

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE.
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE.
UNIVERSITE MOULOU D MAMMERI, TIZI-OUZOU.
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUES



MEMOIRE DE MASTER EN RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

OPTION : OPTIMISATION ET AIDE A LA DÉCISION

Algorithmes Gloutons Optimaux pour les graphes d'indifférence

Présenté par:

M^{elle} **YAHIA Souhila**

Proposé par:

M **SADI Bachir**

Devant le jury composé de:

M B. OUKACHA ; Maître de conférence 'A'

M B. SADI ; Maître de conférence 'A'

M K. KASDI ; Maître assistant 'A'

M M. AOUANE ; Maître assistant 'A'

UMMTO ; Président

UMMTO ; Promoteur

UMMTO ; Examineur

UMMTO ; Examineur

Soutenu le: 19/10/2011

Remerciements

Au nom de dieu le plus puissant le plus miséricordieux.

Je remercie chaleureusement et spécialement mon promoteur M B. SADI qui a accepté de dériquer ce modeste travail, et qui m'a orientée dans ce dernier. J'exprime mes profonds remerciements pour son aide, ses conseils, sa compréhension tout au long du travail, malgré ses énormes préoccupations, il nous donne toujours un temps pour toutes nos interrogations.

Je remercie vivement l'ensemble des membres du jury pour l'honneur qu'ils me font de juger ce travail.

Enfin, que toute personne qui, d'une façon ou d'une autre, a contribué à la réalisation de cette étude, trouve ici le témoignage de ma vive gratitude

Je suis également reconnaissante envers tous les enseignants qui m'ont formé, en particulier ceux de l'université Mouloud MAMMERI.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à:

Mes très chères parents pour leurs encouragements continu.

Mon frère: Ali,

Mes soeurs: Sonia, Lila, Samia, Sarah, Zineb,

Ma soeur Sabrina et son mari,

Mes grandes mères,

Mes cousins,

Ma tante Tassadit et sa famille,

M DJENDER et sa famille,

Mme DEHBI,

Mes amis: Fatiha, Algia, Hakima, Karim, Mourad et sa femme, Saida et sa famille, Ghania, Ouzna, Naima, Meriem, Souad, Naoual, Linda, Lamia, sans oublier Louness qui m'a vraiment encouragé dans les cas de déception et tous les autres collègues surtout ceux de la classe M2 RO.

Table des matières

Table des matières	1
Introduction générale	1
1 Définitions et préliminaires	4
2 Graphes d’intervalles	11
2.1 Graphes triangulés et graphes d’intervalles	11
2.2 Graphes d’intervalles propres et graphes d’intervalles unitaires	15
3 Algorithmes gloutons optimaux des graphes d’indifférence	19
3.1 Algorithmes gloutons des graphes d’indifférence	27
3.1.1 Algorithme de reconnaissance	27
3.2 Algorithmes gloutons pour Divers problèmes informatiques	30
4 Exemples d’applications	40
4.1 Qui a tué le Densmore?	40
4.2 Problème d’affectation des employés	42
Conclusion générale	44
Bibliographie	45

Introduction générale

La théorie des graphes a connu un grand essor scientifique durant les dernières décennies, elle suscite un grand intérêt car elle a de nombreuses applications dans des domaines variés tels que les télécommunications, la logistique ou la confection d'horaires. Beaucoup de problèmes sont difficiles à résoudre dans des graphes généraux, mais faciles dans des graphes particuliers. Quand on a affaire à un graphe, il est donc important de savoir à quelle classe de graphes il appartient cela peut simplifier beaucoup de choses.

Un problème fondamental en sciences sociales et de gestion est de comprendre et prédire les décisions prises par des individus, des groupes différents, ou de la société dans son ensemble. Dans ce contexte, un concept important est la notion d'indifférence. Nous caractérisons la classe des graphes d'indifférence comme celle des graphes qui surgissent dans le processus de quantification des relations d'indifférence; en particulier, nous montrons que ces graphes sont caractérisés par l'existence d'un ordre spécial de leurs sommets. Cet ordre conduit naturellement à des algorithmes gloutons optimaux pour un certain nombre de problèmes informatiques, y compris la coloration, la recherche d'un plus court chemin entre deux sommets, le calcul d'un couplage maximum, le centre et le chemin hamiltonien.

Le présent travail est réparti en quatre chapitres précédés d'une introduction générale:

- Le **premier** est dédié aux notions de bases utilisées dans ce mémoire sous forme de définitions et préliminaires,

- ▶ Le **deuxième**, Graphes d'intervalles: on a décrit la classe des graphes triangulés ainsi que leurs propriétés relatives et les théorèmes obtenus après l'étude de cette classe, et les graphes d'intervalles propres qui est une classe importante des graphes d'intervalles.
- ▶ Au **troisième chapitre**, on rentre dans l'essentiel du travail; soit les Algorithmes Gloutons pour les graphes d'indifférence, dont on a déterminé les algorithmes de reconnaissance (calcul-ordre, Test-Indifférence) et les algorithmes de calcul de quelques invariants dans cette classe de graphes (Coloration, Recherche-Distance, Chemin-Hamiltonien, Couplage-Maximum)
- ▶ Le **quatrième chapitre**, est réservé aux exemples d'application (Qui a tué le Duc Densmore, Problème d'affectation des employés).

Dans ce travail, tous les graphes sont finis, sans boucle ni arêtes multiples. En plus la terminologie est celle utilisée dans Golumbic [25]. Nous utilisons quelques nouveaux termes que nous allons définir.

Chapitre 1

Définitions et préliminaires

Dans ce chapitre on va introduire quelques notions de base sur la théorie des graphes indispensables et nécessaires à la compréhension de ce mémoire.

D'une façon intuitive, un graphe est un schéma constitué par un ensemble (supposé ici fini) de points $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, et par un ensemble de flèches reliant chacune deux de ceux-ci, et dénotées $1, 2, \dots, m$. Les points sont appelés les sommets du graphe et les flèches les arcs du graphe. Si en outre, le nombre d'arcs qui va d'un sommet x_i à un sommet x_j ne peut jamais excéder un entier p , on dira qu'on a un p -graphe.

L'ensemble des sommets du graphe G se désigne généralement par X , l'ensemble des arcs étant lui-même désigné par U .

Le graphe est donc complètement déterminé par ses sommets et par la famille constituée par les différentes formes de ses arcs.

D'une façon plus formalisée, un graphe $G = (X, U)$ est le couple constitué de:

1. Un ensemble $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
2. Une famille $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ d'éléments du produit cartésien

$$X \times X = \{(x, y) / x \in X, y \in X\};$$

Le nombre de sommets du graphe G est appelé *l'ordre de G*

On dit que y est un successeur de x s'il existe un arc ayant son extrémité initiale en x et son extrémité terminale en y . L'ensemble des successeurs de

x se note

$$\Gamma_G^+(x)$$

De même, on dit que y est un prédécesseur de x s'il existe un arc de la forme (y,x) . L'ensemble des prédécesseurs de x se note

$$\Gamma_G^-(x)$$

L'ensemble des sommets voisins de x se note

$$\Gamma_G(x) = \Gamma_G^+(x) \cup \Gamma_G^-(x).$$

Matrice d'adjacence

- Deux sommets x et y sont adjacents s'il existe $u \in U$ / $u = (x,y)$ ou $u = (y,x)$.

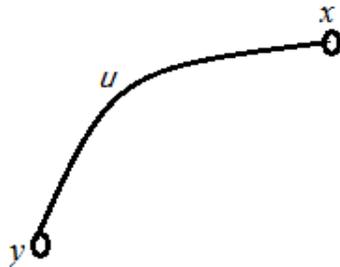


FIG. 1.1 – *Sommets adjacents*

- Deux arêtes sont adjacentes en x si elles ont x comme extrémité commune.

- Un arc est incident au sommet x si x est extrémité de u . $\left\{ \begin{array}{l} I(u) = x, \\ \text{ou} \\ T(u) = x \end{array} \right.$

- $M = (m_{ij})_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n}}$ la matrice d'adjacence associée à G /

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si, } u = (x_i, x_j) \in U \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

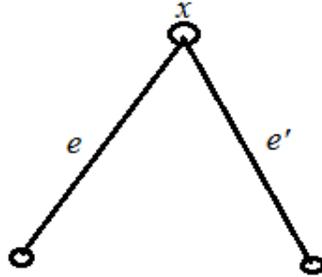


FIG. 1.2 – Arêtes incidentes

Matrice d'incidence

$$A = (a_{ij})_{i=\overline{1,n};j=\overline{1,m}} /$$

$$a_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{si, } x_i = I(u_j); \\ -1 & x_i = T(u_j); \\ 0 & \text{sinon, } . \end{cases}$$

A est la matrice d'incidence associée à G

Multiplicité d'une paire x,y :

Nombre d'arcs de G ayant x comme extrémité initiale et y comme extrémité terminale. On note ce nombre $m_G^+(x,y)$, et l'on pose $m_G^-(x,y) = m_G^+(y,x)$

$$m_G(x,y) = m_G^+(x,y) + m_G^-(x,y).$$

Si $m_G^+(x,y) = m_G^-(x,y)$, le graphe G est dit symétrique.

Arcs incidents à un sommet

Si un sommet x est l'extrémité initiale d'un arc u , on dit que l'arc u est incident à x vers l'extérieur. Dans un graphe G , le nombre d'arcs incidents à x vers l'extérieur se note $d_G^+(x)$, et s'appelle le demi-degré extérieur de x .

On définit de même un arc incident à x vers l'intérieur et le demi-degré intérieur $d_G^-(x)$.

Degré:

$d_G(x) = d_G^+(x) + d_G^-(x)$: Nombre d'arcs ayant une extrémité en x .

Graphe complet

Un graphe G orienté oest dit complet si

$$m_G(x,y) = m_G^+(x,y) + m_G^-(x,y) \geq 1,$$

pour tout $x,y \in X$, avec $x \neq y$.

Un graphe complet simple de n sommets se dénote par K_n et s'appelle une n - clique.

Graphe biparti

Un graphe est biparti si l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en deux classes X_1 et X_2 de sorte que deux sommets de la même classe ne soient jamais adjacents. Il se note $G = (X_1, X_2, U)$.

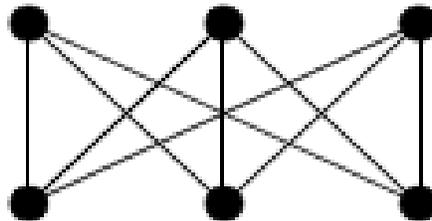


FIG. 1.3 – Un graphe biparti complet $K_{3,3}$

Chaîne de longueur $q > 0$:

Séquence $\mu = (u_1, u_2, \dots, u_q)$ d'arcs de G telle que chaque arc de la séquence ait une extrémité en commun avec l'arc suivant.

le nombre d'arcs de la séquence est la longueur de la chaîne μ . Une chaîne qui n'utilise pas deux fois le même arc est dite simple.

Chemin de longueur $q > 0$:

Chaîne $\mu = (u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_q)$, d'un type particulier, où pour tout arc u_i (avec $i < q$) l'extrémité terminale de u_i coïncide avec l'extrémité initiale de u_{i+1} .

Circuit

Un circuit est un chemin dont les extrémités se coincident.

Graphe connexe

C'est un graphe tel que pour toute paire x, y de deux sommets distincts, il existe une chaîne $\mu[x, y]$ reliant ces deux points.

Complémentaire de $G = (X, E)$

Le complémentaire de G est le graphe $\bar{G} = (X, \bar{E})$ où $\bar{E} = \{(x, y) \mid x, y \in X, \mid xy \notin E\}$.

Graphe induit

Le sous graphe induit de G par $X' \subseteq X$ et le graphe $G' = (X', E')$, où $E' = \{(x, y) \mid x \in X', y \in X' \text{ et } xy \in E\}$.

Chemin et circuit hamiltonien

Dans un graphe $G = (X, U)$, on dit qu'un chemin $\mu = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ est hamiltonien s'il passe une fois et une seule par chaque sommet du graphe; de même, on dit qu'un circuit $\mu = [x_1, x_2, \dots, x_1]$ est hamiltonien s'il passe une fois et une seule par chaque sommet du graphe.

Dans un graphe simple $G = (X, E)$, on définit de même une chaîne hamiltonienne ou un cycle hamiltonien.

Arbre

Un arbre est par définition un graphe connexe sans cycles; équivalent à un graphe connexe à n sommets et $n - 1$ arêtes.

Stable

Un ensemble indépendant ou stable est un sous-ensemble de sommets deux-à-deux non adjacents et la stabilité $\alpha(G)$ d'un graphe G dénote la taille d'un stable maximum dans G .

Q -coloration

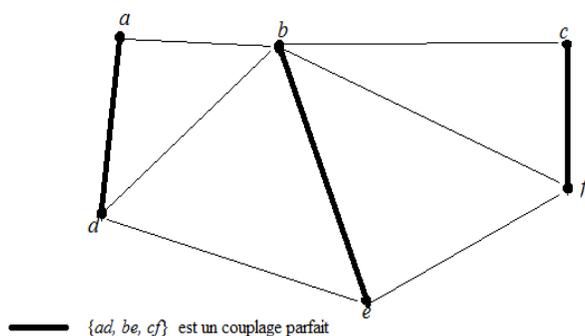
Une q -coloration du graphe G correspond à une partition de G en q stables. $\chi(G)$ (respect. $\kappa(G)$) dénote le cardinal d'une coloration minimum (resp. d'une partition minimum en cliques) de G . Le nombre $\kappa(G)$ est appelé nombre chromatique de G .

Il est facile de vérifier que $\omega(G) \leq \chi(G)$ et $\alpha(G) \leq \kappa(G)$, de même que $\omega(\bar{G}) = \alpha(G)$ et $\chi(\bar{G}) = \kappa(G)$. Par analogie, le cardinal d'une coloration minimum de G tel que chaque couleur apparaisse au plus k fois sera noté $\chi(G, k)$.

Couplage

Un couplage dans un graphe est un sous-ensemble d'arêtes tel que deux arêtes ne soient pas incidentes au même sommet. Un couplage maximum (resp. couplage parfait) est un couplage dont le cardinal est le plus grand possible (resp. est égal à $n/2$). Clairement, un couplage maximum correspond à une partition minimum en cliques de taille au plus deux ou encore à une partition en stables de taille au plus deux dans le complémentaire.

Enfin, une coloration des arêtes d'un graphe consiste en le marquage de chacune de ses arêtes par une couleur tel que deux arêtes incidentes à un même sommet aient des couleurs différentes.

FIG. 1.4 – *Un couplage parfait***Graphe de comparabilité:**

Un graphe est dit de comparabilité si ses arêtes peuvent être transitivement orientées. Une orientation transitive des arêtes satisfait la condition suivante : s'il existe un arc allant du sommet x vers le sommet y et un arc allant du sommet y vers le sommet z , alors il existe aussi un arc allant de x vers z . Autrement dit, un graphe de comparabilité est le graphe d'un ordre partiel.

Algorithme glouton

Un algorithme glouton est un algorithme qui suit le principe de faire, étape par étape, un choix optimum local, dans l'espoir d'obtenir un résultat optimum global.

Chapitre 2

Graphes d'intervalles

Un des exemples des graphes d'intersection est le graphe d'intervalles. Il y a beaucoup d'applications; parmi elles, établissement d'un programme, sériation en archéologie, comportement psychologique, planification, diagnostic médical et raisonnement temporel en intelligence artificielle, conception des circuits, et plus récemment, le projet humain de génome - voir ([25], [26], [49], [24], [37]), là où les graphes d'intervalles (avec des contraintes latérales possibles) se produisent. Une bonne source pour la théorie des graphes d'intervalles et les ordres d'intervalles est le livre de Fishburn [19].

2.1 Graphes triangulés et graphes d'intervalles

Il est difficile de savoir à quelle époque remonte la définition des graphes triangulés; ces graphes apparaissent déjà en 1958 dans les travaux de Hajos.

Définition 1.

Un graphe est dit triangulé si tout cycle ayant plus de trois sommets possède une corde.

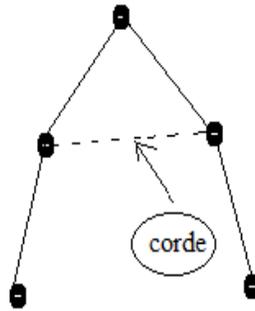


FIG. 2.1 – Corde

Dans la littérature anglo-saxonne, on trouve les dénominations de *triangulated graphs*, *chordal graphs* ou encore *rigid circuit graphs*. On voit facilement que cette classe de graphes est héréditaire: tout sous-graphe induit d'un graphe triangulé est également triangulé. Cette classe de graphes a été intensément étudiée dans la littérature et connaît un grand nombre de caractérisations équivalentes. La brève présentation qui suit est basée notamment sur le livre de Golumbic [25] et un article de Blair et Peyton [3].

Les graphes d'intervalles sont des outils inestimables quand ils modélisent des situations vécues. Ils trouvent des applications en archéologie, biologie, psychologie, sociologie, gestion, génétique, et beaucoup d'autres, voir ([25] et [54]), où beaucoup d'applications précitées sont résumées.

Un graphe $G = (X, U)$ est appelé graphe d'intervalles s'il existe une famille $\{I_i\}(1 \leq i \leq n)$ d'intervalles sur la droite réelle, tels que deux sommets distincts x, y sont adjacents si, et seulement si, les intervalles correspondants se chevauchent. Une telle famille $\{I_i\}(1 \leq i \leq n)$ d'intervalles est généralement connue sous le nom de représentation d'intervalles de G .

Les graphes d'intervalles ont été étudiés intensément du point de vue théorique et algorithmique (voir [40], [23], [7], [43]).

On considère une famille F d'ensembles non vides. On lui associe le graphe d'intersection G_F de F obtenu comme suit: chaque ensemble de F est représenté par exactement un sommet de G_F et deux sommets de G_F sont adjacents si et seulement si les ensembles correspondants de F s'intersectent. On dira que la famille F est un modèle d'intersection de G_F . Quand la famille F est formée d'ensemble particuliers, on obtient des classes de graphes intéressantes. Les graphes d'intervalles sont les graphes d'intersection des intervalles d'un ordre total (de la droite réelle, par exemple). Les graphes d'intervalles propres sont les graphes ayant un modèle d'intervalles tel qu'aucun de ces intervalles ne soit strictement contenu dans un autre.

Les graphes triangulés sont obtenus par intersections des cordes d'un cercle. Lorsque la famille F est formée d'arcs de cercle, on obtient les graphes d'intervalles circulaires.

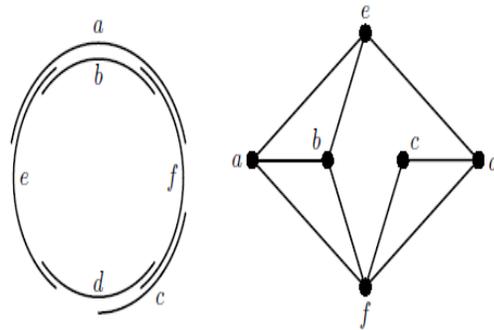


FIG. 2.2 – Graphe d'intervalles circulaires

Sommet simplicial

Un sommet est dit simplicial si ses voisins (c.à.d) les sommets auxquels il est relié par une arête sont tous reliés entre eux par une arête.

Schéma d'élimination parfait

Un schéma d'élimination parfait dans un graphe à n sommets est un ordre x_1, \dots, x_n des sommets tel que x_i est simplicial dans le graphe qui ne contient que les sommets x_1, \dots, x_n .

En d'autres termes, si x_1, \dots, x_n est un schéma d'élimination parfait, alors tous les voisins de x_1 sont reliés entre eux.

Aussi, si on supprime le sommet x_1 du graphe, alors tous les voisins de x_2 sont reliés entre eux et ainsi de suite, c.à.d que si on supprime les sommets x_1, \dots, x_{i-1} du graphe, alors tous les voisins de x_i sont reliés entre eux, et ainsi de suite.

Propriété 1. [21]

Un graphe est d'intervalles si, et seulement si, il possède un schéma d'élimination parfait.

Il est très facile de déterminer un schéma d'élimination parfait dans un graphe d'intervalles, il suffit de choisir un sommet simplicial et de le nommer x_1 , on supprime alors ce sommet du graphe et on cherche un sommet simplicial dans le graphe résiduel qu'on nomme x_2 , on poursuit ainsi jusqu'à ce que le graphe résiduel soit vide.

Propriété 2. [21]

Un graphe d'intervalles est le graphe complémentaire d'un graphe de comparabilité.

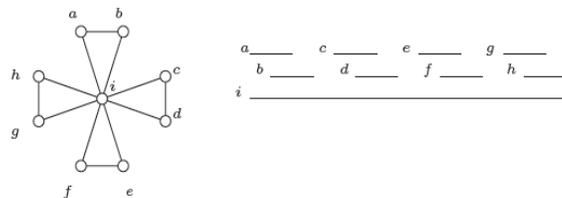
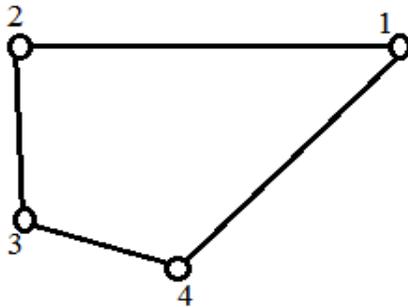


FIG. 2.3 – Graphe d'intervalles

Théorème 1. [21]

Un graphe est d'intervalles si et seulement si \bar{G} est de comparabilité et G ne contient aucun C_4 comme sous-graphe induit. (Un C_4 est un cycle de longueur 4 sans corde).

FIG. 2.4 – Cycle de longueur 4 (C_4)

Les sous-classes suivantes des graphes d'intervalles sont également intéressantes.

2.2 Graphes d'intervalles propres et graphes d'intervalles unitaires

Les graphes d'intervalles propres (et les graphes d'intervalles unitaires) ont été introduits par Roberts [53], [52] pour modéliser l'indifférence en théorie du choix social et en psychologie.

Un graphe est un graphe d'intervalles propres s'il admet une représentation par intervalles dans laquelle aucun intervalle ne contient proprement un autre (voir la figure 2.5) ; une telle représentation est appelée représentation par intervalles propres. De la même manière, un graphe est un graphe d'intervalles unitaires s'il admet une représentation dans laquelle

tous les intervalles sont de même taille, une telle représentation est appelée représentation par intervalles unitaires.

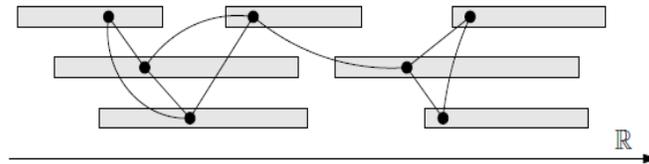


FIG. 2.5 – Un graphe d'intervalles propres et sa représentation.

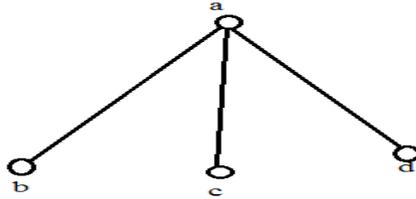
En 1969, Roberts [52] (voir aussi [25], p. 187-188) démontrait que la classe des graphes d'intervalles propres et la classe des graphes d'intervalles unitaires coïncident.

Théorème 2. (Roberts [52])

G est un graphe d'intervalles propres si et seulement si G est un graphe d'intervalles unitaires.

Il établissait notamment que les graphes d'intervalles sans $K_{1,3}$ sont des graphes d'intervalles unitaires en utilisant la caractérisation de Scott et Suppes des semi-ordres [57]; les semi-ordres (de l'anglais *semiorders*) sont des ordres partiels utilisés en théorie du choix social pour modéliser la préférence [4] (voir aussi ([53], p. 534-540) et ([25], p. 185-186)). Les implications triviales " \Rightarrow unitaires \Rightarrow propres \Rightarrow sans $K_{1,3}$ " pour les graphes d'intervalles lui permettaient alors d'obtenir le résultat. Récemment, Bogart et West [5] ont proposé une preuve constructive du résultat, dans laquelle les intervalles propres sont graduellement convertis en intervalles unitaires par des séquences de dilatations, contractions et translations.

Pour un sommet x du graphe G , $d(x)$ représente le nombre de sommets adjacents à x . Un graphe avec les sommets a, b, c, d et arêtes ab, ac, ad , est appelé une griffe qui est aussi un $K_{1,3}$.

FIG. 2.6 – Griffes ou $K_{1,3}$ **Définition 2.**

G est un graphe d'intervalles propres si G est un graphe d'intervalles où deux intervalles $I_x, I_y \in I$ ne contiennent pas complètement les autres.

Définition 3.

G est un graphe d'intervalles unitaire si G est un graphe d'intervalles où les intervalles sont de longueur 1.

D'autres caractérisations des graphes d'intervalles propres sont données dans (les théorèmes 7.1.10 et 7.2.9 de [10]).

Remarque 1.

Étant donné un graphe d'intervalles, une représentation par intervalles ouverts (ou par intervalles fermés) ordonnée selon $<_g$ ou $<_d$ peut donc être calculée en temps et espace linéaire.

Les graphes d'intervalles étant triangulés, les problèmes de la clique maximum, de la coloration minimum, du stable maximum et de la partition minimum en cliques peuvent être résolus en temps et espace linéaires. Toutefois, Gupta et al. [28], [29] proposent des algorithmes en temps $O(n \log n)$ pour résoudre ces problèmes, étant donnée en entrée une représentation par intervalles.

On peut résumer les différents développements de la reconnaissance des graphes d'intervalles dans le tableau suivant:

Auteurs, Références	Complexité	Commentaires
Lekkerkerker, Boland [40]	$O(n^4)$	sommets simpliciaux et triplets astéroïdes
Fulkerson, Gross [20]	$O(n^4)$	1-consécutifs pour matrice des cliques max
Booth, Lueker [6] [7]	$O(n + m)$	utilisation de PQ-trees
Korte, Mohring [38], [39]	$O(n + m)$	utilisation de MPQ-trees et LexBFS
Ramalingam, Pandu Rangan [50]	$O(n^2)$	algo séquentiel et parallèle
Hsu, Ma [33], [35]	$O(n + m)$	utilisation de décomposition modulaire et LexBFS
Simon [58]	$O(n + m)$	4 LexBFS successifs, contreexemple trouvé par Ma
Hsu [34]	$O(n + m)$	variante de [33] pour la déc. modulaire
Corneil, Olariu, Stewart [15]	$O(n + m)$	4 LexBFS successifs
Habib, Paul, McConnell, Viennot [31]	$O(n + m)$	LexBFS et affinage de partition sur les cliques max.

Historique de la reconnaissance des graphes d'intervalles

Pour plus de détails sur les graphes d'intervalles et leurs applications, nous renvoyons le lecteur à ([53], p. 113-140), [54], ([25], p. 171-202) et [19]. Pour d'autres caractérisations concernant les graphes d'intervalles propres ou unitaires, le lecteur est renvoyé aux travaux de Wegner [60] et Roberts [51] sur le sujet (voir aussi [25], p. 195).

Chapitre 3

Algorithmes gloutons optimaux des graphes d'indifférence

Introduction

En essayant de comprendre et prédire des phénomènes sociaux, on est confronté au problème de quantification des entités qui ne sont pas faciles à mesurer comme variables physiques célèbres, telles que distance ou densité qui se produisent dans la vie ordinaire. Il a été reconnu que le processus d'analyse des décisions fait par plusieurs individus, groupes, ou par la société entière, exige la capacité de raisonner au sujet de telles choses comme préférence, accord, et indifférence. Dans le processus de prise de décision, par exemple, les administrateurs doivent prendre en considération, les comptes-rendus et points de vue exprimés par des groupes sociaux différents ou organisations. De même, dans le marketing on est intéressé par la compréhension des configurations du comportement des consommateurs potentiels, comme exprimé par des attitudes d'indifférence envers les produits comparables sur le marché.

Dans ce chapitre, nous proposons d'enquêter sur la classe des graphes d'indifférence qui modèlisent la notion d'indifférence qui survient en sciences humaines et gestion.

Spécifiquement, un graphe $G = (X, E)$ est un graphe d'indifférence [55]

s'il existe un nombre positif δ (mesurant le "rapprochement" ou l'"indifférence") et une suite de nombres $f(x)$ des éléments de X tels que pour tout $x, y \in X$, xy est une arête de G et que $|f(x) - f(y)| \leq \delta$. (Pour être conformes à [54], nous ignorons les boucles dans les graphes d'indifférence, qui sont des arêtes de la forme xx avec $x \in X$.) Comme il est dit dans [54], les graphes d'indifférence sont une sous-classe de classes bien connues que nous discutons ensuite.

Le but de ce travail est l'étude des propriétés algorithmiques des graphes d'indifférence. Nous présentons en premier une nouvelle caractérisation de graphes d'indifférences quant à un ordre linéaire sur leurs ensembles de sommets et montrons que ce nouvel ordre linéaire nous offre des algorithmes gloutons optimaux pour résoudre des problèmes tels que la coloration, trouver un chemin le plus court entre deux sommets, un couplage maximal, et un chemin hamiltonien.

Les graphes d'intervalles sont utilisés pour modéliser les problèmes d'allocation de ressources en Recherche Opérationnelle. Chaque intervalle représente l'allocation d'une ressource pendant un certain temps, la recherche du stable maximum du graphe correspond à la meilleure allocation de ressources pouvant être réalisée sans conflit.

La recherche d'un ensemble d'intervalles qui représente un graphe d'intervalles peut aussi être une manière d'assembler des séquences contiguës d'ADN.

Soit $G = (X, E)$ un graphe intervalles et soit $\{I_x = [a_x, b_x]\}$ un intervalle représentatif de G , ici, a_x et b_x ($a_x \leq b_x$) sont les extrémités gauche et droite, respectivement, de l'intervalle I_x . G est appelé un graphe d'intervalles unitaires si les intervalles représentatifs ont une longueur d'unité. La famille $\{I_x\}_{x \in X}$ est une représentation d'intervalles propres si aucun intervalle n'est contenu dans l'autre. Clairement, les graphes d'intervalles unitaires sont des graphes d'intervalles propres. Roberts [54] a prouvé les résultats fondamentaux suivants: Les graphes d'intervalles unitaires,

graphes d'intervalles propres, et graphes d'indifférence sont synonymes.

Proposition 1. (Roberts [54])

Pour un graphe G les assertions suivantes sont équivalentes:

1. G est un graphe d'intervalles unitaires;
2. G est un graphe d'intervalles propres;
3. G est un graphe d'intervalles sans griffe induite;
4. G est un graphe d'indifférence.

Proposition 2. (Olariu [47])

Le graphe $G = (X, E)$ est un graphe d'intervalles si est, seulement si, il existe un ordre linéaire \prec dans X tel que pour chaque choix de sommets x, y, z avec $x \prec y \prec z, xz \in E$ implique $xy, yz \in E$.

Pour un graphe d'intervalles G , l'ordre

$$x_1 \prec x_2 \cdots \prec x_n. \quad (3.1)$$

de ses sommets avec la propriété spécifiée dans la proposition 2 sera considéré comme canonique.

Théorème 3.

Un graphe $G = (X, E)$ est un graphe d'indifférence si, est seulement si, il existe un ordre linéaire \prec dans X tel que pour n'importe quel choix de sommets x, y, z ,

$$x \prec y \prec z, \text{ et } xz \in E \text{ implique } xy, yz \in E. \quad (3.2)$$

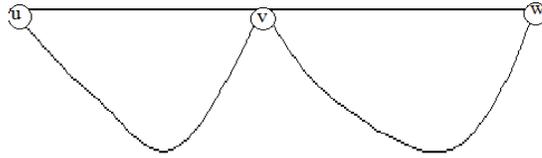


FIG. 3.1 – Graphe d'indifférence

Preuve.

Premièrement, soit \leq un ordre linéaire dans X avec les propriétés spécifiées en (3.2), en particulier, \leq satisfait la condition spécifiée en proposition 2, et ainsi G est un graphe d'intervalles.

D'après la proposition 1, pour prouver que G est un graphe d'indifférence on a besoin de montrer que G ne contient pas de griffe induite. Pour cela, on suppose que G contient une griffe induite avec les sommets a, b, c, d , et arêtes ab, ac, ad . On montre que cette supposition conduit à une contradiction.

Pour commencer, notons qu'un sommet a ne doit pas précéder b, c, d par rapport à \leq ; autrement dit, (3.2) impliquerait que b, c, d sont deux à deux adjacents: contradiction.

De la même façon, un sommet a ne peut pas suivre b, c, d dans l'ordre linéaire; autrement dit, soit z le sommet parmi b, c, d qui vient en premier dans l'ordre \leq . De $za \in E$, il s'ensuit que z est adjacent aux deux restants, contradiction avec le fait que $\{a, b, c, d\}$ induit une griffe.

La symétrie de la griffe nous permet de supposer sans perte de généralité que b précède a, c, d et que d suit a, b, c dans \leq . Mais maintenant, l'ordre $b \leq c \leq a$ implique $bc \in E$; de la même façon, l'ordre $a \leq c \leq d$ implique $cd \in E$. Chacun conduit à une contradiction.

Inversement, soit G un graphe d'indifférence, en particulier, G est un graphe d'intervalles. Pour chaque sommet x de G , on pose $I_x = [a_x, b_x]$ représentant l'intervalle correspondant. On définit l'ordre linéaire \leq dans X en mettant

$$x \prec y \text{ chaque fois que } (a_x < a_y) \text{ ou } [(a_x = a_y) \text{ et } (b_x \leq b_y)]. \quad (3.3)$$

Soit x, y, z des sommets quelconques dans G satisfaisant $x \prec y \prec z$ et on suppose que $xz \in E$, l'ordre sur x, y, z avec I_x et I_z chevauchent, la supposition $x \prec y \prec z$ avec (3.3), implique

$$a_x \leq a_y \leq a_z.$$

Dans le cas $a_x = a_z$, la contradiction est immédiate. Par conséquent, on devra supposer que:

$$a_x < a_z.$$

Du fait que I_x et I_z chevauchent, alors

$$a_z \leq b_x$$

Mais maintenant, $a_y \leq a_z$ garantit $a_y \leq b_x$, et donc $xy \in E$.

Ensuite, puisque I_x ne peut pas contenir I_y , $a_x \leq a_y$ garantit que $b_x \leq b_y$. Il s'ensuit que $a_z \leq b_y$ implique $yz \in E$. Ceci termine la preuve du théorème 3.

Le théorème 3 implique les résultats suivants:

Corollaire 1. Soit $G = (X, E)$ un graphe d'indifférence et soit \prec un ordre linéaire sur l'ensemble des sommets de G satisfaisant (3.2). Pour chaque choix des indices i, j avec $(1 \leq i < j \leq n)$ et $x_i x_j \in E$, les sommets x_i, x_{i+1}, \dots, x_j sont deux à deux adjacents.

Preuve.

Pour voir ceci, soit x_p et x_q des sommets quelconques avec $i \leq p < q \leq j$. Le fait que x_i et x_j sont adjacents, et satisfont (3.2), implique que x_p et x_j sont adjacents, et ainsi, de (3.2), x_p et x_q doivent être adjacents.

Corollaire 2.

Un graphe d'intervalles G est un graphe d'indifférence si et seulement si un ordre canonique \leq de ses sommets satisfait (3.2).

Preuve.

L'ordre canonique \leq de G satisfaisant (3.2) et le théorème 3 font que G est un graphe d'indifférence. Réciproquement, si G est un graphe d'indifférence et le théorème 3 vérifié, l'ordre \leq de ses sommets satisfait (3.2).

Soit G un graphe d'indifférence; Comme le cas de graphes d'intervalles, un ordre \leq des sommets de G satisfait (3.2), et satisfait (3.1).

Pour obtenir une caractérisation des graphes d'indifférence menant à un algorithme rapide de reconnaissance, considérons un graphe G d'intervalles avec un ordre canonique \leq , pour chaque i ($1 \leq i \leq n$) définissant $First[i] = \min\{i, k\}$ tels que $x_i x_k \in E$; et $Last[i] = \max\{i, k\}$ tels que $x_i x_k \in E$.

Théorème 4.

Soit G un graphe d'intervalles avec un ordre canonique \leq . G est un graphe d'indifférence si, pour chaque x_i ($1 \leq i \leq n$), $d(x_i) = Last[i] - First[i]$.

Preuve.

Soit G un graphe d'indifférence. Nous procédons par induction sur le nombre de sommets dans G . Si G est non connexe, on considère chaque composante connexe, séparément.

Nous pouvons, donc, supposer que G est connexe, par le corollaire 2, nous pouvons supposer sans perte de généralités que \preccurlyeq satisfait (3.2); il s'ensuit, en particulier, que chaque sommet x_i avec $(2 \leq i \leq n - 1)$ est adjacent à tous les sommets $x_{First[i]}, x_{First[i]+1}, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{Last[i]}$, et ainsi $d(x_i) = Last[i] - First[i]$.

De plus, si $i = 1$ alors $First[x_i] = 1$ et x_i est adjacent à $x_{i+1}, \dots, x_{Last[i]}$, confirmant $d(x_i) = Last[i] - First[i]$.

En conclusion, si $i = n$, alors $Last[x_i] = n$ et x_i est adjacent à $x_{First[i]}, x_{First[i]+1}, \dots, x_{i-1}$, et ainsi $d(x_i) = Last[i] - First[i]$.

Réciproquement, supposons que G contient une griffe induite avec les sommets a, b, c, d et arêtes ab, ac, ad . La symétrie suivante nous permet de supposer que $b \preccurlyeq c \preccurlyeq d$. Mais dans le cas où $c \preccurlyeq a$, $d(b) < Last[b] - First[b]$, puisque b n'est pas adjacent à c et $c \preccurlyeq Last[b]$; dans ce cas $a \preccurlyeq c$, $d(b) < Last[b] - First[b]$, puisque d n'est pas adjacent à c et $First[d] \preccurlyeq c$. Ceci prouve le théorème 4.

Le résultat suivant identifie une propriété des chemins à corde joignant des sommets d'un graphe d'indifférence G .

Théorème 5.

Soit G un graphe d'indifférence avec un ordre canonique \preccurlyeq et soient $x, y (x \preccurlyeq y)$ des sommets distincts de G . Si $x = u_1, x_2, \dots, x_p = y$ est un chemin à corde arbitraire joignant x et y , alors pour tous $i (1 \leq i \leq p - 1)$, $x_i \preccurlyeq x_{i+1}$.

Preuve.

D'abord, notons que

$$x_j \preccurlyeq y \text{ pour tout } j = 1, 2, \dots, p - 1. \quad (3.4)$$

Soit t le premier indice inférieur pour lequel $y \prec x_t$. D'après (3.2), x_{t-1} et y sont adjacents, contredisant que le chemin est à corde.

Ensuite, si la supposition est fautive, alors nous trouvons un indice inférieur j ($j < p$) tels que

$$x_{j+1} \prec x_{p-1}.$$

(3.4) implique que $x_{j+1} \prec x_j \prec y$. Observons que

$$x_j \prec x_{p-1},$$

Autrement dit, la condition (3.2) fait que x_j et x_p sont adjacents: contradiction.

Soit k le premier indice plus grand que $j + 1$ pour lequel

$$x_j \prec x_k .$$

Comme $x_{j+1} \prec x_j$, alors $k \geq j + 2$. Par notre choix de k , $x_{k-1} \prec x_j \prec x_k$. (3.2) implique que x_j et x_k sont adjacents: une contradiction. Ceci termine la preuve du théorème 6.

Corollaire 3.

Soit G un graphe d'indifférence connexe avec un ordre canonique \prec . Pour tous les indices inférieurs i ($2 \leq i \leq n - 1$), $First[i] < i < Last[i]$.

Preuve.

Soit i un indice arbitraire avec ($2 \leq i \leq n - 1$). Puisque G est connexe, il existe un chemin dans G joignant x_1 et x_i . Soit

$$x_1 = x_1, x_2, \dots, x_t = x_i$$

un tel chemin. En prenant t aussi petit que possible, nous nous assurons qu'il est triangulé. D'après le théorème 5, $x_{t-1} \prec x_t = x_i$ et ainsi $First[i] < i$.

3.1 Algorithmes gloutons des graphes d'indifférence

Soit $G = (X, E)$; $|X| = n$ et $|E| = m$ un graphe quelconque. L'algorithme glouton suivant détermine si G est un graphe d'indifférence ou non.

3.1.1 Algorithme de reconnaissance

Etape 1 Reconnaître G comme graphe d'intervalles (Booth et Lueker [7]), cet algorithme s'exécute en $O(n + m)$ si G est un graphe d'intervalles, cela donne un ordre des cliques maximales C_1, C_2, \dots, C_m .

Etape 2 En utilisant l'adjacence de G , l'ordre C_1, C_2, \dots, C_m construit une représentation d'intervalles de clique maximum pour G . A ce stade, nous employons deux tableaux $B[1..m]$ et $H[1..n]$, initialisés à 0: Pour chaque sommet x de G , $H(x)$ contient le plus grand i pour lequel $x \in C_i$, B est employé comme ensemble de blocs. $B[j]$ contient (dans la liste associée) tous les sommets de G pour lesquels $j = \min\{k \mid x \in C_k\}$.

Les détails de cette étape sont définis par la procédure suivante:

Procédure Calcul-Ordre

Entrée: un graphe d'intervalles $G = (X, E)$ et un ordre C_1, C_2, \dots, C_m de ses cliques maximales;
 Sortie: un ordre des sommets de G comme en proposition 2.

1. **debut**
 2. **pour** $j \leftarrow 1$ à m **faire debut**
 3. **pour** tout x dans C_j **faire debut**
 4. **Si** $H(x) = 0$ **alors**
 5. ajouter x au bloc $B[j]$; {penser à $B[j]$ comme liste d'enchaînement}
 6. $H(x) \leftarrow j$;
 7. **fin**; {pour}
 8. trier chaque bloc $B[j]$ dans l'ordre croissant de $H(x)$;
 9. retourner (B)
 10. **fin**{Calcul-Ordre}
-

Il est facile de constater (voir [47], par exemple) que l'ordre des sommets de G trouvés dans la ligne 9 du *Calcul – Ordre* est un ordre canonique \prec pour le graphe d'intervalles G . De plus, le temps d'exécution global de l'étape 2 est en $O(m + n)$.

Etape 3 Balayage de la liste d'adjacence de chaque sommet x_i de G , une fois, calcul de $First[i]$ et $Last[i]$ pour chaque $i(1 \leq i \leq n)$.

Etape 4 En conclusion, pour chaque $i(1 \leq i \leq n)$ vérifier si $d(x_i) = Last[i] - First[i]$. D'après le théorème 4, G est un graphe d'indifférence si, et seulement si, cette égalité a lieu pour $i(1 \leq i \leq n)$. Les détails sont exprimés comme suit:

Procédure Test-Indifférence

Entrée: un graphe G avec un ordre \prec des sommets comme en (3.4);
 Sortie: G est un graphe d'indifférence ou G n'est pas un graphe d'indifférence.

1. **debut**
 2. **pour** $i \leftarrow$ à n **faire**
 3. calculer $Last[i]$ et $First[i]$;
 4. **pour** $i \leftarrow$ à n **faire**
 5. **si** $Last[i] - First[i] \neq d(x_i)$ **alors**
 6. poser ("non");
 7. poser("oui")
 8. **fin**;{Test-Indifférence}
-

Le résultat suivant récapitule nos résultats dans cette section.

Théorème 6.

Pour un graphe G avec n sommets et m arêtes en entrée, la procédure Test – indifférence teste si G est un graphe d'indifférence en $O(n + m)$.

Preuve.

Le résultat vient du théorème 4. L'ordre \prec dans l'étape 2, et la mise à jour de l'adjacence en $O(n + m)$, le temps de placer chaque sommet dans l'ordre. Le calcul de $Last[i]$ et $First[i]$ est facile: pour chaque i , le balayage de la liste d'adjacence de x_i une fois retenu le plus grand et le plus petit indice inférieur se fait en $O(d(x_i))$. Par conséquent, la complexité globale est en $O(n + m)$.

Il est important de noter que si G est un graphe d'indifférence, l'ordre (3.1) satisfait la condition (3.2).

3.2 Algorithmes gloutons pour Divers problèmes informatiques

Soit $G = (X, E)$ un graphe d'indifférence avec l'ordre $x_1 \prec x_2 \prec \dots \prec x_n$ satisfaisant (3.2). On montre comment cet ordre linéaire peut être exploité afin de concevoir simplement des algorithmes optimaux et gloutons pour résoudre un certain nombre de problèmes informatiques.

D'abord, nous présentons un algorithme de coloration pour des graphes d'indifférence. La seule structure de données utilisée est une pile. Initialement, cette pile contient les couleurs $1, 2, \dots, n$ à l'ordre inverse, où 1 est le sommet de la pile. L'idée de l'algorithme est claire: affecter la couleur 1 au sommet x_1 (d'une manière équivalente, x_1 est coloré en parcourant la pile).

Une fois x_{i-1} ($i \geq 2$) coloré, on passe à la couleur x_i comme suit. On considère l'ensemble de couleurs affectées aux sommets

$$x_{First[i-1]}, x_{First[i-1]+1}, \dots, x_{First[i]-1}.$$

Notons que par le corollaire 1, toutes ces couleurs doivent être distinctes. En outre, aucun de ces sommets n'est adjacent à x_i , et ainsi nous pouvons réutiliser n'importe laquelle de ces couleurs sur x_i . Comme cela, nous libérons d'abord ces couleurs en les poussant sur la pile et procédons ensuite à la couleur x_i en parcourant simplement la pile (c.à. d. affectant à x_i la couleur au sommet de la pile).

Les détails sont définis par la procédure suivante.

Procédure Coloration

Entrée: Un graphe d'indifférence G , avec un ordre canonique \prec ;
 Sortie: une coloration optimale de G ;

1. **debut**
 2. couleur (x_1) \leftarrow dépiler(pile);
 3. **pour** \leftarrow à n **faire début**
 4. **pour** $j \leftarrow First[i - 1]$ à $First[i] - 1$ **faire**
 5. pousse (couleur(x_j));
 6. couleur (x_i) \leftarrow depiler(pile)
 7. **fin**{pour}
 8. **fin**; {coloration}
-

Théorème 7.

La procédure coloration optimale s'exécute en $O(n)$.

Preuve.

Pour cela, montrons que la procédure coloration donne une coloration appropriée de G et que cette coloration utilise un minimum de couleurs possibles.

Aucun sommet x_j ($i \leq j$) n'est adjacent à l'un des sommets (3.5)

x_k tels que $First[i - 1] \leq k \leq First[i] - 1$.

Pour voir que c'est le cas, notons que si un certain sommet x_j avec $i \leq j$ est adjacent à un sommet x_k avec $First[i - 1] \leq k \leq First[i] - 1$, alors d'après (3.2) il doit être que x_i et x_k sont adjacents: contradiction avec $k < First[i]$.

(3.5) implique que quand une couleur a lieu dans la ligne 6, le sommet x_i et les sommets qui ont reçu la même couleur avant x_i ne sont pas adjacents. Ainsi, la procédure coloration produit une coloration appropriée.

Pour argumenter au sujet de l'optimalité de cette coloration, nous avons besoin seulement de montrer que si la procédure coloration emploie au total k couleurs, alors G contient k sommets deux à deux adjacents (c. à. d. pas moins de k couleurs peuvent être probablement utilisées correctement pour

colorer G). Considérons le premier sommet; soit x_i , qui a reçu la couleur k . Les $k - 1$ premières couleurs sont déjà utilisées.

(3.5) implique que ces couleurs doivent avoir été employées sur le sommet x_k avec le $First[i] \leq k \leq i - 1$, mais, le corollaire 1 garantit que G contient un ensemble de k sommets deux à deux adjacents, nommés $x_{First[i]}$, $x_{First[i]+1}$, ..., x_i . Ceci prouve que la coloration produite est optimale. Pour adresser la complexité, on note par (3.5), les boucles dans les lignes 4-5 prend au plus $O(n)$. Par conséquent, la procédure s'exécute en $O(n)$.

On propose un algorithme glouton simple qui calcule un chemin le plus court entre deux sommets donnés (sinon arbitraires) d'un graphe d'indifférence connexe.

Procédure Plus-Court-Chemin

Entrée: Un graphe d'indifférence connexe G avec un ordre canonique \leq et deux sommets $x \leq y$;
Sortie: Un plus court chemin $x = x_1, x_2, \dots, x_t = y$ joignant x et y

1. **debut**
 2. $t \leftarrow 1$;
 3. $x_t \leftarrow x$;
 4. **tant que** x_t et y ne sont pas adjacents **faire debut**
 5. $t \leftarrow t + 1$;
 6. $x_t \leftarrow x_{Last}[x_{t-1}]$;
 7. **fin; {tant que}**
 8. $t \leftarrow t + 1$;
 9. $x_t \leftarrow y$;
 10. retourner (x_1, x_2, \dots, x_t)
 11. **end; {Plus - Court - Chemin}**
-

Théorème 8.

La procédure *Plus - Court - Chemin* (x, y) s'exécute en $O(m)$.

Preuve.

La complexité étant évidente, montrons l'exactitude de cette procédure. Soit $x = x_1, x_2, \dots, x_t = y$ le chemin produit par *Plus – Court – Chemin*(x, y); Supposons qu'il existe un chemin $x = z_1, z_2, \dots, z_q = y$ joignant x et y tels que $q < t$.

Ceci implique que pour un choix convenable des sous-indices i, j ($2 \leq i \leq t-1$; $2 \leq i \leq q-1$)

$$z_i \triangleleft x_j \triangleleft x_{j+1} \triangleleft z_{i+1}.$$

Notez que (3.2), dans le théorème 3 garantit que x_j et z_{i+1} sont adjacents; ce qui contredit le choix de x_{j+1} dans la ligne 6 de la procédure.

Il est intéressant d'observer que la procédure glouton ci-dessus ne fonctionne pas pour les graphes d'intervalles qui ne sont pas des graphes d'indifférence. Considérez le graphe H décrit dans la figure 3.2. L'ordre \triangleleft des

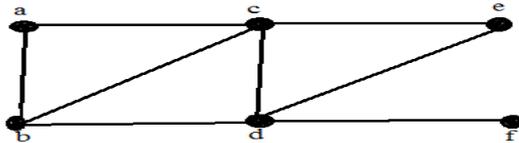


FIG. 3.2 – Un graphe d'intervalles avec un ordre canonique

sommets de H indiqués dans la proposition 3 est $a \triangleleft b \triangleleft c \triangleleft d \triangleleft e \triangleleft f$. Avec les sommets a et f comme les paramètres d'entrée, *Plus – Court – Chemin* donnera a, c, e, d, f qui n'est pas le plus court chemin entre a et f .

La notion de *centre* dans un graphe est motivée par une grande classe des problèmes collectivement désignés sous le nom de problèmes de *service – endroit*. Ici, on est intéressé par identifier un sous-ensemble de sommets du graphe auquel certains équipements (tels que des commissariats de police, des centres commerciaux, des hôpitaux, des écoles, etc..) doivent être situés de telle manière que pour chaque sommet dans le graphe, la distance au

service le plus proche soit réduite au minimum.

Plus formellement, étant donné un graphe connexe $G = (X, E)$, la distance $d(x, y)$ entre les sommets x et y est le plus petit nombre d'arêtes dans un chemin joignant x et y . Le *diamètre* et le *rayon* de G sont définis comme

$$\text{diam}(G) = \max_{x, y \in X} d(x, y)$$

$$r(G) = \min_{x \in X} \max_{y \in X} d(x, y).$$

En conclusion, le centre de G est défini par:

$$C(G) = \{x \in X \mid \max_{y \in X} d(x, y) = r(G)\}.$$

Il est bien connu et facile de voir que le centre d'un graphe quelconque $G = (X, E)$ avec n sommets et m arêtes peut être calculé en $O(n.m)$, en faisant une recherche en largeur de G , alternativement, à chaque sommet de G .

Les théorèmes 5 et 8 implique que cela dans un graphe d'indifférence connexe, le diamètre est réalisé par les sommets x_1 et x_n , comme le montre le résultat suivant:

Corollaire 4.

Dans un graphe G d'indifférence connexe avec un ordre canonique \leq , on a $\text{diam}(G) = d(x_1, x_n)$.

Preuve.

Pour tous les sommets x, y avec $x \leq y$, $d(x, y) \leq d(x_1, x_n)$.

Soient $x_1 = w_1, w_2, \dots, w_r = x_n$ le plus court chemin entre x_1 et x_n . Choisissons le plus grand i tel que $x \not\leq w_i$; pareillement, trouvons le plus petit j tel que $w_j \not\leq y$.

$$x, w_{i+1}, w_{i+2}, \dots, w_{j-1}, y$$

est un chemin dans G joignant x et y . Puisque ce chemin contient exactement $j - i$ arêtes, il s'ensuit cela

$$d(x,y) \leq j - 1 \leq r - 1 = d(x_1,x_n).$$

Ceci prouve le corollaire 4.

Soit G un graphe d'indifférence et soit

$$x_1 = w_0, w_1, \dots, w_r = x_n \tag{3.6}$$

le chemin donné par la procédure *Plus – court – Chemin*, avec les paramètres x_1 et x_n . Afin de calculer le centre de G , nous utilisons un tableau $D[1..n]$ qui enregistre, pour tout i ($1 \leq i \leq n$) la plus courte distance de x_1 à x_i .

Utilisons, pour cela, la procédure suivante:

Procédure Recherche-Distance

Entrée: un graphe d'indifférence $G = (X,E)$ avec $|X| = n$ et un chemin comme dans (3.6);
Sortie: un tableau $D[1..n]$ tel que chaque i , $D[i] = d(x_1,x_i)$

1. **debut**
 2. **pour** $i \leftarrow 2$ à n **faire**
 3. **si** $x_i = w_j$ ($0 \leq j \leq r$) **alors**
 4. $D[i] \leftarrow j$
 5. **sinon debut**
 6. trouver le plus grand indice j pour lequel $w_j \prec x_i$;
 7. $D[i] \leftarrow j + 1$
 8. **fin;**
 9. calculer (D)
 10. **fin** {Recherche – Distance}
-

Théorème 9.

Quand la procédure Recherche – Distance se termine, pour chaque $i (1 \leq i \leq n)$, $D[i] = d(x_1, x_i)$. En outre, le temps d'exécution est en $O(n)$.

Preuve.

Les sommets de G sont balayés de gauche à droite. Soit j le plus grand indice pour lequel w_j est le dernier sommet sur le chemin (P) produit jusqu'ici. Il s'ensuit que la complexité globale est en $O(n)$.

Une fois le tableau D disponible, on a besoin seulement de répéter la procédure ci-dessus à partir de x_n : On appelle la procédure Plus – Court – Chemin avec les paramètres x_n et x_1 et on calcule le plus court chemin

$$x_n = z_0, z_1, \dots, z_r = x_1$$

Ensuite, en utilisant un tableau $D'[1..n]$ enregistré, en appelant la procédure Recherche – Distance, on calcule la distance de chaque sommet à x_n . En conclusion, le centre C de G contient exactement ces sommets x_i pour lesquels $D[i] - D'[i] \leq 1$.

Par conséquent, nous avons le résultat suivant:

Théorème 10.

Le centre d'un graphe d'indifférence, ayant l'ordre canonique \preccurlyeq sur ses sommets peut être calculé en $O(n)$.

Un chemin hamiltonien dans un graphe G est le chemin qui contient chaque sommet du graphe une et une seule fois. La structure des graphes d'indifférence permet, à l'aide d'un algorithme glouton extrêmement simple de calculer un chemin hamiltonien. Pour cela, nous supposons qu'un graphe d'indifférence connexe G est donné avec un ordre canonique \preccurlyeq de ses sommets.

Les détails sont définis par notre prochaine procédure.

Procédure Chemin-Hamiltonien

Entrée: Un graphe G d'indifférence connexe avec un ordre \prec ;
Sortie: un chemin hamiltonien P de G .

1. **Debut**
 2. $P \leftarrow \emptyset$
 3. **pour** $i \leftarrow 1$ à $n - 1$ **faire**;
 4. ajouter l'arête $x_i x_{i+1}$ à P ;
 5. calculer (P)
 6. **fin**; {Chemin-Hamiltonien}
-

Théorème 11.

La procédure *Chemin – Hamiltonien*(G) s'exécute en $O(n)$.

Preuve.

D'après le corollaire 3, x_i et x_{i+1} sont adjacents, pour tout $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Par conséquent, l'ensemble P des arêtes données par la procédure est un chemin dans G . Pour voir que P est un chemin hamiltonien, notons que P contient chaque sommet une fois.

La complexité est en $O(n)$.

Il est intéressant de noter que la procédure ci-dessus ne donne pas un chemin hamiltonien dans un graphe d'intervalles qui n'est pas un graphe d'indifférence. Mais différemment, avec un ordre \prec satisfaisant (3.1) (mais non (3.2)).

La procédure *Chemin – Hamiltonien* n'est pas sûre de fonctionner. Pour voir ceci, considérons encore le graphe sur la figure 3.2 avec l'ordre $a \prec b \prec c \prec d \prec e \prec f$. La procédure donne, ab, bc, cd, de, ef ce qui est, évidemment, incorrect puisque e et f ne sont pas adjacents. (le chemin hamiltonien correct sur ce graphe est ba, ac, ce, ed, df .)

Un couplage dans un graphe est un ensemble d'arêtes deux à deux non

adjacentes. Un couplage est maximum s'il n'est pas contenu dans un autre. Le problème de couplage est de trouver un couplage maximum d'un graphe G donné.

La littérature sur le couplage est étendue. Les problèmes de couplage sont liés aux problèmes de flot, problèmes de recouvrement, etc... (le lecteur intéressé est renvoyé à [32] où beaucoup d'autres applications sont récapitulées).

L'ordre canonique d'un graphe d'indifférence peut être employé pour obtenir un algorithme très simple pour calculer un couplage maximum. Les détails sont comme suit.

Procédure Couplage-Maximum

Entrée: un graphe G d'indifférence avec un ordre canonique \leq ;
Sortie: un couplage maximum M de G

1. **Debut**
 2. $M \leftarrow \emptyset$;
 3. **pour** $i \leftarrow 1$ **à** $n - 1$ **pas 2 faire**
 4. **si** x_i et x_{i+1} sont adjacents **alors**
 5. ajouter l'arête $x_i x_{i+1}$ à M
 6. calculer M
 7. **fin**; $\{\text{Couplage} - \text{Maximum}\}$
-

Théorème 12.

Procédure Couplage – Maximum(G) se fait en $O(n)$.

Preuve.

Pour cela, considérons une composante connexe H de G et soit

$$x_i \leq x_{i+1} \leq \dots \leq x_t$$

la restriction de \leq à H . Notons d'après le corollaire 1, x_j et x_{j+1} sont adjacents pour toutes les valeurs de $j = i, i + 1, \dots, t - 1$. Par conséquent,

l'ensemble M_H de sommets produits par la procédure est un couplage dans H . Pour voir que M_H est maximal, notons qu'au plus, un sommet dans H est exposé (c-à-d. non incident à une arête dans M_H). Le couplage maximum de G est la réunion des couplages maximums des composants.

La complexité est en $O(n)$ et la preuve du théorème 12 est complète.

Il est noter par "Loogs et Olariu" que le procédure *couplage – Maximum* ne donne pas un couplage maximum dans un graphe d'intervalles qui n'est pas un graphe d'indifférence. Pour voir ceci, considérons le graphe de la figure 3.2 avec l'ordre $a \triangleleft b \triangleleft c \triangleleft d \triangleleft e \triangleleft f$. Cet ordre ne satisfait pas (3.2). La procédure donne ab, cd qui n'est pas un couplage maximum. (Le couplage maximum est ab, ce, df .)

Chapitre 4

Exemples d'applications

4.1 Qui a tué le Densmore?

Le duc de Densmore est retrouvé mort dans l'explosion d'une pièce de son château de l'île de White. Le meurtre a été commis à l'aide d'une bombe placée avec précaution dans le labyrinthe du château, ce qui a nécessité une longue préparation en cachette dans le labyrinthe. Or, avant son assassinat, le duc avait invité 8 femmes sur l'île, celles-ci se rappellent quelles autres femmes elles y ont vu, mais ont oublié à quelle date précise elles y étaient :

- Ann a vu Betty, Cynthia, Emily, Felicia et Georgia
- Betty a vu Ann, Cynthia et Helen
- Cynthia a vu Ann, Betty, Diana, Emily et Helen
- Diana a vu Cynthia et Emily
- Emily a vu Ann, Cynthia, Diana et Felicia
- Felicia a vu Ann et Emily
- Georgia a vu Ann et Helen
- Helen a vu Betty, Cynthia et Georgia

Le marin qui faisait la navette vers l'île a aussi oublié les dates, mais il se souvient n'avoir transporté chacune que pour un seul aller retour.

Le graphe de la relation $\ll a \text{ vu } \gg$ doit être un graphe d'intervalles.

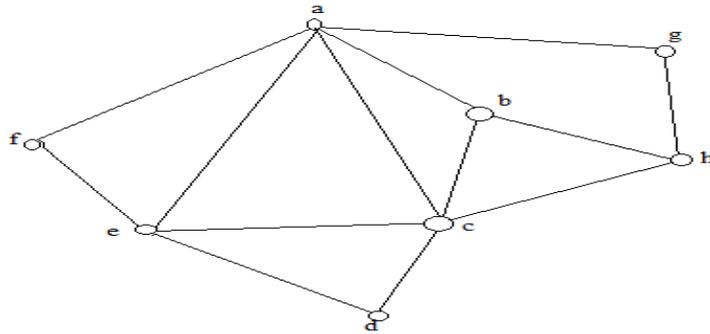


FIG. 4.1 – Graphe représentatif de la relation "à vue"

Tout sous-graphe induit par un sous-ensemble de sommets doit être un graphe d'intervalles.

Sous-graphes problématiques:

- $G[\{a, b, g, h\}]$, en rouge;
- $G[\{a, c, g, h\}]$, en vert;
- $G[\{a, b, c, e, f\}]$, en bleu.

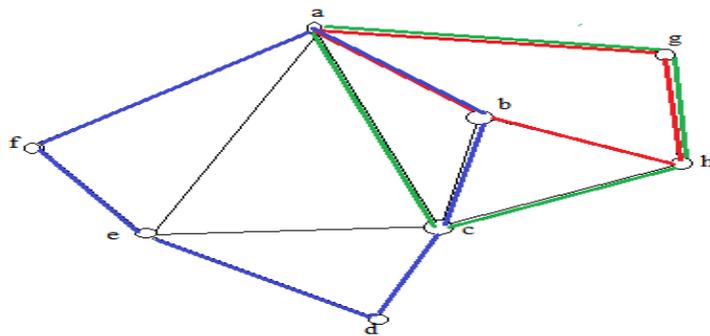


FIG. 4.2 – Sous graphes problématiques

**Ann est certainement
la coupable !**

Avec les analyses ADN, la théorie des graphes est un des nouveaux outils d'investigation moderne à disposition des policiers. La classe des graphes d'intervalles est bien connue et caractérisée, il existe des algorithmes linéaires de reconnaissance ([31], [7]).

4.2 Problème d'affectation des employés

Considérons un ensemble de tâches ayant chacune une heure début et une heure de fin bien précises. Supposon qu'on demande à des employés d'effectuer ces taches mais qu'aucun employé ne puisse effectuer deux tâches à la fois. Pour modéliser cette situation il suffit de considérer le graphe dans lequel chaque tache est représentée par un sommet et une arête relie deux sommet lorsque les taches correspondantes se chevauchent dans le temps. Les graphes ainsi construit est dit d'*intervalles*.

Définition 4.

Un « graphe d'intervalles » est le graphe d'intersection d'intervalles sur une droite. Donc, étant donnée un ensemble $E = \{E_1, \dots, E_n\}$ d'intervalles sur une droite, on lui associe le graphe d'intervalles $G = (X, E)$ où $X = \{1, \dots, n\}$ et deux sommets x et y sont reliés par une arête si et seulement si $E_x \cap E_y \neq \emptyset$.

Exemple

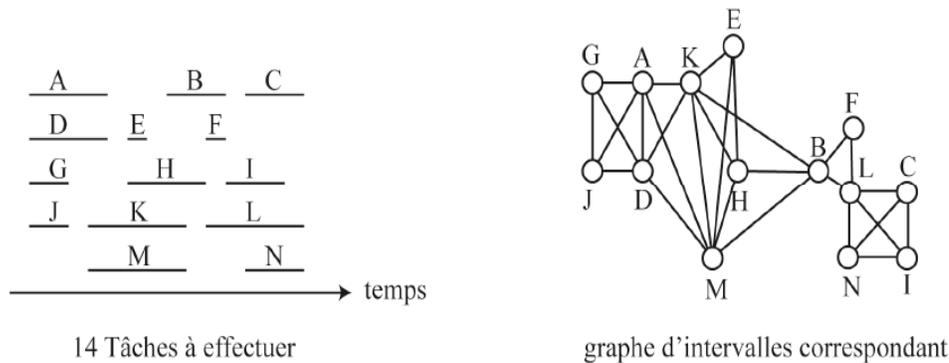


FIG. 4.3 – Exemple

Le problème consiste à affecter des tâches à des employés, chaque tâche ayant une heure de début et une heure de fin bien précises. Ce problème revient donc à colorer les sommets du graphe d'intervalles associé avec la contrainte que deux sommets reliés par une arête ne peuvent pas recevoir la même couleur. En d'autres termes, chaque couleur correspond à un employé et on interdit d'affecter le même employé à deux tâches qui se chevauchent dans le temps. Si on cherche à minimiser le nombre d'employés nécessaire pour effectuer toutes ces tâches, cela est équivalent à déterminer une coloration des sommets qui utilise un nombre minimum de couleurs.

Une telle coloration peut être obtenue facilement avec la technique suivante dans laquelle on suppose que les couleurs sont classées dans un certain ordre.

Coloration des sommets d'un graphe d'intervalles avec un nombre minimum de couleurs

1. Déterminer un schéma d'élimination parfait x_1, \dots, x_n
2. Colorer les sommets les uns après les autres, selon l'ordre inverse x_n, \dots, x_1 en choisissant toujours la première couleur disponible.

Dans cet exemple des 14 tâches, on voit par exemple que le sommet C est simplicial et on peut donc le choisir pour x_1 . Nous aurions aussi pu choisir G ou J ou I , etc. Par contre, nous n'aurions par exemple pas pu choisir le sommet L puisque ses voisins F et B ne sont pas reliés aux autres voisins C , I et N de L . En deuxième position, on peut mettre, par exemple, le sommet I , puis le sommet N en 3^e. Le sommet L devient alors simplicial puisque ses voisins dans le graphe résiduel obtenu en supprimant C , I et N sont F et B qui sont reliés entre eux. On peut donc mettre le sommet L en 4^e position. On procède ainsi de suite pour obtenir, par exemple, l'ordre suivant :

$$C, I, N, L, F, B, E, H, K, M, A, D, G, J$$

On peut maintenant colorer le graphe. Supposons que les couleurs sont ordonnées du plus foncé au plus clair. On commence donc par donner la couleur noire à J , puis la couleur rose à G , le jaune à D et le blanc à A . Le sommet M qui est le suivant à être coloré peut recevoir la couleur gris

foncé ou le noir. Cette dernière couleur étant prioritaire, on la choisit pour le sommet M . On poursuit ainsi de suite jusqu'à obtenir la coloration de tout le graphe qui est représentée à gauche dans la figure qui suit. Cette coloration nécessite 4 couleurs, ce qui signifie qu'il faut engager 4 employés pour réaliser les 14 tâches. L'affectation des tâches aux 4 employés est représentée à droite de la figure. Chaque ligne correspond à une couleur et donc à un employé. Par exemple, l'employé représenté par la couleur blanche réalise les tâches A , B , C et E puisque ces sommets sont de couleur blanche.

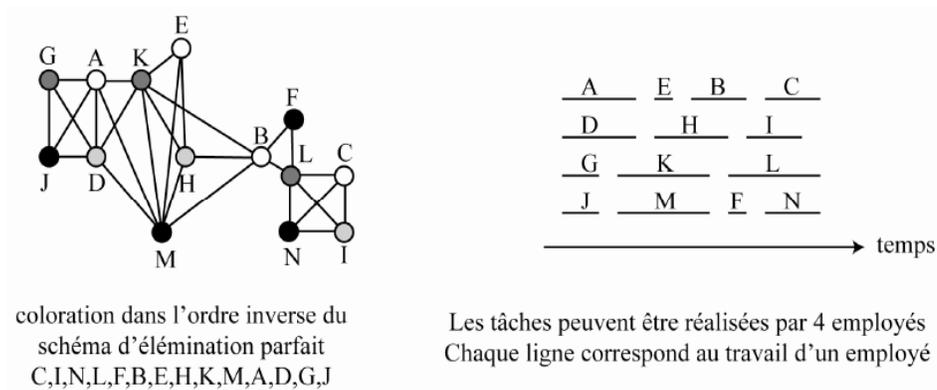


FIG. 4.4 – Affection des tâches aux employés

Dans l'exemple ci-dessus, on est amené à déterminer une partition des sommets d'un graphe d'intervalles en un nombre minimum de sous-ensembles tel qu'il n'existe aucune arête reliant deux sommets d'un même sous-ensemble. Certaines situations peuvent être modélisées à l'aide d'un graphe d'intervalles dans lequel il faut déterminer une partition de ses sommets en un nombre minimum de sous-ensembles tel qu'il ne manque cette fois-ci aucune arête entre deux sommets d'un même sous-ensemble. En termes de coloration, on veut donc cette fois-ci colorer les sommets tel que les sommets de même couleur soient tous reliés entre eux par une arête.

Conclusion générale

Nous avons étudié dans notre travail un cas particulier des graphes d'intervalles, qui sont les graphes d'indifférence. Ils sont caractérisés par l'existence d'un ordre spécial sur leurs sommets, ce qui facilite la recherche de certains invariants dans cette classe.

Comme il y a beaucoup de problèmes, qui peuvent être modélisés par cette classe de graphes, comme dit précédemment et résolu d'une façon polynomiale et exacte, il serait intéressant d'essayer sur des graphes modélisant des situations concrètes.

Cependant, il reste à implémenter l'ensemble des algorithmes énoncés.

Bibliographie

- [1] N. ALON, P. SEYMOUR. R. THOMAS, "*A separator theorem for graphs with an excluded minor and its applications*", J. Amer. Math. Soc, 3 (1990), 801-808.
- [2] C. BERGE. "*Graphes et hypergraphes*". DUNOD, Paris, France (1970).
- [3] H. L. BODLAENDER, "*Classes of graphs with bounded treewidth*", Technical Report RUU-CS-86-22, Dept, of Computer Sci., Utrecht University, Utrecht, the Netherlands (1986).
- [4] H. L. BODLAENDER, "*Dynamic programming on graphs with bounded treewidth*", in Proc. 15th International Colloque. on Automata, Languages and Programming, Lecture Notes in Comput. Sci., 317 (1988), 105-119.
- [5] K. P. BOGART et D. B. WEST. "*A short proof that proper unit*". Discrete Mathematics 201, pp. 21-23 (1999).
- [6] K S. BOOTH and G S. LUEKER. "*Linear algorithms to recognize interval graphs and test for the consecutive ones property*". In Proceedings of the seventh Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC'75), pages 255-265, (1975). <http://dx.doi.org/10.1145/800116.803776>.
- [7] K. S. BOOTH et G. S. LUEKER. "*Testing for the consecutive ones property, interval graphs, and graph planarity using PQ-tree algorithms.*" Journal of Computer and System Sciences 13, pp. 335-379 (1976).
- [8] C. F. BORNSTEIN. J. L. SZWARCFITER, "*On clique convergent graphs*", Graphs Combin., 11 (1995), 213-220.
- [9] A. BOUCHET, "*Reducing prime graphs and recognizing circle graphs*", Combinaton'ca, 7 (1987), 243-254.
- [10] A. BRANDSTÄDT, V. B. LE et J. P. SPINRAD (1999). "*Graph Classes*" A Survey. SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications 3, SIAM Publications, Philadelphie, PA.

- [11] M. CHUDNOVSKY, N. ROBERTSON, P. D. SEYMOUR et N. THOMAS (2002). "*The strong perfect graph theorem*". (manuscript)
<http://www.math.gatech.edu/thomas/spgc.html>.
- [12] M. CHUDNOVSKY, N. ROBERTSON, P. D. SEYMOUR et N. THOMAS. "*Progress on perfect graphs*". Mathematical Programming Series B 97, pp. 405-422 (2003).
- [13] D. G. CORNEIL. "*A simple 3-sweep LBFS algorithm for the recognition of unit interval graphs*". Discrete Applied Mathematics 138, pp. 371379 (2004).
- [14] D. G. CORNEIL, H. KIM, S. NATARAJAN, S. OLARIU et A. SPRAGU. "*Simple linear time recognition of unit interval graphs*". Information Processing Letters 55, pp. 99-104 (1995).
- [15] D. G. CORNEIL, S. OLARIU et L. STEWART. "*The ultimate interval graph recognition algorithm ?*" In Proceedings of the 9th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, pp. 175-180. ACM Press, New York, NY (1998).
- [16] G. CORNUÉJOLS, X. LIU et K. VUSKOVIC. "*A polynomial algorithm for recognizing perfect graphs*". In Proceedings of the 44th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, pp. 20-27. IEEE Computer Society Publications, Los Alamitos, CA (2003).
- [17] C. M. H. De FIGUEIREDO, J. MEIDANIS et C. P. De MELLO. "*A linear-time algorithm for proper interval graph recognition*". Information Processing Letters 56(3), pp. 179-184 (1995).
- [18] X. DENG, P. HELL et J. HUANG. "*Linear-time representation algorithms for proper circular-arc graphs and proper interval graphs*". SIAM Journal on Computing 25(2), pp. 390-403 (1996).
- [19] P. C. FISHBURN, "*Interval Orders and Interval Graphs*", John Wiley, New York (1985).
- [20] D. R. FULKERSON et O. A. GROSS. "*Incidence matrices and interval graphs*". Pacific Journal of Mathematics 15, pp. 835-855 (1965).
- [21] F. GARDI, "*Ordonnancement avec exclusion mutuelle par un graphe d'intervalles ou d'une classe apparantée, complexité et algorithme*", Thèse de Doctorat, université de la Méditerranée-Aix-Marseille II (2005).
- [22] M. R. GAREY et D. S. JOHNSON. "*Computer and Intractability, A Guide to the Theory of NP-Completeness*", W .H. Freeman and Company, San Francisco, CA (1979).

- [23] P. C. GILMORE et A. J. HOFFMAN. "A characterization of comparability graphs and of interval graphs." Canadian Journal of Mathematics 16, pp. 539-548 (1964).
- [24] P. W. GOLDBERG, M. C. GOLUMBIC, H. KAPLAN, R. SHAMIR, "Four strikes against physical mapping of DNA", J. Comput. Biol., 2 (1995), 139-152.
- [25] M. C. GOLUMBIC. "Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs." Computer Science and Applied Mathematics Series, Academic Press, New York, NY (1980).
- [26] M. C. GOLUMBIC. II. KAPLAN, R. SHAMIR, "Graph sandwich problems", J. Algorithms, 19 (1995), 449-473.
- [27] M. GRÖTSCHEL, L. LOVÁSZ et A. SCHRIJVER (1981). "The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization". Combinatorica 1, pp. 169-197.
- [28] U. I. GUPTA, D. T. LEE et J. Y. -T. LEUNG (1979). "An optimal solution for the channel-assignment problem". IEEE Transactions on Computers C-28(11), pp. 459-467.
- [29] U. I. GUPTA, D. T. LEE et J. Y. -T. LEUNG (1982). "Efficient algorithms for interval graphs and circular-arc graphs". Networks 12, pp. 459-467.
- [30] A. GYARFAS, J. LEHEL, "A Helly type problem in trees, in Combinatorial Theory and Applications", P. Erdős et al., eds., Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai, 4, North-Holland, Amsterdam (1970), 571-584.
- [31] M. HABIB, R. M. McCONNEL, C. PAUL et L. VIENNOT. "Lex-BSF and partition refinement, with applications to transitive orientation, interval graph recognition and consecutive ones testing." Theoretical Computer Science 234234:59-84, (2000). <http://citeseer.ist.psu.edu/179874.html>.
- [32] G. HAJOS, "Über eine Art von Graphen", Intern. Math. Nachr. 11 (1957), Problem 65.
- [33] W. L. HSU, T. H. MA, "Substitution decomposition on chordal graphs and applications", in ISA'91 Algorithms, W.-L. Hsu, R.T.C. Lee, eds., Lecture Notes in Comput. Sci., 557 (1991), 52-60. <http://dx.doi.org/10.1007/3-540-54945-549>.
- [34] W. L. HSU, "A simple test for interval graphs", in Intern. Workshop on Graph- Theoretic Concepts in Comp. Sci. 1993, Lecture Notes in Comput. Sci., 657, E.W. Mayr, ed. (1993), 11-16.
- [35] W. L. HSU and T. H. MA. "Fast and simple algorithms for recognizing chordal comparability graphs and interval graphs". SIAM Journal on Computing, 28(3):1004-1020, (1999). <http://dx.doi.org/10.1137/S0097539792224814>.

- [36] M. S. JACOBSON, F. R. MCMORRIS et H. M. MULDER. "An introduction to tolerance intersection graphs". In Graph Theory, Combinatorics and Applications (sous la direction de Y. Alavi, G. Chartrand, O.R. Oellerman et A.J. Schwenk), Vol. 2, pp. 705-723. John Wiley and Sons, New York, NY (1991).
- [37] R. M. KARP, "Mapping the genome: some combinatorial problems arising in molecular biology", in 25th Ann. ACM Sympos. on Theory of Comp. (1993), 278-285.
- [38] N. KORTE and R. H. MÖHRING. "A simple linear-time algorithm to recognize interval graphs". In Proceedings of the twelfth International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG'86), volume 246 of Lecture Notes in Computer Science, pages 1-16, (1986). [dx.doi.org/10.1007/3-540-17218-1_45](https://doi.org/10.1007/3-540-17218-1_45).
- [39] N. KORTE, R. H. MOHRING, "An incremental linear-time algorithm for recognizing interval graphs", SIAM J. Comput., 18 (1989), 68-81.
- [40] C. G. LEKKERKERKER and J. C. BOLAND, "Representations of a finite graph by a set of intervals on the line," Fund. Math. 51, (1962) 45-64.
- [41] P. J. LOOGES et S. OLARIU. "Optimal greedy algorithms for indifference graphs." Computers and Mathematics with Applications, pp. 15-25 (1993).
- [42] D. R. LUCE, "Semiorders and the theory of utility discrimination," *Economica* 24 (1956) 178-191.
- [43] G. S. LUEKER and K. S. BOOTH, "A linear time algorithm for deciding interval graph isomorphism," *Journal of the ACM*, 26, (1979), 183-195.
- [44] G. RAMALINGAM et C. PANDU RANGAN. "A unified approach to domination problems on interval graphs". *Information Processing Letters* 27(5) (1988), pp. 271-274.
- [45] J. F. MAURRAS. "Programmation Linéaire, Complexité: Séparation et Optimisation". *Mathématiques et Applications* 38, Springer-Verlag, Berlin, Allemagne (2002).
- [46] S. OLARIU . "An optimal greedy heuristic to color interval graphs". *Information Processing Letters* 37, pp. 21-25(1991).
- [47] S. OLARIU, "An exact coloring heuristic for interval graphs," *Information Processing Letters*, to appear.
- [48] B. S. PANDA et S. K. DAS. "A linear time recognition algorithm for proper interval graphs." *Information Processing Letters* 87(3), pp. 153-161 (2003).

- [49] I. PE'ER, R. SHAMIR, "Realizing interval graphs with side and distance constraints", SIAM J. Discrete Math., 10 (1997), 662-687.
- [50] G. RAMALINGAM and C. P. RANGAN. "New sequential and parallel algorithms for interval graph recognition". Information Processing Letters, 34(4):215-219, 1990. [http://dx.doi.org/10.1016/0020-0190\(90\)90163-R](http://dx.doi.org/10.1016/0020-0190(90)90163-R).
- [51] F. S. ROBERTS. "Representations of indifference relations". Thèse de Doctorat. Stanford University, Stanford, CA (1968).
- [52] F. S. ROBERTS. "Indifference graphs." In Proof Techniques in Graph Theory (sous la direction de F. Harary), pp. 139-146. Academic Press, New York, NY (1969).
- [53] F. S. ROBERTS. "Discrete Mathematical Models with Applications to Social, Biological, and Environmental Problems". Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1976).
- [54] F. S. ROBERTS. "Graph Theory and its Application to the Problems of Society." CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics 29, SIAM Publications, Philadelphie, PA (1978).
- [55] F. S. ROBERTS, "Indifference and Seriation," Ann. N. Y. Acad. Sci. 328, 1979, 173-182.
- [56] A. SCHRIJVER. "Theory of Linear and Integer Programming." Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, John Wiley and Sons, Chichester, Angleterre, Royaume-Uni(1986).
- [57] D. S. Scott et P. Suppes. "Foundation aspects of theories of measurement". Journal of Symbolic Logic 23, pp. 113-128 (1958).
- [58] K. SIMON. "A new simple linear algorithm to recognize interval graphs. In Proceedings of the International Workshop on Computational Geometry (CG'91)", volume 553 of Lecture Notes in Computer Science, pages 289-308. Springer-Verlag, 1992. http://dx.doi.org/10.1007/3-540-54891-2_2.
- [59] M. M. SYSLO, N. DEO, and J. S. KOWALIK, "Discrete Optimisation Algorithms," Prentice-Hall, (1983).
- [60] G. WEGNER. "Eigenschaften der nerven homologische-einfacher familien in R_n ." Thèse de Doctorat. Georg-August-Göttingen Universität, Göttingen, Allemagne (1967).