$ et $S^{-\frac{1}{2}}$ existent de plus $S^{\frac{1}{2}} S^{-\frac{1}{2}} = I$. Par ailleurs, on sait que $M^T M \geq 0$ pour n'importe quelle matrice M . En appliquant l'argument précédent à*

$$M^T = (\varepsilon X^T S^{\frac{1}{2}} - Y^T S^{-\frac{1}{2}})$$

on obtient les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} & (\varepsilon X^T S^{\frac{1}{2}} - Y^T S^{-\frac{1}{2}})(\varepsilon X^T S^{\frac{1}{2}} - Y^T S^{-\frac{1}{2}})^T \geq 0 \\ \iff & (\varepsilon X^T S^{\frac{1}{2}} - Y^T S^{-\frac{1}{2}})(\varepsilon S^{\frac{1}{2}} X - S^{-\frac{1}{2}} Y) \geq 0 \\ \iff & \varepsilon^2 X^T S^{\frac{1}{2}} S^{\frac{1}{2}} X - \varepsilon X^T S^{\frac{1}{2}} S^{-\frac{1}{2}} Y - \varepsilon Y^T S^{-\frac{1}{2}} S^{\frac{1}{2}} X + Y^T S^{-\frac{1}{2}} S^{-\frac{1}{2}} Y \geq 0 \\ \iff & \varepsilon^2 X^T S X - \varepsilon X^T Y - \varepsilon Y^T X + Y^T S^{-1} Y \geq 0 \\ \iff & \varepsilon X^T Y + \varepsilon Y^T X \leq \varepsilon^2 X^T S X + \varepsilon Y^T S^{-1} Y \end{aligned}$$

on déduit alors, après division sur ε , que

$$X^T Y + Y^T X \leq \varepsilon X^T S X + \frac{1}{\varepsilon} Y^T S^{-1} Y$$

En posant $\varepsilon = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2$, on obtient finalement

$$X^T Y + Y^T X \leq \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 X^T S X + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 Y^T S^{-1} Y$$

La reformulation de la condition de Lipschitz sur les non linéarités joue un rôle important dans la dérivations de conditions LMI faisables lors de la conception d'un contrôleur \mathcal{H}_∞ basé-observateur des systèmes lipschitziens. Cette reformulation est due à

[Zemouche and Boutayeb(2013)]. Nous exposons ci-après cette propriété fondamentale.

Considérons deux vecteurs

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad ; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{Pour tout } i = 1, \dots, n$$

on définit un vecteur auxiliaire $X^{Y_i} \in \mathbb{R}^n$ correspondant à X et Y de la façon suivante:

$$\begin{cases} X^{Y_i} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ y_i \\ x_{i+1} \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} & \text{pour } i = 1, \dots, n, \\ X^{Y_0} = X \end{cases}$$

Lemme 2.2 ([Zemouche and Boutayeb(2013)]). *Considérons une fonction $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, alors pour tout vecteur $X, Y \in \mathbb{R}^n$, il existe des fonctions $\phi_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$ telles que :*

$$\phi(X) - \phi(Y) = \sum_{j=1}^{j=n} \phi_j(X^{Y_{j-1}}, X^{Y_j}) e_n^T(j) (X - Y)$$

Preuve. *La preuve consiste à réécrire $\phi(X) - \phi(Y)$ de la façon suivante :*

$$\begin{aligned} \phi(X) - \phi(Y) &= \sum_{j=1}^{j=n} \phi(X^{Y_{j-1}}) - \phi(X^{Y_j}) \\ &= \phi(X^{Y_0}) - \phi(X^{Y_1}) + \phi(X^{Y_1}) - \phi(X^{Y_2}) + \dots + \phi(X^{Y_{n-1}}) - \phi(X^{Y_n}) \\ &= \phi(X^{Y_0}) - \phi(X^{Y_n}). \end{aligned}$$

On définit alors des fonctions ϕ_j par

$$\phi_j(X^{Y_{j-1}}, X^{Y_j}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_j = y_j \\ \frac{\phi(X^{Y_{j-1}}) - \phi(X^{Y_j})}{X_j - Y_j} & \text{si } x_j \neq y_j \end{cases} \quad (2.2)$$

on peut alors écrire :

$$\phi_j(X^{Y_{j-1}}, X^{Y_j})(x_j - y_j) = \phi(X^{Y_{j-1}}) - \phi(X^{Y_j}) \text{ pour } x_i \neq x_j \quad (2.3)$$

Par passage à la somme, on obtient

$$\sum_{j=1}^{j=n} \phi_j(X^{Y_{j-1}}, X^{Y_j}) e_n^T(j) (X - Y) = \sum_{j=1}^{j=n} \left(\phi(X^{Y_{j-1}}) - \phi(X^{Y_j}) \right) = \phi(X) - \phi(Y)$$

d'où :

$$\phi(X) - \phi(Y) = \sum_{j=1}^{j=n} \phi_j(X^{Y_{j-1}}, X^{Y_j}) e_n^T(j) (X - Y)$$

Lemme 2.3 ([Zemouche and Boutayeb(2013)]). *Pour toute fonction $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

– **Propriété de Lipschitz :**

ϕ est γ_ϕ -Lipschitz, i.e. $\|\phi(X) - \phi(Y)\| \leq \gamma_\phi \|X - Y\| \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$

– **Reformulation de la propriété de Lipschitz :**

pour tout $i, j = 1, \dots, n$ il existe des fonctions $\phi_{ij} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et des constantes $\underline{\gamma}_{\phi_{ij}}$ et $\overline{\gamma}_{\phi_{ij}}$ telles que $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$,

$$\phi(X) - \phi(Y) = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} \phi_{ij} H_{ij} (X - Y) \quad (2.4)$$

et

$$\underline{\gamma}_{\phi_{ij}} \leq \phi_{ij} \leq \overline{\gamma}_{\phi_{ij}} \quad (2.5)$$

où

$$\phi_{ij} \triangleq \phi(X^{Y_{j-1}}, X^{Y_j}) \quad \text{et} \quad H_{ij} = e_n(i) e_n^T(j)$$

Preuve. Condition suffisante :

Pour tout $i, j = 1, \dots, n$, il existe des fonctions $\phi_{ij} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et des constantes $\overline{\gamma}_{\phi_{ij}}$ et $\underline{\gamma}_{\phi_{ij}}$ telles que les inégalités (2.4) et (2.5) sont vérifiées. On a alors pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^n$

$$\|\phi(X) - \phi(Y)\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} \phi_{ij} H_{ij} (X - Y) \right\| \leq \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} |\phi_{ij}| \|H_{ij}\| \|X - Y\|$$

or :

$$\|H_{ij}\| = \|e_n(j) e_n(j)^T\| \leq \|e_n(j)\| \|e_n(j)^T\| = 1$$

d'où :

$$\|\phi(X) - \phi(Y)\| \leq \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} |\phi_{ij}| \|X - Y\| \leq \left(\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} \lambda_{ij} \right) \|X - Y\|$$

car ϕ_{ij} sont des fonctions Lipschitziennes, où $\lambda_{ij} = \max(\underline{\gamma}_{\phi_{ij}}, \overline{\gamma}_{\phi_{ij}})$.

On déduit alors que la fonction ϕ est γ_ϕ -Lipschitzienne avec

$$\gamma_\phi \leq \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} \max(|\underline{\gamma}_{\phi_{ij}}|, |\overline{\gamma}_{\phi_{ij}}|)$$

Condition nécessaire :

Comme Φ est une fonction vectorielle, elle peut s'écrire de la manière suivante :

$$\phi(X) = \begin{pmatrix} \phi_1(X) \\ \phi_2(X) \\ \vdots \\ \phi_n(X) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{i=n} e_n(i) \phi_i(X)$$

Par conséquent, si ϕ est γ_ϕ -Lipschitzienne, alors on peut déduire l'existence de constantes

$0 \leq \gamma_{\phi_i} \leq \gamma_\phi$ pour tout $i = 1, \dots, n$ telles que ϕ_i est γ_{ϕ_i} -Lipschitz. En effet, on a :

$$\|\phi(X) - \phi(Y)\|^2 = \sum_{i=1}^{i=n} |\phi_i(X) - \phi_i(Y)|^2 \leq \gamma_\phi^2 \|X - Y\|^2 \quad (2.6)$$

car ϕ est γ_ϕ -Lipschitzienne.

L'inégalité (2.6) conduit alors à

$$\|\phi_i(X) - \phi_i(Y)\| \leq \gamma_\phi \|X - Y\|$$

ce qui signifie que ϕ_i est γ_{ϕ_i} -Lipschitz avec $\gamma_{\phi_i} \leq \gamma_\phi$. En utilisant le Lemme 2.2, il existe des fonctions $\phi_{ij} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad j = 1, \dots, n$ telles que

$$\phi_i(X) - \phi_i(Y) = \sum_{j=1}^{j=n} \phi_{ij}(X^{Y_{j-1}}, X^{Y_j}) e_n^T(j) (X - Y)$$

où : ϕ_{ij} sont données par l'équation (2.2) du Lemme 2.2 en remplaçant ϕ par ϕ_i .

Comme ϕ_i est γ_{ϕ_i} -Lipschitzienne, on a alors

$$\begin{aligned} |\phi_i(X^{Y_{j-1}}) - \phi_i(X^{Y_j})| &\leq \gamma_{\phi_i} \|X^{Y_{j-1}} - X^{Y_j}\| \\ &= \gamma_{\phi_i} |x_i - y_j| \end{aligned}$$

ce qui signifie que $-\gamma_{\phi_i} \leq \phi_{ij} \leq \gamma_{\phi_i}$ et la preuve est achevée.

2.2 Préliminaire et position du problème

Considérons la classe de systèmes non linéaires à temps discret et à paramètres incertains donnée par la forme suivante :

$$x_{k+1} = (A + \Delta A(k))x_k + Bu_k + \phi(x_k, u_k) + D\omega_k \quad (2.7a)$$

$$y_k = (C + \Delta C(k))x_k + \psi(x_k, u_k) + E\omega_k \quad (2.7b)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur état, $y \in \mathbb{R}^p$ est la sortie et $u \in \mathbb{R}^m$ est le contrôle, le vecteur $\omega \in l_2^s$ est une perturbation exogène inconnu. A, B, C, D et E sont des matrices constantes de dimensions appropriées.

Les paramètres du système sont soumis aux hypothèses suivantes :

- Les paires (A, B) et (A, C) sont respectivement stabilisables et détectables.
- Les incertitudes $\Delta A(k)$ et $\Delta C(k)$ sont supposées structurées et bornées en normes, c'est-à-dire : il existe des matrices $M_i, N_i, F_i(k), i \in \{A, C\}$, de dimensions appropriées telles que

$$\Delta A(k) = M_A F_A(k) N_A, \quad \Delta C(k) = M_C F_C(k) N_C \quad (2.8)$$

où les matrices inconnues $F_A(k)$ and $F_C(k)$ vérifient les conditions

$$F_A^T(k) F_A(k) \leq I, \quad F_C^T(k) F_C(k) \leq I \quad (2.9)$$

- Les non linéarités Φ et Ψ sont Lipschitziennes par rapport à x , uniformément en u et $\phi(0, u^*) = \psi(0, u^*) = 0$ pour tout u^* .

Notre objectif principal consiste à déterminer un observateur de la forme

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= A\hat{x}_k + Bu_k + \phi(\hat{x}_k, u_k) \\ &+ L\left(y_k - C\hat{x}_k - \psi(\hat{x}_k, u_k)\right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

tel que le système (2.7), sous l'action du contrôleur $u_k = -K\hat{x}_k$, est \mathcal{H}_∞ globalement asymptotiquement stable. Le problème est alors réduit à la recherche simultanée du gain L de l'observateur et du gain K du contrôleur tels que le système en boucle fermée est stable et satisfait le critère de performance \mathcal{H}_∞ .

Pour ce faire, soit $\varepsilon_k = x_k - \hat{x}_k$, $z_k^T = [x_k^T \ \varepsilon_k^T]$; sous l'action du contrôleur $u_k = -K\hat{x}_k$, le système en boucle fermée a la forme suivante :

$$z_{k+1} = \begin{bmatrix} A - BK + \Delta A(k) & BK \\ \Delta A(k) - L\Delta C(k) & A - LC \end{bmatrix} z_k + \begin{bmatrix} \phi(x_k, -K\hat{x}_k) \\ \Delta\phi(x_k, \hat{x}_k) - L\Delta\psi(x_k, \hat{x}_k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \\ D - LE \end{bmatrix} \omega_k \quad (2.11)$$

où

$$\Delta\phi(x_k, \hat{x}_k) = \phi(x_k, -K\hat{x}_k) - \phi(\hat{x}_k, -K\hat{x}_k) \quad (2.12a)$$

$$\Delta\psi(x_k, \hat{x}_k) = \psi(x_k, -K\hat{x}_k) - \psi(\hat{x}_k, -K\hat{x}_k). \quad (2.12b)$$

Afin de traiter les termes non linéaire, on exploitera les lemmes 2.2. L'idée principale repose sur la transformation de la non linéarité dans la dynamique (2.11) en un système LPV en exploitant la propriété de Lipschitz. La méthode proposée dans [Zemouche and Boutayeb(2013)] exploite toutes les propriétés de la non-linéarité du système, sans l'approximer par ses normes, et offre ainsi des conditions moins conservatives. En vertu du Lemme 2.3, la propriété de Lipschitz sur ϕ et ψ conduit à l'existence de fonctions $\phi_{ij} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi_{ij} : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ et des constantes $\underline{\gamma}_{\phi_{ij}}$, $\bar{\gamma}_{\phi_{ij}}$, pour $i, j = 1, \dots, n$, $\bar{\gamma}_{\psi_{ij}}$ and $\underline{\gamma}_{\psi_{ij}}$, pour $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, n$, telles que

$$z_{k+1} = \Pi_1(\Theta, \Xi)z_k + \Pi_2\omega_k \quad (2.13)$$

où, après avoir négligé "(k)",

$$\begin{aligned} \Pi_1(\Theta, \Xi) &= \begin{bmatrix} \left((A - BK + \Delta A) + \mathcal{A}(\Theta) \right) & BK \\ \left(\Delta A - L\Delta C \right) & \left(A - LC \right) + \mathcal{A}(\Theta) - LC(\Xi) \end{bmatrix} \\ \mathcal{A}(\Theta) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \phi_{ij} H_{ij}^n, \quad \mathcal{C}(\Xi) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n \psi_{ij} H_{ij}^p \\ \Pi_2 &= \begin{bmatrix} D \\ D - LE \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Notons qu'en vertu du Lemma 2.3, les paramètres Θ et Ξ appartiennent respectivement aux ensembles bornés et convexes \mathcal{H}_n et \mathcal{H}_p , pour lesquels l'ensemble des sommets sont définis par :

$$\mathcal{V}_{\mathcal{H}_n} = \{ \Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}, \Phi_{ij} \in \{ \underline{\gamma}_{\phi_{ij}}, \bar{\gamma}_{\phi_{ij}} \} \}$$

et

$$\mathcal{V}_{\mathcal{H}_p} = \{\Psi \in \mathbb{R}^{p \times n}, \Psi_{ij} \in \{\underline{\gamma}_{\psi_{ij}}, \bar{\gamma}_{\psi_{ij}}\}\}$$

respectivement. Supposons que

$$Z_k = H\varepsilon_k \quad (2.14)$$

soit la sortie à optimiser pour avoir un bon comportement de la commande, où H est une matrice connue. Notre but est de concevoir les paramètres du contrôleur et l'observateur, K and L , tels que le système en boucle fermé (2.13) soit asymptotiquement stable et la propriété suivante de la borne supérieure de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_\infty}$ est garantie :

$$\|Z\|_{l_2^r} \leq \mu \|\omega\|_{l_2^s} \quad (2.15)$$

Comme $z_k^T = [x_k^T \quad \varepsilon_k^T]$, le signal de performance Z donné dans (2.14) peut se réécrire comme suit :

$$Z_k = H\varepsilon_k = [0 \quad H] \begin{bmatrix} x_k \\ \varepsilon_k \end{bmatrix} = [0 \quad H] z_k, \forall k \geq 0$$

Le problème de la \mathcal{H}_∞ stabilité asymptotique du système (2.13) avec le critère de performance (2.15) consiste à trouver une fonction candidate de Lyapunov

$$V(k) := V(z_k) = z_k^T P z_k \quad (2.16)$$

avec $P = P^T > 0$ telle que

$$\|Z_k\|^2 - \mu^2 \|\omega_k\|^2 + \Delta V(k) < 0, \forall k \geq 0, \quad (2.17)$$

voir, par exemple, [Abbaszadeh and Marquez(2009)] et [Grandvallet et al.(2013)]. Pour établir la stabilité du système augmenté (2.13) sous le critère de performance \mathcal{H}_∞ , on considère la matrice de Lyapunov suivante $P = \begin{bmatrix} P_1 & P_{12} \\ (\star) & P_2 \end{bmatrix}$. La différence $\Delta V = V(k+1) - V(k)$ s'exprime comme suit

$$\begin{aligned} \Delta V &= V(k+1) - V(k) \\ &= \left(\Pi_1(\Theta, \Xi) z_k + \Pi_2 \omega_k \right)^T P \left(\Pi_1(\Theta, \Xi) z_k + \Pi_2 \omega_k \right) - z_k^T P z_k \end{aligned} \quad (2.18)$$

Par conséquent, nous avons pour tout $k \geq 0$

$$\|Z_k\|^2 - \mu^2 \|\omega_k\|^2 + \Delta V(k) = \begin{bmatrix} z_k \\ \omega_k \end{bmatrix}^T \Sigma(\Theta, \Xi) \begin{bmatrix} z_k \\ \omega_k \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

où

$$\Sigma(\Theta, \Xi) = \begin{bmatrix} \Pi_1(\Theta, \Xi)^T P \Pi_1(\Theta, \Xi) - P + \tilde{H} & \Pi_1(\Theta, \Xi)^T P \Pi_2 \\ (\star) & \Pi_2^T P \Pi_2 - \mu^2 I \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

et $\tilde{H} = \text{diag} [0 \quad H^T H]$

Ainsi, par le principe de convexité [Boyd et al.(1994)], la condition (2.17) a lieu si et seulement si $\Sigma(\Theta, \Xi) < 0$, pour tout $\Theta \in V_{\mathcal{H}_n}$ et $\Xi \in V_{\mathcal{H}_p}$, qui est équivalente grâce au Lemme de Schur à :

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & [\Pi_1(\Theta, \Xi) \quad \Pi_2] \\ (\star) & \begin{bmatrix} -P + \tilde{H} & 0 \\ 0 & -\mu^2 I \end{bmatrix} \end{bmatrix} < 0, \forall (\Theta, \Xi) \in V_{\mathcal{H}_n} \times V_{\mathcal{H}_p} \quad (2.21)$$

La difficulté principale dans la dérivation de conditions LMIs à partir de l'inégalité (2.21) réside dans la nature bilinéaire du problème (dûs à la présence des incertitudes et aussi à la matrice de Lyapunov et de son inverse). A ce jour, il n'existe aucun principe de congruence permettant de la transformer directement en une inégalité linéaire matricielle. Ce problème est encore ouvert. Dans ce contexte, plusieurs activités de recherche sont apparues; voir e.g., [Abbaszadeh and Marquez(2009)], [Abbaszadeh and Marquez(2008)], [Ibrir et al.(2005)], [Song and Hedrick(2004)], [Ibrir(2008)], juste pour mentionner quelques-une. Dans l'article [Ibrir(2008)], en établissant un lemme de linéarisation, l'auteur a proposé une manière très élégante de surmonter l'obstacle de la présence de P and P^{-1} dans (2.21). Nous le présentons ci-après :

Lemme 2.2.1. Soient X, Y et Z trois matrices de dimensions quelconques tq :
 $X = X^T > 0$ et $Z = Z^T > 0$, l'inégalité matricielle suivante a lieu :

$$\begin{pmatrix} -X & Y^T \\ Y & -Z^{-1} \end{pmatrix} < 0 \quad (2.22)$$

s'il existe une constante positive α telle que :

$$\begin{pmatrix} -X & \alpha Y^T & 0 \\ \alpha Y & -2\alpha I & Z \\ 0 & Z & -Z \end{pmatrix} < 0 \quad (2.23)$$

Preuve. La preuve est toute simple. Elle repose sur le principe de congruence :

$$\begin{pmatrix} -X & Y^T \\ Y & -Z^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} I & Z^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -X & \alpha Y^T & 0 \\ \alpha Y & -2\alpha I & Z \\ 0 & Z & -Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} I \\ 0 & Z^{-1} \end{pmatrix}$$

Dans la section suivante, on présentera l'approche LMI de [Kheloufi et al.(2013d)] qui permet de contourner cet obstacle. Grâce à la technique des variables d'écart (slack variable en anglais) combinée avec l'utilisation judicieuse de la relation de Young's, on obtient des conditions suffisantes moins restrictives assurant la stabilité robuste du système (2.13).

2.3 Conception d'un contrôleur \mathcal{H}_∞ basé-observateur

Dans cette section, nous attaquons le problème de \mathcal{H}_∞ -stabilisation du système (2.7). Nous exposons la méthode proposée par [Kheloufi et al.(2013d)], celle-ci permet de dériver des conditions LMI permettant de calculer simultanément les gains du contrôleur et de l'observateur. La principale caractéristique de cette méthode réside dans le fait qu'elle ne requiert aucune hypothèse supplémentaire

sur les non linéarités [Ibrir(2008)], d'autre part, la contrainte égalité comme dans [Abbaszadeh and Marquez(2005)] et [Ibrir et al.(2005)] disparaît.

Théorème 2.3.1 ([Kheloufi et al.(2013d)]). *Le système (2.7) sous l'action du contrôleur linéaire $u_k = -K\hat{x}_k$ est \mathcal{H}_∞ robustement asymptotiquement stabilisable avec une critère de performance $\|Z\|_{l_2} \leq \mu\|\omega\|_{l_2}$ si pour la donnée de trois scalaires positifs $\epsilon_1, \epsilon_3, \epsilon_4$, il existe un nombre réel $\epsilon_2 > 0$, deux matrices définies positives $\mathcal{P}, \mathcal{G}_1$, une matrice inversible $G_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et deux matrices $\hat{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \hat{L} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tels que la condition LMI $\Omega(\Theta, \Xi) < 0$ donnée par (2.24) est faisable pour tout $\Theta \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}_n}$ et $\Xi \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}_p}$. Par conséquent, les gains du contrôleur et de l'observateur sont respectivement*

$$\Omega(\Theta, \Xi) = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \begin{bmatrix} B\hat{K} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathcal{G}_1 N_A^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ G_2^T M_A & 0 \\ 0 & \mathcal{G}_1 N_A^T \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hat{L} M_C & 0 \\ 0 & \mathcal{G}_1 N_C^T \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ (*) & \begin{bmatrix} -\epsilon_1 \mathcal{G}_1 & 0 \\ 0 & -\epsilon_1^{-1} \mathcal{G}_1 \end{bmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ (*) & (*) & -\epsilon_2 I & 0 & 0 \\ (*) & (*) & (*) & \begin{bmatrix} -\epsilon_3 I & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\epsilon_3} I \end{bmatrix} & 0 \\ (*) & (*) & (*) & (*) & \begin{bmatrix} -\epsilon_4 I & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\epsilon_4} I \end{bmatrix} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.24)$$

où

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12}(\Theta, \Xi) & \begin{bmatrix} D \\ G_2^T D - \hat{L} E \end{bmatrix} \\ (*) & -\mathcal{P} + \tilde{H} & 0 \\ (*) & (*) & -\mu^2 I \end{bmatrix} \\ \mathcal{M}_{11} &= \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{11} - 2\mathcal{G}_1 + \epsilon_2 M_A M_A^T & \mathcal{P}_{12} \\ (*) & \mathcal{P}_{22} - G_2 - G_2^T \end{bmatrix}, \\ \mathcal{M}_{12}(\Theta, \Xi) &= \begin{bmatrix} A\mathcal{G}_1 - B\hat{K} + \mathcal{A}(\Theta)\mathcal{G}_1 & 0 \\ (*) & G_2^T A - \hat{L}C + G_2^T \mathcal{A}(\Theta) - \hat{L}C(\Xi) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

donnés par $K = \hat{K}G_1^{-1}$ et $L = (G_2^T)^{-1}\hat{L}$

Démonstration. Comme les variables P et P^{-1} sont dépendantes, elle ne doivent pas exister simultanément dans la même LMI. L'idée cruciale permettant d'éliminer la variable P^{-1} consiste à introduire une variable matricielle supplémentaire de dimension appropriée, dite variable d'écart et par dénotée par G . Cette idée est largement inspirée des travaux [Gahinet et al.(1996)], [Feron et al.(1996)],

[de Oliveira et al.(1999)]: pré- et post-multiplions (2.21) par $\text{diag}(G^T, I, I)$ et $\text{diag}(G, I, I)$ respectivement. L'inégalité (2.21) est alors équivalente (grâce au principe de congruence) à la suivante

$$\begin{bmatrix} -G^T P^{-1} G & G^T \Pi_1(\Theta, \Xi) & G^T \Pi_2 \\ (\star) & -P + \tilde{H} & 0 \\ (\star) & (\star) & -\mu^2 I \end{bmatrix} < 0, \forall (\Theta, \Xi) \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}_n} \times \mathcal{V}_{\mathcal{H}_p} \quad (2.25)$$

Afin de linéariser le terme $-G^T P^{-1} G$ dans (2.25), on utilise l'estimation suivante

$$-G^T P^{-1} G \leq P - G - G^T \quad (2.26)$$

qui provient du fait que P est symétrique définie positive et de l'inégalité $(P - G)^T P^{-1} (P - G) \geq 0$. En choisissant $G = \text{diag}(G_1, G_2)$, et en prenant en considération l'approximation (2.26), on déduit que l'inégalité (2.25) a lieu si l'inégalité suivante est vérifiée.

$$\begin{bmatrix} \aleph_{11} & \begin{bmatrix} G_1^T (A - BK + \Delta A + \mathcal{A}(\Theta)) & G_1^T BK \\ G_2^T (\Delta A - L\Delta C) & G_2^T (A + \mathcal{A}(\Theta) - L(C + \mathcal{C}(\Xi))) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} G_1^T D \\ G_2^T (D - LE) \end{bmatrix} \\ (\star) & -P + \tilde{H} & 0 \\ (\star) & (\star) & -\mu^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.27)$$

$$\forall (\Theta, \Xi) \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}_n} \times \mathcal{V}_{\mathcal{H}_p} \quad (2.29)$$

avec

$$\aleph_{11} = P - \begin{bmatrix} G_1 + G_1^T & 0 \\ 0 & G_2 + G_2^T \end{bmatrix},$$

Remarquons que G_1 et G_2 sont seulement inversibles (et pas nécessairement définies positives). En effet, comme l'inégalité (2.27) a lieu, on a nécessairement $G_1 + G_1^T > P_{11} > 0$ et $G_2 + G_2^T > P_{22} > 0$. D'où l'on déduit que G_1 et G_2 sont à plein rang.

A présent, l'inégalité (2.27) est une BMI, entre autre, à cause de la présence du terme $G_1^T BK$. Afin de la linéariser, nous devons attacher K à G_1 . Pour ce faire, on pré- et post-multiplie la matrice de l'inégalité (2.27) par la matrice $\text{diag}(G_1^{-1}, I, G_1^{-1}, I, I, I)$ et en choisissant $G_1 = G_1^T$, l'inégalité (2.27) prend alors la forme équivalente suivante

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12}(\Theta, \Xi) & \Sigma_{13} \\ (\star) & \Sigma_{22} & 0 \\ (\star) & (\star) & -\mu^2 I \end{bmatrix} < 0, \forall (\Theta, \Xi) \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}_n} \times \mathcal{V}_{\mathcal{H}_p}, \quad (2.30)$$

où

$$\Sigma_{11} = \begin{bmatrix} G_1^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} G_1^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2G_1^{-1} & 0 \\ 0 & G_2 + G_2^T \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

$$\Sigma_{12}(\Theta, \Xi) = \begin{bmatrix} \Sigma_{12}^{11} & BK \\ \Sigma_{12}^{21} & \Sigma_{12}^{22} \end{bmatrix}, \Sigma_{13} = \begin{bmatrix} D \\ G_2^T(D - LE) \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_{12}^{11} = (A + \mathcal{A}(\Theta) + \Delta A)G_1^{-1} - BK G_1^{-1},$$

$$\Sigma_{12}^{22} = G_2^T (A - LC + \mathcal{A}(\Theta) - LC(\Xi)),$$

$$\Sigma_{22} = - \begin{bmatrix} G_1^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} G_1^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \tilde{H}.$$

Afin de simplifier les notations, on fera le changement de variable suivant

$$\mathcal{G}_1 := G_1^{-1}, \mathcal{P} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{11} & \mathcal{P}_{12} \\ (\star) & \mathcal{P}_{22} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \mathcal{G}_1 P_1 \mathcal{G}_1 & \mathcal{G}_1 P_{12} \\ (\star) & P_2 \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

$$\hat{K} := K G_1^{-1}, \hat{L} := G_2^T L. \quad (2.33)$$

Nous allons maintenant séparer le terme BK de l'inégalité (2.30), on obtient décomposition suivante de (2.30):

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \begin{bmatrix} \Sigma_{12}^{11} & 0 \\ \Sigma_{12}^{21} & \Sigma_{12}^{22} \end{bmatrix} & \Sigma_{13} \\ (\star) & \Sigma_{22} & 0 \\ (\star) & (\star) & -\mu^2 I \end{bmatrix}}^{\Sigma(\Theta, \Xi)} + X^T Y + Y^T X < 0, \forall (\Theta, \Xi) \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}_n} \times \mathcal{V}_{\mathcal{H}_p}, \quad (2.34)$$

où

$$X = [(BK)^T \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], Y = [0 \ 0 \ 0 \ I \ 0]$$

En utilisant le relation de Young, on déduit que l'inégalité (2.34) a lieu si

$$\begin{aligned} & \Sigma(\Theta, \Xi) + \epsilon_1 X^T S X + \frac{1}{\epsilon_1} Y^T S^{-1} Y \\ & = \Sigma(\Theta, \Xi) - \begin{bmatrix} SX \\ Y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\epsilon_1 S & 0 \\ 0 & -\epsilon_1^{-1} S \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} SX \\ Y \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

pour un certain $\epsilon_1 > 0$, pour tout $(\Theta, \Xi) \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}_n} \times \mathcal{V}_{\mathcal{H}_p}$. Nous récupérons ainsi la variable $\hat{K} = K \mathcal{G}_1$ et nous éliminons la variable isolée K en utilisant (2.35) avec le choix judicieux de $S = \mathcal{G}_1$. Merci alors

au Lemme de Schur, (2.35) a lieu si :

$$\bar{\Sigma}(\Theta, \Xi) = \begin{bmatrix} \Sigma(\Theta, \Xi) & \begin{bmatrix} B\hat{K} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ (\star) & \begin{bmatrix} -\epsilon_1 \mathcal{G}_1 & 0 \\ 0 & -\epsilon_1^{-1} \mathcal{G}_1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} < 0, \forall (\Theta, \Xi) \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}_n} \times \mathcal{V}_{\mathcal{H}_p} \quad (2.36)$$

La dernière étape consiste à linéariser cette dernière équation par rapport aux incertitudes. Nous exprimons $\bar{\Sigma}(\Theta, \Xi)$ comme somme de deux matrices, une matrice contenant tous les termes d'incertitude ΔA et ΔC . La matrice restante (sans les termes d'incertitudes), dénotée par $\Lambda(\Theta, \Xi)$, est alors donnée comme suit :

$$\Lambda(\Theta, \Xi) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12}(\Theta, \Xi) & \begin{bmatrix} D \\ G_2^T D - \hat{L}E \end{bmatrix} \\ (\star) & -\mathcal{P} + \tilde{H} & 0 \\ (\star) & (\star) & -\mu^2 I \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B\hat{K} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ (\star) & \begin{bmatrix} -\epsilon_1 \mathcal{G}_1 & 0 \\ 0 & -\epsilon_1^{-1} \mathcal{G}_1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.37)$$

où

$$A_{11} = \Sigma_{11}, \quad (\text{voir la formule (2.31)}),$$

$$A_{12}(\Theta, \Xi) = \text{diag}(A_{12}^{11}, A_{12}^{22}),$$

$$A_{12}^{11} = A\mathcal{G}_1 - B\hat{K} + \mathcal{A}(\Theta)\mathcal{G}_1,$$

$$A_{12}^{22} = G_2^T A - \hat{L}C + G_2^T \mathcal{A}(\Theta) - \hat{L}C(\Xi).$$

En utilisant la formule de Young et (2.8), on obtient

$$\bar{\Sigma}(\Theta, \Xi) \leq \Lambda(\Theta, \Xi) + \epsilon_2 Z_1 Z_1^T + \frac{1}{\epsilon_2} Z_2 Z_2^T + \epsilon_3 Z_3 Z_3^T \quad (2.38)$$

$$+ \frac{1}{\epsilon_3} Z_2 Z_2^T + \epsilon_4 Z_4 Z_4^T + \frac{1}{\epsilon_4} Z_5 Z_5^T \quad (2.39)$$

pour tout ϵ_2, ϵ_3 et ϵ_4 , où

$$Z_1^T = [M_A^T \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\begin{aligned} Z_2^T &= [0 \ 0 \ N_A \mathcal{G}_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\ Z_3^T &= [0 \ M_A^T G_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\ Z_4^T &= [0 \ M_C^T \hat{L}^T \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\ Z_5^T &= [0 \ 0 \ \mathcal{G}_1 N_C^T \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]. \end{aligned}$$

En combinant ces dernières estimations et le Lemme de Schur, on déduit que l'inégalité $\Omega(\Theta, \Xi) < 0$ a lieu pour tout $\Theta \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}_n}$ et $\Xi \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}_p}$ si la condition LMI (2.24) is faisable pour tout $\Theta \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}_n}$ et $\Xi \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}_p}$. Ceci achève la démonstration. \square

2.4 Commentaires sur les méthodes de [Kheloufi et al.(2013d)] et [Ibrir(2008)]

Cette section est dédiée à certaines clarifications concernant le Théorème 2.3.1 et une comparaison avec certains résultats disponibles dans la littérature. En particulier, nous commentons brièvement l'approche proposée dans [Ibrir(2008)].

2.4.1 Discussions sur la méthode de [Kheloufi et al.(2013d)]

Observons que les inégalités (2.24) sont des LMIs si les scalaires ϵ_1 , ϵ_3 , et ϵ_4 sont fixés a priori. Afin de surmonter la difficulté du choix de ϵ_3 and ϵ_4 , on peut utiliser la forme générale de la relation de Young (2.1) : en effet, on considère α_3 , α_4 , β_3 , et β_4 au lieu de ϵ_3 et ϵ_4 , on remplace ϵ_3 par $\frac{\alpha_3^2}{\beta_3^2}$, et ϵ_4 par $\frac{\alpha_4^2}{\beta_4^2}$ dans (2.24). Les identités suivantes

$$\left(\beta - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2 I \geq 0, \quad \left(\alpha - \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 I \geq 0 \quad (2.40)$$

sont alors utilisées pour estimer les termes $(-\epsilon_3 I)$, $-\epsilon_4 I$ et leur inverses $(-\epsilon_3^{-1} I)$, $(-\epsilon_4^{-1} I)$:

$$-\frac{\alpha^2}{\beta^2} I \leq \beta^2 I - 2\alpha I, \quad -\frac{\beta^2}{\alpha^2} I \leq \alpha^2 I - 2\beta I. \quad (2.41)$$

Le Lemme de Schur permet alors d'avoir les LMIs (2.42) qui est linéaire par rapport aux variables α_3 , α_4 , β_3 , et β_4 . D'autres part, nous procédons comme dans [Li and Fu(1997), Remark 5], en utilisant la méthode de maillage, pour éviter l'apparition de ϵ_1 et son inverse dans (2.24). Cette dernière consiste à faire un changement d'échelle pour ϵ_1 en définissant $\kappa = \frac{\epsilon_1}{1+\epsilon_1}$. Clairement, $\epsilon_1 > 0$ si et seulement si $\kappa \in (0,1)$. Ensuite, nous attribuons une subdivision uniforme de l'intervalle $(0,1)$ et on résout les LMIs (2.24) pour chacune des valeurs de cette subdivision.

Remarque 2.1. Notons que la valeur optimal (minimale) du niveau μ d'atténuation des perturbations s'obtient en résolvant le problème d'optimisation convexe avec contraintes LMI :

$$\min \mu \text{ subject to (2.24)}. \quad (2.43)$$

$$\left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12}(\Theta, \Xi) & \begin{bmatrix} D \\ G_2^T D - \hat{L}E \end{bmatrix} \\ (\star) & -\mathcal{P} + \tilde{H} & 0 \\ (\star) & (\star) & -\mu^2 I \end{array} \right] & \begin{bmatrix} B\hat{K} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathcal{G}_1 N_A^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_2^T M_A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{G}_1 N_A^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathcal{T}_{15} \\ (\star) & \begin{bmatrix} -\epsilon_1 \mathcal{G}_1 & 0 \\ 0 & -\epsilon_1^{-1} \mathcal{G}_1 \end{bmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & -\epsilon_2 I & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & \begin{bmatrix} -2\beta_3 I & \alpha_3 I & 0 & 0 \\ \alpha_3 I & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha_3 I & \beta_3 I \\ 0 & 0 & \beta_3 I & -I \end{bmatrix} & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & \mathcal{T}_{55} \end{array} \right] < 0 \quad (2.42)$$

où

$$\mathcal{T}_{15} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{L}M_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{G}_1 N_C^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{T}_{55} = \begin{bmatrix} -2\beta_4 I & \alpha_4 I & 0 & 0 \\ \alpha_3 I & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha_4 I & \beta_4 I \\ 0 & 0 & \beta_4 I & -I \end{bmatrix}$$

\mathcal{M}_{11} et $\mathcal{M}_{12}(\Theta, \Xi)$ sont définies dans (2.24).

2.4.2 Commentaire sur le résultat de [Ibrir(2008)]

Ici, nous faisons une étude comparative avec le résultat de [Ibrir(2008)], en verra que le résultat donné via l'approche de [Kheloufi et al.(2013d)] est plus général que celui de [Ibrir(2008)].

- Premièrement, il y a lieu de signaler qu'il n'est pas nécessaire de supposer dans [Ibrir(2008), Formula (2)] que la matrice Jacobienne des nonlinearités appartient à un ensemble (convexe) polytopique, puisque cette propriété découle directement du Lemme de reformulation de la condition de Lipschitz [Zemouche and Boutayeb(2013)].
- Deuxièmement, si on fait le choix particulier de la variable d'écart $G_1 = G_2 = \alpha I$ dans la preuve du Théorème 2.3.1, il est facile de dériver la condition LMI (35) de [Ibrir(2008), Theorem 3]. Notons que, dans ce cas, l'étape de séparation du terme BK faite dans (2.34) n'est pas nécessaire, puisque la variable scalaire α (ou de façon équivalente la matrice G_1) est partout attachée à la variable K .
- De même, l'étape de la transformation de congruence (voir la Formule (2.27)) est omise, car avec cette structure particulière de la matrice G , on a $G_1 K B = K G_1 B$. Un changement de variable serait donc possible.
- Finalement, l'étape de linearisation des incertitudes est omise puisque $\Delta A = \Delta C = 0$ dans [Ibrir(2008)].

Toutes les considérations précédentes conduisent aux conditions de synthèses suivantes qui coïncident exactement avec celle obtenues dans [Ibrir(2008)] :

Théorème 2.4.1. *S'il existe une matrice définie positive $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, deux matrices de gain $\tilde{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\tilde{L} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ et une constante positive α tels que le problème d'optimisation suivant est solvable pour tout $\Theta \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}_n}$:*

$$\begin{bmatrix} -P + \tilde{H} & 0 & \mathcal{B}(\Theta) & 0 \\ (\star) & -\mu^2 I & \alpha \mathcal{D}^T & 0 \\ (\star) & (\star) & -2\alpha I & P \\ (\star) & (\star) & (\star) & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (2.44)$$

où

$$\mathcal{B}(\Theta) = \begin{bmatrix} \alpha(A + \mathcal{A}(\Theta)) + B\tilde{K} & B\tilde{K} \\ 0 & \alpha(A + \mathcal{A}(\Theta) + \tilde{L}C) \end{bmatrix}^T,$$

alors le système (3) est \mathcal{H}_∞ globalement asymptotiquement stable avec $u_k = K\hat{x}_k$. Les gains du contrôleur \mathcal{H}_∞ basé-observateur stabilisant (3) sont donnés par $K = \tilde{K}/\alpha$ et $L = \tilde{L}/\alpha$.

Démonstration. Comme $\Delta A = \Delta C = 0$ et en posant $\mathcal{D} = \begin{bmatrix} D \\ D \end{bmatrix}$, l'inégalité (2.25) est équivalente à la suivante:

$$\begin{bmatrix} P - 2\alpha I & \mathcal{B}(\Theta)^T & \alpha \mathcal{D} \\ (\star) & -P + \tilde{H} & 0 \\ (\star) & (\star) & -\mu^2 I \end{bmatrix} < 0, \forall \Theta \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}_n}.$$

Par le Lemme Schur, cette dernière peut se réécrire comme suit :

$$\begin{bmatrix} -P + \tilde{H} & 0 & \mathcal{B}(\Theta) \\ (\star) & -\mu^2 I & \alpha \mathcal{D}^T \\ (\star) & (\star) & P - 2\alpha I \end{bmatrix} < 0, \forall \Theta \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}_n},$$

qui est équivalente à la LMI (2.44). Cela permet d'achever la démonstration. \square

2.5 Application numérique

Afin de valider l'approche proposée dans le théorème 2.3.1, considérons le système suivant et testons la faisabilité de la LMI (2.24). Le système a les paramètres suivants :

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.4 \\ 0.6 & 1 & 0.5 \\ -0.3 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -0.4 & 0.5 \\ 0.6 & -0.4 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \phi(x) = \begin{bmatrix} 0.1 \sin(x_2) \\ 0.2 \sin(x_3) \\ 0.3 \sin(x_1) \end{bmatrix},$$

$$M_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.1 & 0.3 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, N_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}, N_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}, M_C = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

D'après le lemme 2.3, on a

$$\mathcal{V}_{\mathcal{H}_\infty} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \pm 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 0.2 \\ \pm 0.3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

La LMI (2.24) du Théorème 2.3.1 pour $H = 0.15I_3$ est faisable pour le choix a priori de $\epsilon_1 = 2.6$, $\epsilon_3 = 2.7126$ and $\epsilon_4 = 39.9161$. On obtient les solutions suivantes :

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 337,9432 & 165,1723 & -161,4772 & 0,4500 & 0,6370 & -0,6838 \\ 165,1723 & 490,4036 & -105,5508 & 0,6370 & -0,1755 & -0,3824 \\ -161,4772 & -105,5508 & 103,4365 & -0,6838 & -0,3824 & 0,4085 \\ 0,4500 & 0,6370 & -0,6838 & 6,4848 & -0,9721 & -5,0278 \\ 0,6370 & -0,1755 & -0,3824 & -0,9721 & 2,0972 & -0,8663 \\ -0,6838 & -0,3824 & 0,4085 & -5,0278 & -0,8663 & 5,6849 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{G}_1 = \begin{bmatrix} 238,7766 & 54,6632 & -106,9605 \\ 54,6632 & 511,2684 & -44,4482 \\ -106,9605 & -44,4482 & 66,5055 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{G}_2 = \begin{bmatrix} 8,0343 & -0,6764 & -6,8128 \\ -0,6764 & 2,4847 & -1,4899 \\ -6,8128 & -1,4899 & 7,9053 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} 0.0670 & 0.0301 & 0.4360 \\ 0.0673 & 0.0900 & 0.0178 \end{bmatrix},$$

$$L^T = \begin{bmatrix} 0.6402 & 1.8087 & 0.2509 \\ -0.2272 & -0.6510 & -0.0881 \end{bmatrix}.$$

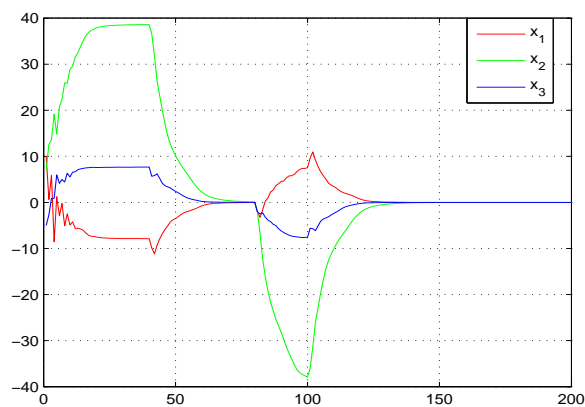
La valeur de ϵ_2 est donnée par :

$$\epsilon_2 = 35.3849.$$

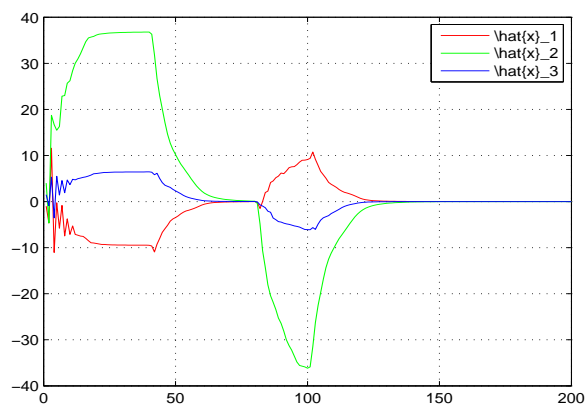
Notons que cette solution correspond à celle du problème d'optimisation (2.43), et la valeur optimale de μ est $\mu_{\min} = 0.81$. Cela montre bien la validité de la méthode présentée dans le Théorème 2.3.1. Le système en boucle fermé correspondant au contrôleur obtenu est simulé en utilisant Matlab et les résultats de simulation sont présentés dans la Figure 2.1. Ces simulations sont réalisées pour un horizon $T = 200$, avec l'état $x_0^T = [10 \ 7 \ -5]$ de l'état du système et l'état initial $\hat{x}_0^T = [-1 \ 4 \ 1.5]$ de l'observateur. On suppose que le système est affecté par le bruit

$$\omega(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } t \in [0,40[, \\ -2 & \text{si } t \in [40,80[, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

La \mathcal{H}_∞ -stabilité du système est clairement illustrée dans la Figure 2.1.



(a) Les états stabilisés



(b) Les états estimés

FIG. 2.1 – États contrôlés et leurs estimés

Bibliographie

- [Abbaszadeh and Marquez(2008)] Masoud Abbaszadeh and Horacio J. Marquez. Robust observer design for sampled-data Lipschitz nonlinear systems with exact and Euler approximate models. *Automatica*, 44(3):799 – 806, 2008.
- [Abbaszadeh and Marquez(2009)] Masoud Abbaszadeh and Horacio J. Marquez. LMI optimization approach to robust \mathcal{H}_∞ observer design and static output feedback stabilization for discrete-time nonlinear uncertain systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 19(3):313–340, 2009. ISSN 1099-1239.
- [Abbaszadeh and Marquez(2010)] Masoud Abbaszadeh and Horacio J. Marquez. Dynamical robust \mathcal{H}_∞ filtering for nonlinear uncertain systems: An LMI approach. *Journal of the Franklin Institute*, 347(7):1227 – 1241, 2010.
- [Abbaszadeh and Marquez(2012)] Masoud Abbaszadeh and Horacio J. Marquez. A generalized framework for robust nonlinear filtering of Lipschitz descriptor systems with parametric and nonlinear uncertainties. *Automatica*, 48(5):894 – 900, 2012.
- [Bara and Boutayeb(2005)] G.I. Bara and M. Boutayeb. Static output feedback stabilization with \mathcal{H}_∞ performance for linear discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(2):250–254, 2005. ISSN 0018-9286.
- [Boyd et al.(1994)] Stephen Boyd, Laurent El Ghaoui, Eric Feron, and Venkataramanan Balakrishnan. Linear matrix inequalities in system and control theory, volume 15 of SIAM Studies in Applied Mathematics. *Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM)*, Philadelphia, PA, 1994. ISBN 0-89871-334-X.
- [Daafouz and Bernussou(2001)] J. Daafouz and J. Bernussou. Parameter dependent lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties. *Systems & Control Letters*, 43(5):355 – 359, 2001.
- [de Oliveira et al.(1999)] M.C. de Oliveira, J. Bernussou, and J.C. Geromel. A new discrete-time robust stability condition. *Systems & Control Letters*, 37(4):261 – 265, 1999.
- [de Souza et al.(1993)] Carlos E. de Souza, Lihua Xie, and Youyi Wang. \mathcal{H}_∞ filtering for a class of uncertain nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 20(6):419 – 426, 1993.
- [Feron et al.(1996)] E. Feron, P. Apkarian, and P. Gahinet. Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*,

41(7):1041–1046, Jul 1996.

- [Gahinet et al.(1996)] P. Gahinet, P. Apkarian, and M. Chilali. *Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty*. IEEE Transactions on Automatic Control, 41(3):436–442, Mar 1996.
- [Garcia et al.(2001)] G. Garcia, B. Pradin, and F. Zeng. *Stabilization of discrete time linear systems by static output feedback*. IEEE Transactions on Automatic Control, 46(12):1954–1958, 2001. ISSN 0018-9286.
- [Grandvallet et al.(2013)] B. Grandvallet, A. Zemouche, H. Souley-Ali, and M. Boutayeb. *New LMI condition for observer-based \mathcal{H}_∞ stabilization of a class of nonlinear discrete-time systems*. SIAM J. Control Optim., 51(1):784–800, 2013.
- [Ibrir et al.(2005)] S. Ibrir, W.F. Xie, and C.Y. Su. *Observer-based control of discrete-time Lipschitzian non-linear systems: application to one-link flexible joint robot*. International Journal of Control, 78(6):385–395, 2005.
- [Ibrir(2008)] Salim Ibrir. *Static output feedback and guaranteed cost control of a class of discrete-time nonlinear systems with partial state measurements*. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 68(7):1784 – 1792, 2008. ISSN 0362-546X.
- [Ibrir and Diopt(2008)] Salim Ibrir and Sette Diopt. *Novel LMI conditions for observer-based stabilization of lipschitzian nonlinear systems and uncertain linear systems in discrete-time*. Applied Mathematics and Computation, 206(2):579 – 588, 2008.
- [Karafyllis and Kravaris(2005)] I. Karafyllis and C. Kravaris. *Robust output feedback stabilization and nonlinear observer design*. Systems & control letters, 54(10):925–938, 2005.
- [Kheloufi et al.(2013a)] H. Kheloufi, A Zemouche, F. Bedouhene, and M. Boutayeb. *A new observer-based stabilization method for linear systems with uncertain parameters*. In European Control Conference (ECC), 2013, pages 1120–1125, July 2013a.
- [Kheloufi et al.(2013b)] H. Kheloufi, A. Zemouche, F. Bedouhene, and M. Boutayeb. *On LMI conditions to design observer-based controllers for linear systems with parameter uncertainties*. Automatica, 49(12):3700–3704, 2013b.
- [Kheloufi et al.(2013c)] H. Kheloufi, F. Bedouhene, A. Zemouche, and A. Alessandri. *Convex optimization approach to observerbased stabilization of linear systems with parameter uncertainties*. In Proc. 52nd IEEE Conference on Decision and Control, pages 1125–1130, Firenze, Italy, 2013.
- [Kheloufi et al.(2013d)] H. Kheloufi, F. Bedouhene, A. Zemouche, and H. Souley Ali. *Robust \mathcal{H}_∞ -Observer-Based Controller for Lipschitz Nonlinear Discrete-Time Systems with Parameter Uncertainties*. In Proc. 53rd IEEE Conference on Decision and Control, California, USA, 2014.
- [Li and Fu(1997)] Huaizhong Li and Minyue Fu. *A linear matrix inequality approach to robust \mathcal{H}_∞ filtering*. IEEE Transactions on Signal Processing, 45(9):2338–2350, 1997. ISSN 1053-587X.
- [Pertew et al.(2007)] A.M. Pertew, H.J. Marquez, and Q. Zhao. *LMI-based sensor fault diagnosis for nonlinear lipschitz systems*. Automatica, 43(8):1464 – 1469, 2007.

- [Petersen and Tempo(2014)] Ian R. Petersen and Roberto Tempo. *Robust control of uncertain systems: Classical results and recent developments*. Automatica, 50(5):1315 – 1335, 2014.
- [Song and Hedrick(2004)] B. Song and J.K. Hedrick. *Observer-based dynamic surface control for a class of nonlinear systems: an LMI approach*. IEEE Transactions on Automatic Control, 49(11):1995–2001, 2004.
- [Wang et al.(1992)] Youyi Wang, Lihua Xie, and Carlos E. de Souza. *Robust control of a class of uncertain nonlinear systems*. Systems & Control Letters, 19(2):139 – 149, 1992.
- [Wang and Unbehauen(2000)] Zidong Wang and H. Unbehauen. *A class of nonlinear observers for discrete-time systems with parametric uncertainty*. International Journal of Systems Science, 31(1):19–26, 2000.
- [Xie et al.(1996)] Lihua Xie, Carlos E. De Souza, and Youyi Wang. *Robust filtering for a class of discrete-time uncertain nonlinear systems: An \mathcal{H}_∞ approach*. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 6(4):297–312, 1996.
- [Zemouche and Boutayeb(2013)] Ali Zemouche and Mohamed Boutayeb. *On LMI conditions to design observers for Lipschitz nonlinear systems*. Automatica, 49(2):585 – 591, 2013.
- [Trelat et Haberkorn] Trélat, E. et Haberkorn, T.; *Cours d’automatique, Master de Mathématiques, Université d’Orléans, Premier trimestre*.
- [Trelat (2007)] Trélat, E.; *Contrôle optimal: Théorie et application, Université d’Orléans, 2007*.