

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOU D MAMMERI, TIZI-OUZOU

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de Master

en

RECHERCHE OPERATIONNELLE

SPECIALITE: MATHEMATIQUES

Présenté par:

Ait Chabane Amal

Sujet:

**Contrôle optimal d'une navette spatiale en
phase de rentrée atmosphérique.**

Devant le jury d'examen composé de:

M. Mohamed Aidène	Professeur	U.M.M.T.O	Président
M. Abdelkader Merakeb	M. de conférences	U.M.M.T.O	Rapporteur
<i>M^{me}</i> . Nacima Moussouni	M. Assistante A	U.M.M.T.O	Examinatrice
<i>M^{me}</i> . Farida Achemine	M. assistante A	U.M.M.T.O	Examinatrice

Soutenu le: !/10/2011

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier M. Mohamed Aidène d'avoir proposé ce thème. Toute ma reconnaissance va à mon encadreur M. Abdelkader Merakeb pour m'avoir accordé sa confiance et permis d'effectuer ce mémoire, ses conseils, suggestions et remarques tout au long de ce travail.

Je tiens également à remercier les jurys qui ont accepté de juger mon travail.

Je voudrais remercier du fond du coeur toute ma famille, mes parents en particulier pour leur soutien, leurs encouragements permanents.

Également toute ma reconnaissance à tous les enseignants qui m'ont formé durant mon cursus d'étude.

Table des matières

1	Théorie du contrôle optimal et des systèmes de contrôle	7
1.1	Formulation d'un problème de contrôle optimal	7
1.1.1	Système dynamique de contrôle	7
1.1.2	Problème de contrôle optimal	8
1.1.3	Ensemble accessible	8
1.1.4	Contrôlabilité des systèmes linéaires	9
1.1.5	Contrôle singulier	9
1.1.6	Contrôle bang-bang	9
1.1.7	Contrôlabilité des systèmes non-linéaires	10
1.1.8	Classement des problèmes de contrôle optimal	10
1.2	Principe du maximum	10
1.3	Principe du maximum de Pontryagin	11
1.3.1	Enoncé général	11
1.4	Principe du maximum avec contraintes sur l'état	12
1.5	La méthode de tir simple.	13
1.6	La méthode de tir multiple.	14
2	Contrôle optimal d'une navette spatiale.	17
2.1	Modélisation d'une navette spatiale en phase de rentrée atmosphérique. . .	17
2.1.1	Notions élémentaires	18
2.1.2	Rentrée atmosphérique et influence des paramètres	19
2.1.3	Le repère	20
2.1.4	Les forces	21
2.1.5	Les équations du système [13]	22
2.1.6	Les contraintes sur l'état	23
2.1.7	Le coût	23

2.2	Problème du contrôle optimal de la navette spatiale	23
2.3	Le problème sans contrainte	24
2.4	Le problème simplifié en dimension trois	25
2.5	Application du principe du maximum au problème de la navette	25
2.6	Application de la méthode de tir au problème simplifié	27
2.6.1	Problème P_0	27
2.6.2	Problème aux deux bouts	28
3	Implémentation sous Matlab	29
3.1	Données numériques des programmes	29
3.2	Implémentation de la méthode de tir pour le modèle simplifié	30
3.3	Tracé des solutions en utilisant le temps de commutation	34
3.3.1	Le problème sans contrainte	34
	conclusion générale	41
	Bibliographie	42

Introduction

La théorie du contrôle analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères : c'est l'étape de réalisation de la commande. Les systèmes abordés sont multiples : systèmes différentiels, discrets, avec bruit, avec retard... Leurs origines sont très diverses : mécanique, électrique, électronique, biologie, chimie, économie, théorie des jeux, informatique... Les objectifs peuvent être de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations, ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation (contrôle optimal). Un problème de contrôle optimal se décompose en deux parties : pour déterminer une trajectoire optimale joignant un ensemble initial à une cible, il faut d'abord savoir si cette cible est atteignable. C'est le problème de contrôlabilité. Ensuite, une fois ce problème résolu, il faut chercher parmi toutes ces trajectoires possibles celles qui le font en coût minimal.

De nos jours la théorie du contrôle fait partie de notre quotidien ayant pour but d'améliorer notre qualité de vie et de faciliter certaines tâches. Ainsi les domaines d'application sont multiples : automobile, robotique, aéronautique, internet et les communications en général, chimique, génie des procédés, aérospatiale. Pour ce dernier, on voit l'importance croissante de la théorie du contrôle, et du contrôle optimal, dans les techniques d'aérocapture pour entre autres :

- Les problèmes de guidage et transferts d'orbites aéroassistés,
- développement de lanceurs de satellites récupérables (ou l'enjeu financier est très important);
- Les problèmes de rentrée atmosphérique : c'est l'objet du fameux projet Mars Sample Return développé par le CNES, qui consiste à envoyer une navette spatiale habitée vers la planète Mars, dans le but de ramener sur Terre des échantillons martiens.

Le rôle de l'arc atmosphérique est :

- de réduire suffisamment l'énergie cinétique, par les forces de frottement dans l'atmosphère,
- d'amener l'engin spatial d'une position initiale précise à une cible donnée;
 - de plus, il faut prendre en compte certaines contraintes sur l'état : contrainte sur le flux thermique (non destruction de la navette), sur l'accélération normale (présence humaine dans la navette), et sur la pression dynamique (contrainte structurelle),
 - enfin, on cherche de plus à minimiser un critère d'optimisation : le flux thermique total de la navette, représentant un facteur d'usure.

Durant cette phase atmosphérique, la navette se comporte comme un planeur, les moteurs sont coupés : il n'y a pas de force de poussée. L'engin est donc soumis uniquement à la gravité et aux forces aérodynamiques.

En astronautique, une navette spatiale est un véhicule aérospatial réutilisable conçu pour assurer la desserte des stations spatiales en orbite basse, mais pouvant aussi assurer d'autres missions, telles que le lancement ou la réparation de satellites artificiels. Le terme correspondant en anglais est "*space shuttle*". La navette spatiale est lancée par une fusée et atterrit comme un planeur ou à l'aide d'un réacteur. Plusieurs navettes ont été construites et utilisées par l'agence spatiale américaine, NASA, alors qu'une seule navette russe, Bourane, a volé en mode automatique (sans équipage), et que le projet européen Hermès a été abandonné.

L'organisation de ce travail se présente comme suit :

Nous commençons le chapitre I par une présentation des notions essentielles de la théorie du contrôle optimal pour des systèmes dynamiques linéaires et non linéaires l'énoncé du principe du maximum de Pontryagin suivie par les méthodes numériques indirectes de résolution d'un problème de contrôle optimal (méthode de tir).

Le chapitre II est consacré au contrôle optimal d'une navette spatiale en phase de rentrée atmosphérique. Nous aborderons la mise en équation trajectoire de la navette spatiale, en montrant l'influence des différents paramètres qui interviennent dans sa modélisation.

Le problème lui même est soumis à différentes contraintes notamment celles qui régissent les états du système; ce qui complique l'utilisation du PMP. Le problème à été simplifié en

négligeant certains paramètres pour aboutir à un modèle simplifié en dimension trois.

Enfin, dans le chapitre III nous avons implémenté sous Matlab le tracé des solutions par l'utilisation de la méthode du tir au modèle simplifié puis avons opté pour une autre démarche utilisant la dichotomie après avoir étudié la spécificité du problème concernant le temps de commutation du contrôle.

*Dans une science,
il n'y a de scientifique que ce qui est mathématique*
Kant

Chapitre 1

Théorie du contrôle optimal et des systèmes de contrôle

1.1 Formulation d'un problème de contrôle optimal

un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé le contrôle. Pour le modéliser, on peut avoir recours à des équations différentielles, intégrales, fonctionnelles, aux différences finies, aux dérivées partielles, stochastiques, etc. Pour cette raison la théorie du contrôle est à l'interconnexion de nombreux domaines mathématiques. Les contrôles sont des fonctions ou des paramètres, habituellement soumis à des contraintes. Dans cette section, nous effectuons quelques rappels sur la théorie du contrôle optimal.

1.1.1 Système dynamique de contrôle

On appelle un système dynamique de contrôle tout système qui peut se modéliser sous forme d'équations différentielles ordinaires, intégrales, fonctionnelles, dérivées partielles, ... On se restreint dans notre étude aux systèmes modélisés par les équations différentielles ordinaires dont l'équation est donnée sous la forme:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), t \in [0, T] \quad (1.1)$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$

Et $x(t)' = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ est le vecteur état du système.

$u(t)' = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \in \Omega$ l'ensemble des contrôles admissibles sur $[0, T]$ qui

est l'ensemble des applications mesurables et localement bornées sur \mathbb{R} .

Proposition 1.1. *le système (1.1) peut être donné sous forme d'un système linéarisé en x et en u de la manière suivante:*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), t \in [0, T] \quad (1.2)$$

où

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t), u(t)), B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(t, x(t), u(t))$$

1.1.2 Problème de contrôle optimal

Considérons le système (1.1) soumis à la condition $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Le problème de contrôle optimal est de déterminer une commande u correspondant à des trajectoires $x_u(\cdot)$ solutions de (1.1), vérifiant $u(t) \in \Omega$, $x_u(0) \in M_0$, $x_u(T) \in M_1$.

Où M_0, M_1 sont deux variétés de \mathbb{R}^n , et ayant pour but de minimiser le coût:

$$C(T, u) = \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt \quad (1.3)$$

Dans le cas des systèmes donnés sous la forme (1.2), la solution $x_u(\cdot)$ est donnée par

$$x_u(t) = F(t)x_0 + \int_0^t F(t)F^{-1}(s)B(s)u(s)ds \quad (1.4)$$

où $F(t)$ est la résolvante du système:

$$\dot{F}(t) = A(t)F(t), F(0) = I_d.$$

Remarque 1.1. Si $x(0) = 0$ la solution de $\dot{x} = Ax + Bu$, s'écrit

$$x(t) = \int_0^t F(t)F^{-1}(s)B(s)u(s)ds$$

1.1.3 Ensemble accessible

L'ensemble des points accessibles en temps final T pour le système (1.1), noté $Acc(x^0, T)$, est l'ensemble des extrémités au temps T des solutions du système partant de x^0 au temps $t = 0$. Il est défini par:

$$Acc(x_0, T) = \{x_u(T) / u \in U\}$$

Où U est l'ensemble des contrôles admissibles.

Théorème. *soient les contrôles u appartenant à l'ensemble U des fonctions mesurables à valeurs dans un compact $\Omega \in \mathbb{R}^m$, $T > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors l'ensemble $Acc(x_0, t)$ est compact et varie continûment en t sur $[0, T]$.*

1.1.4 Contrôlabilité des systèmes linéaires

Le système linearisé de contrôle (1.2) est dit contrôlable en temps T si $Acc(x_0, T) = \mathbb{R}^n$, i.e., pour tous $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle u tel que la trajectoire associée relie x_0 à x_1 en un temps T fini.

Théorème. *Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas où A et B ne dépendent pas de t .*

Le système linearisé de contrôle (1.2) est dit contrôlable en temps T quelconque si et seulement si la matrice C , dite matrice de Kalman,

$$C = (B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B)$$

est de rang n (condition de Kalman).

C est la matrice de Kalman.

Remarque 1.2. Dans le cas où le contrôle u est contraint d'appartenir à un sous ensemble $U \in \mathbb{R}^m$, les propriétés de contrôlabilité globale sont reliées aux propriétés de stabilité de la matrice A (toutes les valeurs propres de la matrice A sont de partie réelle strictement négative).

1.1.5 Contrôle singulier

Soit u un contrôle défini sur $[0, T]$ tel que sa trajectoire associée x_u issue de $x(0) = x_0$ est définie sur $[0, T]$ et vérifie au temps T :

$$x(T) \in \partial Acc(x_0, T).$$

Alors le contrôle u est singulier sur $[0, T]$.

1.1.6 Contrôle bang-bang

Lorsque tous les contrôles u_j sont bornés, sous la forme $a_j \leq u_j \leq b_j, \forall j = 1, \dots, m$, alors on peut toujours se ramener à des contrôles $v_j \in [-1, 1]$ à travers la transformation suivante:

$$u_j = \frac{1}{2}(a_j + b_j) + \frac{1}{2}(a_j - b_j)v_j.$$

Un contrôle u_j est dit bang-bang si pour tout $u_j \in [-1,1]$ on a $|u_j(t)| = 1$.

1.1.7 Contrôlabilité des systèmes non-linéaires

La contrôlabilité est un concept clé pour la compréhension des propriétés structurelles et qualitatives, comme la stabilisation. Les auteurs, dans leur quasi-totalité, ont considéré des généralisations naturelles de $\dot{x} = A x + B u$. Le résultat suivant donne une condition sur la contrôlabilité locale des systèmes non-linéaires.

En général, le problème de contrôlabilité globale est difficile. Cependant, il existe des techniques qui permettent de déduire la contrôlabilité locale dans le cas des systèmes linéarisés.

1.1.8 Classement des problèmes de contrôle optimal

On peut classer les fonctions objectif en deux critères physiques de performance:

On peut classer les fonctions objectif en deux critères physiques de performance:

Temps optimal

On parle d'un problème en temps optimal lorsque $f_0(t,x,u) = 1$, $F(t_1, x^1) = 0$ et le temps final t_1 est libre dans l'expression de $\min_u \int_0^{t_1} 1 dt$.

Coût optimal

On parle d'un problème en coût optimal lorsque le temps final t_1 est fixé dans l'expression $\min_u \int_0^{t_1} f_0(t,x,u) dt + F(t_1, x^1)$.

Remarque 1.3. Il existe des problèmes qui combine les deux critères physique de performance, et on parlera dans ce cas d'un problème de contrôle en temps et en coût optimal.

1.2 Principe du maximum

Définition 1.1. Le Hamiltonien du système (1.1) est la fonction

$$H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n / \{0\}) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(t, x, p, u) \mapsto H(t, x, p, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^n , p est le vecteur adjoint.

Proposition 1.2. *Soit u un contrôle singulier sur $[0, T]$ pour le système de contrôle (1.1), et soit $x(\cdot)$ la trajectoire singulière associée. Alors il existe une application absolument continue $p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n / \{0\}$, telle que les équations suivantes sont vérifiées pour presque tout $t \in [0, T]$.*

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), u(t)) \quad (1.5)$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), u(t)). \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t, x(t), p(t), u(t)) = 0. \quad (1.7)$$

où H est le hamiltonien du système.

L'équation (1.6) est appelée équation de contrainte.

Théorème. (Principe du maximum faible).

Si le contrôle u associé au système de contrôle (1.1) est optimal pour le coût (1.3), alors il existe une application $p(\cdot)$ (vecteur adjoint) absolument continue sur $[0, T]$, à valeurs dans \mathbb{R}^n , et un réel $p^0 \leq 0$. Les équations suivantes sont vérifiées pour presque tout $t \in [0, T]$.

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) \quad (1.8)$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)). \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = 0. \quad (1.10)$$

Où H est le Hamiltonien associé au système (1.1) et au coût (1.3)

$$H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + p^0 f^0(t, x, u). \quad (1.11)$$

1.3 Principe du maximum de Pontryagin

1.3.1 Enoncé général

Considérons le problème suivant:

$$\begin{aligned} \min_u C(T, u) &= \min_u \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt \\ \text{s.c} & \\ \dot{x} &= f(t, x, u) \\ x(0) &= x^0 \in M_0, \quad x(t_1) = x^1 \in M_1 \\ u &\in U \end{aligned} \quad (1.12)$$

Si le contrôle u associé au système de contrôle (1.1) est optimal pour le coût (1.3), alors il existe une application $p(\cdot)$ (vecteur adjoint) absolument continue sur $[0, T]$, à valeurs dans \mathbb{R}^n , et un réel $p^0 \leq 0$. Les équations suivantes sont vérifiées pour presque tout $t \in [0, T]$.

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) \quad (1.13)$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)). \quad (1.14)$$

et on a u qui vérifie la condition de maximisation presque partout sur $[0, T]$

$$H(t, x, p, p^0, u) = \max_{v \in U} H(t, x, p, p^0, v) \quad (1.15)$$

Si de plus M_0 et M_1 (ou juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de \mathbb{R}^n ayant des espaces tangents en $x(0) \in M_0$ et $x(T) \in M_1$, alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à vérifier les conditions de transversalité:

$$p(0) \perp T_{x(0)} M_0, p(T) \perp T_{x(T)} M_1 \quad (1.16)$$

Remarque 1.4. La convention $p^0 < 0$ conduit au principe du maximum. La convention $p^0 > 0$ conduit au principe du minimum.

Définition 1.2. Le contrôle u est extrémal sur $[0, T]$ s'il existe pour le système linéaire (1.2) une solution non nulle $p(t)$ de l'équation:

$$\dot{p}(t) = -p(t) A(t).$$

telle que

$$p(t)B(t)u(t) = \max_{v \in U} p(t)B(t)v(t)$$

Remarque 1.5. Si $p^0 = 0$, on dit que l'extrémale est anormale, et si $p^0 \neq 0$ l'extrémale est dite normale.

Remarque 1.6. L'application du principe du maximum permet de ramener un problème de contrôle optimal à un problème aux valeurs limites, qui se résout ensuite numériquement avec la méthode de tir (fondée sur une méthode de Newton).

1.4 Principe du maximum avec contraintes sur l'état

Le principe du maximum tel qu'il vient d'être énoncé prend en compte des contraintes sur le contrôle, mais ne prend pas en compte d'éventuelles contraintes sur l'état. Ce

problème est en effet beaucoup plus difficile. Il existe plusieurs versions du principe du maximum avec contraintes sur l'état. La théorie est cependant beaucoup plus compliquée, et nous ne l'abordons pas ici. Une différence fondamentale avec le principe du maximum classique est que la présence de contraintes sur l'état peut rendre le vecteur adjoint discontinu. On rajoute alors des conditions de saut, ou de jonction.

En fait, lorsqu'il existe des contraintes sur l'état de la forme $c_i(x) \leq 0$, $i = 1, \dots, p$, ou les fonctions $c_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 , alors le vecteur adjoint $p(\cdot)$ est solution de l'équation intégrale

$$p(t) = p(T) + \int_t^T \frac{\partial H}{\partial x} dt - \sum_{i=1}^p \int_t^T \frac{\partial c_i}{\partial x} d\mu_i$$

ou les μ_i sont des mesures positives ou nulles dont le support est contenu dans $\{t, [0, T] | c_i(x(t)) = 0\}$. Cependant il existe des méthodes qui évitent l'usage du PMP avec contrainte sur l'état par résolution d'un problème de contrôle optimal modifié en pondérant cette contrainte de manière à forcer sa vérification. C'est la méthode de pénalisation dont le principe général est d'imposer à l'état d'appartenir à un sous ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$. La principale difficulté réside dans la capacité de construire cette fonction de pénalité.

1.5 La méthode de tir simple.

La méthode du tir simple fait partie des méthodes numériques dites indirectes. Elle est basée sur le Principe du Maximum de Pontryagin qui est une condition nécessaire d'optimalité et affirme que toute trajectoire optimale est la projection d'une extrémale. On rappelle que les méthodes directes, quant à elles, impliquent traditionnellement la discrétisation totale ou partielle du problème, et utilisent ensuite diverses approches (SQP et techniques de point intérieur par exemple) pour résoudre le problème résultant. Les méthodes directes sont donc supposées robustes, mais sont en contrepartie relativement peu précises, et peuvent mener à de grandes tailles de problème suivant le pas de discrétisation utilisé. Cela rend ces méthodes moins adaptées à certains cas particuliers. Le tir simple, par contre, consiste à trouver un zéro de la fonction de tir associée au problème original, si l'on est capable, à partir de la condition de maximum, d'exprimer le contrôle extrême en fonction de $(x(t); p(t))$, alors le système extrême est un système différentiel de la forme $\dot{z}(t) = F(t; z(t))$, où $z(t) = (x(t), p(t))$, et les conditions initiales, finales, et les conditions de transversalité, se mettent sous la forme $R(z(0), z(T)) = 0$. Finalement, on obtient le

problème aux valeurs limites

$$\left. \begin{array}{l} \dot{z}(t) = F(t; z(t)) \\ R(z(0), z(T)) = 0 \end{array} \right\}. \quad (1.17)$$

Définition 1.3. Notons $z(t; z_0)$ la solution du problème de Cauchy

$$\left. \begin{array}{l} \dot{z}(t) = F(t; z(t)) \\ z(0) = z_0 \end{array} \right\}. \quad (1.18)$$

et posons $G(z_0) = R(z_0, z(T, z_0))$ la fonction de tir. Le problème (1.17) aux valeurs limites est alors équivalent à

$$G(z_0) = 0$$

Ceci peut se résoudre par une méthode de Newton.

Remarque 1.7. Dans le cas non contraint, ce problème est bien posé car le nombre d'équations est égal au nombre d'inconnues.

1.6 La méthode de tir multiple.

la méthode de tir multiple découpe l'intervalle $[0, t_f]$ en N intervalles $[t_i, t_{i+1}]$, et se donne comme inconnues les valeurs $z(t_i)$ au début de chaque sous-intervalle. Il faut prendre en compte des conditions de recollement en chaque temps t_i (conditions de continuité). L'intérêt est d'améliorer la stabilité de la méthode. De manière plus précise, considérons un problème de contrôle optimal général. L'application du principe du maximum réduit le problème à un problème aux valeurs limites du type

$$\dot{z}(t) = F(t; z(t)) = \begin{cases} F_0(t; z(t)) & \text{si } t_0 \leq t \leq t_1 \\ F_1(t; z(t)) & \text{si } t_1 \leq t \leq t_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_s(t; z(t)) & \text{si } t_s \leq t \leq t_f \end{cases} \quad (1.19)$$

où $z = (x; p) \in \mathbb{R}^{2n}$ (p est le vecteur adjoint), et $t_1, t_2, \dots, t_s \in [t_0, t_f]$.

Remarque 1.8. A priori le temps final t_f est inconnu, par ailleurs dans la méthode de tir multiple le nombre s de commutations doit être fixé, on le détermine lorsque c'est possible par une analyse géométrique du problème.

La méthode de tir multiple consiste à subdiviser l'intervalle $[t_0, t_f]$ en N sous-intervalles, la valeur de $z(t)$ au début de chaque sous-intervalle étant inconnue. Plus précisément, soit $t_0 < \sigma_2 < \dots < \sigma_k < t_f$ une subdivision fixée de l'intervalle $[t_0, t_f]$. En tout point σ_j la fonction z est continue.

On peut considérer σ_j comme un point de commutation fixé, en lequel on a

$$\begin{cases} z(\sigma_j^+) = z(\sigma_j^-) \\ \sigma_j = \sigma_j^* \end{cases}$$

On définit maintenant les noeuds

$$\{\tau_1, \dots, \tau_m\} = \{t_0, t_f\} \cup \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\} \cup \{t_1, \dots, t_s\}$$

Finalement on est conduit au problème aux valeurs limites

$$\begin{aligned} \bullet \dot{z}(t) = F(t; z(t)) &= \begin{cases} F_0(t; z(t)) & \text{si } \tau_0 \leq t \leq \tau_1 \\ F_1(t; z(t)) & \text{si } \tau_1 \leq t \leq \tau_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{m-1}(t; z(t)) & \text{si } \tau_{m-1} \leq t \leq \tau_m \end{cases} & (1.20) \\ \bullet \forall j \in \{2, \dots, m-1\} & r_j(\tau_j, z(\tau_j^-), z(\tau_j^-)) = 0 \\ \bullet r_m((\tau_m), z(\tau_1), z(\tau_m)) &= 0 \end{aligned}$$

où $\tau_1 = t_0$ est fixé, $\tau_m = t_f$, et les r_j représentent les conditions intérieures ou limites précédentes.

Remarque 1.9. On améliore la stabilité de la méthode en augmentant le nombre de noeuds. C'est là en effet le principe de la méthode de tir multiple, par opposition à la méthode de tir simple où les erreurs par rapport à la condition initiale évoluent exponentiellement en fonction de $t_f - t_0$

Posons $z_j^+ = z(\tau_j^+)$, et soit $z(t, \tau_{j-1}, z_{j-1}^+)$ la solution du problème de Cauchy.

$$\dot{z}(t) = F(t; z(t)), z(\tau_{j-1}) = z_{j-1}^+$$

On a

$$z(\tau_j^-) = z(\tau_j^-, \tau_{j-1}, z_{j-1}^+)$$

Les conditions intérieures et frontières s'écrivent

$$\forall j \in \{2, \dots, m-1\} \quad r_j(\tau_j, z(\tau_j^-, \tau_{j-1}, z_{j-1}^+), z_j^+) = 0 \quad (1.21)$$

$$r_m(\tau_m, z_1^+, z(\tau_m^-, \tau_{m-1}, z_{m-1}^+)) = 0 \quad (1.22)$$

Posons maintenant

$$Z = (z_1^+, \tau_m, z_2^+, \tau_2, \dots, z_{m-1}^+, \tau_{m-1}) \in \mathbb{R}^{(2n+1)(m-1)}$$

Alors les conditions (1.21) et (1.22) sont vérifiées si

$$G(Z) = \begin{pmatrix} r_m(\tau_m, z_1^+, z(\tau_m^-, \tau_{m-1}, z_{m-1}^+)) \\ r_2(\tau_2, z(\tau_2^-, \tau_1, z_1^+), z_2^+) \\ \cdot \\ \cdot \\ r_{m-1}(\tau_m, z(\tau_{m-1}^-, \tau_{m-2}, z_{m-2}^+), z_{m-1}^+) \end{pmatrix} = 0 \quad (1.23)$$

On s'est donc ramené à déterminer un zéro de la fonction G , qui est définie sur un espace vectoriel dont la dimension est proportionnelle au nombre de points de commutation et de points de la subdivision. L'équation $G = 0$ peut alors être résolue itérativement par une méthode de Newton.

Chapitre 2

Contrôle optimal d'une navette spatiale.

Dans ce chapitre, on s'intéresse au problème de contrôle optimal d'une navette spatiale en phase de rentrée atmosphérique. Le coût retenu est le flux thermique total lié au facteur d'usure de la navette. L'objectif est de déterminer une trajectoire optimale partant d'un certain point initial pour atteindre une cible donnée. La modélisation de cet arc atmosphérique suggère l'existence de contraintes sur l'état. La navette est considérée comme un planeur, et n'est soumise qu'aux forces aérodynamiques. Le contrôle de l'engin se fait par manipulation de l'angle de gîte.

2.1 Modélisation d'une navette spatiale en phase de rentrée atmosphérique.

Les aspects importants lors de la formulation d'un problème de contrôle optimal exigent:

- Description mathématique (modélisation) du processus à contrôler.
- Déclaration des contraintes physiques.
- Spécification des critères de performance.

La partie la moins triviale d'un problème de contrôle est la modélisation du processus. Le but est d'obtenir une description mathématique simple qui prévoit de manière anticipée la réponse du système pour tout contrôle. Le problème est complexe car il y a des contraintes actives sur l'état : une contrainte sur le flux thermique et une contrainte sur l'accélération normale. Pour ce type de système un critère à minimiser dans le calcul de trajectoires est le facteur d'usure de la navette, modélisé par l'intégrale du flux thermique pour chercher les moyens les plus économiques pour maintenir la navette dans l'espace.

Le contrôle est la configuration aérodynamique de la navette. La première question qui se pose est la suivante : les forces aérodynamiques peuvent-elles contribuer à freiner la navette de manière adéquate ? En fait si l'altitude est trop élevée (supérieure à 120 km), alors la densité atmosphérique est trop faible, et il est physiquement impossible de générer des forces aérodynamiques suffisamment intenses. Au contraire, si l'altitude est trop basse (moins de 20 km), la densité atmosphérique est trop grande, et le seul emploi des forces aérodynamiques conduirait à un dépassement du seuil autorisé pour le flux thermique ou la pression dynamique. En effet la rentrée atmosphérique s'effectue à des vitesses très élevées. En revanche si l'altitude est comprise entre 20 et 120 km, on peut trouver un compromis. C'est ce qu'on appelle la phase atmosphérique.

2.1.1 Notions élémentaires

- **Finesse**

Elle désigne la caractéristique aérodynamique et c'est le rapport entre la portance et la traînée d'un corps placé dans un écoulement aérodynamique. Évidemment, elle varie en fonction de la vitesse, ou plus précisément, du nombre de Mach.

- **Nombre de Mach**

Il exprime le rapport de la vitesse locale d'un fluide sur la vitesse du son dans ce même fluide.

- **Portance**

C'est la composante de la force subie par un corps en mouvement dans un fluide. Elle s'exerce perpendiculairement à la direction du mouvement. On peut notamment ajouter pour le cas de notre navette spatiale qui n'est ni plus ni moins qu'un planeur, que la portance est dirigée de l'intrados vers l'extrados.

- **Gîte**

C'est l'orientation de la portance. En effet, la projection de la portance est commandable. Elle est au maximum pour un vol sur le ventre où le gîte sera nulle. Elle s'annule pour un vol sur le dos où le gîte sera à 180° .

- **Incidence**

Le véhicule de rentrée, avec son axe longitudinal, dont l'angle avec le vecteur vitesse s'appelle incidence.

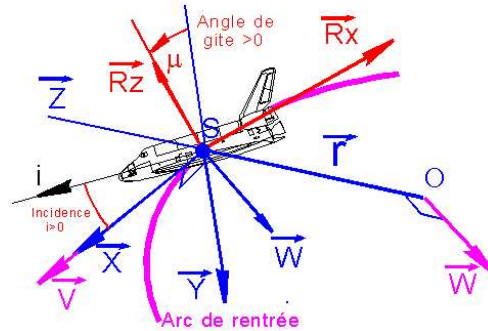


FIG. 2.1 – Les paramètres de la navette.

2.1.2 Rentrée atmosphérique et influence des paramètres

- **Influence de la vitesse:**

La vitesse de la navette spatiale pour la rentrée est de l'ordre de $7400m.s^{-1}$. Cette vitesse est bien une vitesse adéquate pour l'atterrissage sur Terre de notre navette. La navette entre donc bien en collision avec la Terre après avoir traversé l'atmosphère. On retiendra de l'influence de la vitesse initiale que celle-ci permet d'influencer la vitesse de la navette spatiale tout au long de sa procédure d'atterrissage sur la Terre. En revanche, on retiendra que la vitesse initiale détermine la vitesse d'atterrissage comme l'on pouvait s'en douter. Elle influe également sur la température de surface de la navette.

- **Influence de l'angle de rentrée:**

La diminution de l'angle de rentrée permet de réduire la vitesse d'approche au sol mais en contre partie, l'échauffement de la navette est plus important en comparaison au cas de référence. Ainsi, l'augmentation de cet angle augmente sa vitesse d'approche tout en réduisant sa température.

- **Influence de la portance de la navette:**

L'augmentation de la portance de notre navette provoque des résultats non désirables et des valeurs extrêmes. En effet, en augmentant la portance de notre engin, nous lui permettons d'être soumis de façon plus importante au flux d'air et donc de mieux « voler » lors

de son retour dans l'atmosphère et plus rapidement d'où l'échauffement constaté.

• **Influence de la surface de référence:**

En diminuant la surface de référence, la vitesse finale d'approche de la navette devient importante (moins importante tout de même que dans le cas où l'on augmente la portance) et une température trop importante conduisant à une destruction en vol de la navette. En augmentant la surface de référence, on observe par des simulations un rebondissement sur la Terre malgré les précautions prises pour la programmation. Notre seule observation viable dans le présent cas est de prendre en compte la température maximale de la navette. La seule explication physique de ces phénomènes serait de considérer l'échauffement global de la navette. En effet, sa surface augmente donc la température globale augmente mais il en est de même pour le refroidissement de la navette.

2.1.3 Le repère

On donne un modèle général tenant compte de la rotation (uniforme) de la Terre autour de l'axe $K = NS$, à vitesse angulaire de module Ω . On note $E = (e_1, e_2, e_3)$ un repère galiléen dont l'origine est le centre O de la Terre, $R_1 = (I, J, K)$ un repère d'origine O en rotation à la vitesse Ω autour de l'axe K , et I l'intersection avec le méridien de Greenwich. Soit R le rayon de la Terre et G le centre de masse de la navette. On note $\hat{R}_1 = (e_r, e_l, e_L)$ le repère associé aux coordonnées sphériques de $G = (r, l, L)$, $r \geq R$ étant la distance OG , l la longitude et L la latitude, voir Fig (2.2).

Le système de coordonnées sphériques présente une singularité au pôle Nord et au pôle Sud. Pour écrire la dynamique sous forme plus simple on introduit le repère mobile $R_2 = (i, j, k)$ dont l'origine est G . La direction de la vitesse est paramétrisée dans le repère $\hat{R}_1 = (e_r, e_l, e_L)$ par deux angles, voir Fig (2.2):

- la pente γ aussi appelée angle de vol, représente l'angle entre le plan horizontal et un plan contenant le vecteur vitesse.
- l'azimut χ est l'angle entre la projection de v dans un plan horizontal et le vecteur e_L .

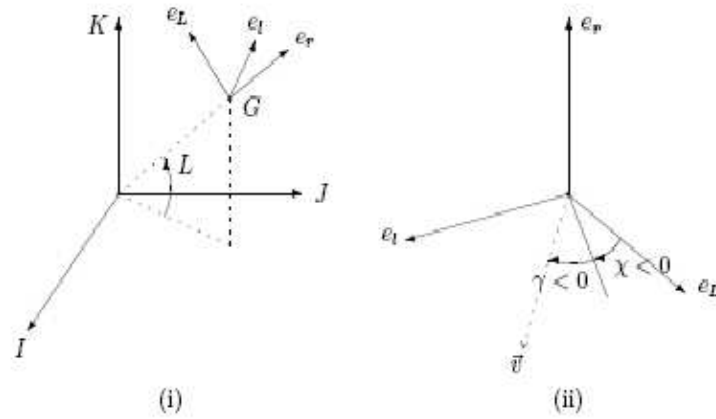


FIG. 2.2 – *Le repère.*

2.1.4 Les forces

Pour modéliser le problème, on utilise les lois de la mécanique classique, un modèle de densité atmosphérique, un modèle pour les forces s'exerçant sur la navette, la force gravitationnelle, la force aérodynamique qui se décompose en une composante dite de traînée et une composante dite de portance. Le système est mono-entrée et le contrôle est la gîte cinématique, voir Fig (2.3).

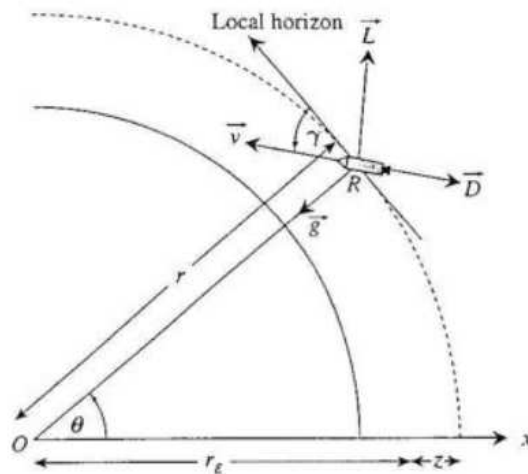


FIG. 2.3 – *Les forces agissant sur la navette.*

- **Force de gravité:** elle s'écrit :

$$\vec{P} = -mg(i \sin \gamma + \cos \gamma)$$

où $g = g_0/r^2$.

- **Force aérodynamique:** la force fluide due à l'atmosphère est une force \vec{F} qui se décompose en :

- une composante dite de **traînée** opposée à la vitesse, de la forme :

$$\vec{D} = \left(\frac{1}{2}\rho SC_D v^2\right)i$$

- une force dite de **portance** perpendiculaire à \vec{v} , donnée par :

$$\vec{L} = \frac{1}{2}\rho SC_L v^2(j \cos \mu + k \sin \mu)$$

où μ est l'angle de gîte, $\rho = \rho(r) = \rho_0 \exp(-\frac{1}{h_s}(r - r_T))$ est la densité de l'atmosphère, C_D , C_L sont respectivement les coefficients de traînée et de portance et S la surface de référence de la navette.

2.1.5 Les équations du système [13]:

L'arc atmosphérique est décrit par le système suivant :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= v \sin \gamma \\ \frac{dv}{dt} &= -g \sin \gamma - \frac{1}{2}\rho \frac{SC_D}{m} v^2 + \Omega_2 r \cos L (\sin \gamma \cos L - \sin L \cos \chi) \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \cos \gamma \left(-\frac{g}{v} + \frac{v}{r}\right) + \frac{1}{2}\rho \frac{SC_L}{m} v \cos \mu + 2\Omega \cos L \sin \chi \\ &+ \Omega^2 \frac{r}{v} L (\cos \gamma \cos L + \sin \gamma \sin L \cos \chi) \\ \frac{dL}{dt} &= \frac{v}{r} \cos \gamma \cos \chi \\ \frac{dl}{dt} &= -\frac{v}{r} \frac{\cos \gamma \sin \chi}{\cos L} \\ \frac{d\chi}{dt} &= \frac{1}{2}\rho \frac{SC_L}{m} \frac{v}{\cos \gamma} \sin \mu + \frac{v}{r} \cos \gamma \tan L \sin \chi + 2\Omega (\sin L - \tan \gamma \cos L \cos \chi) \\ &+ \Omega^2 \frac{r}{v} \frac{\sin L \cos L \sin \chi}{\cos \gamma}. \end{aligned}$$

Où l'état est $q = (r, v, \gamma, l, L, \chi)$ et le contrôle est l'angle de gîte μ .

Dans la suite on pose $r = r_T + h$, où r_T est le rayon de la Terre, et h est l'altitude de la navette.

2.1.6 Les contraintes sur l'état

La navette est, au cours de la phase de rentrée atmosphérique, soumise à trois contraintes :

- Contrainte sur le flux thermique

$$\varphi = C_q \sqrt{\rho} v^3 \leq \varphi^{max} = 717300 \text{ W.m}^{-2} \quad (2.1)$$

où $C_q = 1.705 \cdot 10^{-4} S.I.$

- Contrainte sur l'accélération normale

$$\gamma_n = \frac{S}{2m} \rho v^2 C_q \sqrt{1 + \left(\frac{C_L}{C_D}\right)^2} \leq \gamma_n^{max} = 29.34 \text{ m.s}^{-2}. \quad (2.2)$$

- Contrainte sur la pression dynamique

$$P = \frac{1}{2} \rho v^2 \leq P^{max} = 25000 \text{ kPa}. \quad (2.3)$$

2.1.7 Le coût

Concernant le critère d'optimisation, plusieurs choix sont possibles et les critères à prendre en compte sont le facteur d'usure lié à l'intégrale du flux thermique et le confort de vol lié à l'intégrale de l'accélération normale. Dans notre problème de contrôle optimal, on ne considérera que la minimisation du flux thermique total.

$$C(\mu) = \int_0^T C_q \sqrt{\rho} v^3 dt. \quad (2.4)$$

Le temps final T étant fixé.

2.2 Problème du contrôle optimal de la navette spatiale

Le problème est d'amener l'engin spatial d'une variété initiale M_0 à une variété finale M_1 , où le temps terminal T est fixé, et les conditions aux limites sont données dans la table suivante:

	Conditions initiales	Conditions finales
altitude (h)	119.82 km	15 km
vitesse (v)	$7404.95m.s^{-1}$	$445m.s^{-1}$
angle de vol (γ)	-1.84 deg	-22.9 deg
latitude (L)	0	10.99 deg
longitude (l)	libre ou fixée à 116.59 deg	166.48 deg
azimut(χ)	libre	libre

TAB. 2.1 – Conditions aux limites

2.3 Le problème sans contrainte

Remarquons que le système décrivant l'arc atmosphérique est de la forme

$$\dot{q} = X(q) + u_1 Y_1(q) + u_2 Y_2(q) \quad (2.5)$$

avec $u_1 = \cos \mu$, $u_2 = \sin \mu$ et $q = (r, v, \gamma, L, l, \chi)$. Posons $q_1 = (r; v; \gamma)$ et $q_2 = (L; l; \chi)$. Alors on peut décomposer le système (2.5) en deux sous systèmes, le premier sous-système représentant le mouvement longitudinal de la navette, s'écrit:

$$\dot{q}_1 = f_1(q_1, u_1) + O(\Omega)$$

avec

$$\begin{aligned} \dot{r} &= v \sin \gamma. \\ \dot{v} &= -g \sin \gamma - k_p \rho v^2 + o(\Omega). \\ \dot{\gamma} &= \cos \gamma \left(-\frac{g}{v} + \frac{v}{r} \right) + k_p \rho v u_1 + O(\Omega). \end{aligned}$$

et le second sous-système représentant le mouvement latéral, s'écrit:

$$\dot{q}_2 = f_2(q, u_2)$$

avec

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \frac{v}{r} \cos \gamma \cos \chi. \\ \dot{l} &= -\frac{v}{r} \frac{\cos \gamma \sin \chi}{\cos L}. \\ \dot{\chi} &= \frac{k_p \rho v}{\cos \gamma} u_2 + \frac{v}{r} \cos \gamma \tan L \sin \chi + O(\Omega). \end{aligned}$$

où

$$k = \frac{1}{2} \frac{SC_D}{m}, \quad k_p = \frac{1}{2} \frac{SC_L}{m}$$

De plus, pour le contrôle de l'arc atmosphérique, le problème majeur au cours du vol est de respecter la contrainte sur le flux thermique, et ceci requiert une analyse fine du mouvement longitudinal de l'engin.

2.4 Le problème simplifié en dimension trois

La remarque précédente nous amène à construire un modèle simplifié en dimension 3 du problème de rentrée atmosphérique. Cela en négligeant la vitesse de rotation de la planète, ou bien en supposant la force de Coriolis constante.

Dans les coordonnées $q_1 = (r; v; \gamma)$, où le contrôle est $u_1 = \cos \mu$, et où on suppose la force de Coriolis constante, ce modèle simplifié s'écrit:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= v \sin \gamma. \\ \dot{v} &= -g \sin \gamma - k \rho v^2. \\ \dot{\gamma} &= \cos \gamma \left(-\frac{g}{v} + \frac{v}{r} \right) + k_p \rho v u + 2 \Omega. \end{aligned}$$

où le contrôle u_1 vérifie la contrainte $|u_1| \leq 1$.

Par ailleurs on prendra comme coefficients C_D et C_L les modèles simplifiés suivants, en fonction de la vitesse v :

$$C_D(v) = \begin{cases} 0.585 & \text{si } v > 3000 \\ 0.075 + 1.7 \cdot 10^{-4} v & \text{si } 1000 < v \leq 3000, \\ 0.245 & \text{si } v = 1000. \end{cases}$$

$$C_L(v) = \begin{cases} 0.55 & \text{si } v > 3000 \\ 0.1732 + 1.256 \cdot 10^{-4} v & \text{si } v \leq 3000. \end{cases}$$

2.5 Application du principe du maximum au problème de la navette

Notre problème de contrôle est le suivant:

$$\min_u C(u) = \min_u \int_0^T C_q \sqrt{\rho(r)} v^3 dt.$$

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= v \sin(\gamma) \\
\dot{v} &= -g(r) \sin(\gamma) - k \rho(r) v^2 \\
\dot{\gamma} &= \cos(\gamma) \left(-\frac{g(r)}{v} + \frac{v}{r} \right) + k_p \rho(r) v * u + 2\Omega.
\end{aligned}$$

où $x = (r, v, \gamma)$ et $\dot{x}_0 = C_q \sqrt{\rho} v^3$

On cherche à déterminer les trajectoires $x(\cdot)$ vérifiant la dynamique du système et minimisant le coût $C(u)$ tout en respectant les conditions aux limites qui sont données dans TAB (2.1)

La contrainte sur l'état du flux est négligée.

Dans ce cas le Hamiltonien s'écrit:

$$\begin{aligned}
H(t, x, p, p^0, u) &= p^0 C_q \sqrt{\rho} v^3 + p_1 v \sin(\gamma) + p_2 (-g(r) \sin(\gamma) - k \rho(r) v^2) \\
&+ p_3 \left(\cos(\gamma) \left(-\frac{g(r)}{v} + \frac{v}{r} \right) + k_p \rho(r) v \right) u + 2\Omega.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Comme H est une fonction linéaire de u alors la condition de minimisation implique que $u = -\text{Signe}(p_3 k_p \rho(r) v) = C^{te}$ où la fonction $(p_3 k' \rho(r) v)$ est la fonction de commutation.

Comme $u \in [-1, 1]$ alors

$$u(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } (p_3 k' \rho(r) v) > 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

d'où notre contrôle est bang bang.

Notre vecteur adjoint est défini comme suit:

$$\dot{p} = \begin{pmatrix} \dot{p}^0 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial H}{\partial x_0} \\ -\frac{\partial H}{\partial r} \\ -\frac{\partial H}{\partial v} \\ -\frac{\partial H}{\partial \gamma} \end{pmatrix}.$$

Après dérivation on obtient:

$$\begin{aligned}
\dot{p}^0 &= 0 \Rightarrow p^0 = C^{te} = 1 \\
\dot{p}_1 &= p_0 C_q \frac{1}{2} (1/hs) \sqrt{\rho(r)} v^3 - p_2 ((2 g_0/r^3) \sin(\gamma) - k(v) \rho'(r) v^2) \\
&\quad - p_3 (\cos(\gamma) (2 g_0/r^3 v - v/r^2) + k_p(v) \rho'(r) v u). \\
\dot{p}_2 &= -3 p^0 C_q \sqrt{\rho(r)} v^2 - p_1 \sin(\gamma) + p_2 \rho(r) (k'(v) v^2 + 2 v k(v)) \\
&\quad - p_3 (\cos(\gamma) (1/r + g(r)/v^2)/r) - p_3 \rho(r) u (k'_p(v) v + k_p(v)) \\
\dot{p}_3 &= -p_1 v \cos(\gamma) + p_2 g(r) \cos(\gamma) + p_3 \sin(\gamma) (-g(r)/r + v/r).
\end{aligned}$$

A partir des conditions de transversalité du PMP, et étant donné que les conditions initiales et finales des états du système sont fixés, alors les états adjoints sont libres.

2.6 Application de la méthode de tir au problème simplifié

2.6.1 Problème P_0

Notre problème de contrôle initial est:

$$P_0 \left\{ \begin{array}{l}
\min_u C(u) = \min_u \int_0^{1300} C_q \sqrt{\rho(r)} v^3 dt. \\
\dot{r} = v \sin \gamma \\
\dot{v} = -g \sin \gamma - k \rho v^2 \\
\dot{\gamma} = \cos \gamma \left(-\frac{g}{v} + \frac{v}{r} \right) + k_p \rho v u + 2 \Omega. \\
|u(t)| \leq 1 \\
r(0) = r_0; r(1300) = r(t_f) \\
v(0) = v_0; v(1300) = v(t_f) \\
\gamma(0) = \gamma_0; \gamma(1300) = \gamma(t_f).
\end{array} \right.$$

2.6.2 Problème aux deux bouts

le Principe du minimum de Pontryagin nous une condition nécessaire d'optimalité, nous conduit à un problème aux deux bouts (Two Points Boundary Value Problem).

$$(TPBVP_0) \left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = v \sin \gamma \\ \dot{v} = -g \sin \gamma - k \rho v^2 \\ \dot{\gamma} = \cos \gamma \left(-\frac{g}{v} + \frac{v}{r} \right) + k_p \rho v u + 2\Omega. \\ u(t) = -\text{Signe}(p_3 k' \rho(r) v) \\ \dot{p}_1 = p^0 C_q \frac{1}{2} (1/h_s) \sqrt{\rho(r)} v^3 - p_2 ((2 g_0/r^3) \sin(\gamma) - k \rho'(r) v^2) \\ \quad + p_3 (\cos(\gamma) (2 g_0/r^3 v - v/r^2) + k_p \rho'(r) v u). \\ \dot{p}_2 = -3 p^0 C_q \sqrt{\rho(r)} v^2 - p_1 \sin(\gamma) + p_2 \rho(r) (k'(v) v^2 + 2 v k(v)) \\ \quad - p_3 (\cos(\gamma) (1/r + g(r)/v^2)/r) - p_3 \rho(r) u (k'_p(v) v + k'(v)) \\ \dot{p}_3 = -p_1 v \cos(\gamma) + p_2 g(r) \cos(\gamma) + p_3 \sin(\gamma) (-g(r)/r + v/r). \\ r(0) = r_0; r(1300) = r(t_f) \\ v(0) = v_0; v(1300) = v(t_f) \\ \gamma(0) = \gamma_0; \gamma(1300) = \gamma(t_f).. \end{array} \right.$$

On prend $p^0 = +1$.

Résoudre le problème $(TPBVP_0)$ est équivalent à trouver un zéro de la fonction de tir $S_0(z) = 0$ associée au problème original; définie par:

$$S_0(z) = \begin{pmatrix} r(1300; 0, z_1) - r(t_f) \\ v(1300; 0, z_2) - v(t_f) \\ r(1300; 0, z_3) - r(t_f) \end{pmatrix}$$

avec $z=(z_1, z_2, z_3)$, où $r(1300; 0, z_1)$; $v(1300; 0, z_2)$; $r(1300; 0, z_3)$ est la solution du système à valeur initial (problème de Cauchy).

Résoudre le système d'équations différentielles revient à trouver le zéro de la fonction de tir $S_0(z)$ en utilisant la commande `fsolve` sous Matlab.

Chapitre 3

Implémentation sous Matlab

Matlab est un logiciel de calcul numérique produit par MathWorks. Il est disponible sur plusieurs plate formes. C'est un langage simple et très efficace, optimisé pour le traitement des matrices, d'où son nom. Pour le calcul numérique, Matlab est beaucoup plus concis que les "vieux" langages (C, Pascal, Fortran, Basic). Un exemple: plus besoin de programmer des boucles pour modifier un à un les éléments d'une matrice. On peut traiter la matrice comme une simple variable. Matlab contient également une interface graphique puissante, ainsi qu'une grande variété d'algorithmes scientifiques.

3.1 Données numériques des programmes

Données générales

Rayon de la Terre: $r_T = 6378139 \text{ m}$.

Vitesse de rotation de la Terre: $\Omega = 7.292115853608596.10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$.

Modèle de gravité: $g(r) = g_0/r^2$ avec $g_0 = 3.9800047.1014 \text{ m}^3.\text{s}^{-2}$.

Modèle de densité atmosphérique

$$\rho(r) = \rho_0 \exp\left(-\frac{1}{h_s}(r - r_T)\right) \text{ avec } \rho_0 = 1.225 \text{ kg.m}^{-3} \text{ et } h_s = 7143 \text{ m}.$$

Modèle de vitesse du son: $v_{son}(r) = \sum_{i=0}^5 a_i r^i$, avec

$$\begin{aligned} a_0 &= 2.116366606415128.10^{12}, & a_1 &= -1.637974278710277.10^6, \\ a_2 &= 5.070751841994340.10^{-1}, & a_3 &= -7.848681398343154.10^{-8}, \\ a_4 &= 6.074073670669046.10^{-15}, & a_5 &= -1.880235969632294.10^{-22}. \end{aligned}$$

Données sur la navette :

$$\text{Masse: } m = 7169.602 \text{ kg.}$$

$$\text{Surface de référence: } S = 15.05 \text{ m}^2$$

$$\text{Coefficient de traînée: } k = \frac{1}{2} \frac{S C_D}{m}$$

$$\text{Coefficient de portance: } k_p = \frac{1}{2} \frac{S C_D}{m}.$$

Coefficients aérodynamiques:

Table de $C_D(\text{Mach}, \text{incidence})$

	0.00	10.00	15.00	20.00	25.00	30.00	35.00	40.00	45.00	50.00	55.00 deg
0.00	0.231	0.231	0.269	0.326	0.404	0.500	0.613	0.738	0.868	0.994	1.245
2.00	0.231	0.231	0.269	0.326	0.404	0.500	0.613	0.738	0.868	0.994	1.245
2.30	0.199	0.199	0.236	0.292	0.366	0.458	0.566	0.688	0.818	0.948	1.220
2.96	0.159	0.159	0.195	0.248	0.318	0.405	0.509	0.628	0.757	0.892	1.019
3.95	0.133	0.133	0.169	0.220	0.288	0.373	0.475	0.592	0.721	0.857	0.990
4.62	0.125	0.125	0.160	0.211	0.279	0.363	0.465	0.581	0.710	0.846	0.981
10.00	0.105	0.105	0.148	0.200	0.269	0.355	0.458	0.576	0.704	0.838	0.968
20.00	0.101	0.101	0.144	0.205	0.275	0.363	0.467	0.586	0.714	0.846	0.970
30.00	0.101	0.101	0.144	0.208	0.278	0.367	0.472	0.591	0.719	0.849	0.972
50.00	0.101	0.101	0.144	0.208	0.278	0.367	0.472	0.591	0.719	0.849	0.972
Mach											

Table de $C_L(\text{Mach}, \text{incidence})$

	0.00	10.00	15.00	20.00	25.00	30.00	35.00	40.00	45.00	50.00	55.00 deg
0.00	0.000	0.185	0.291	0.394	0.491	0.578	0.649	0.700	0.729	0.734	0.756
2.00	0.000	0.185	0.291	0.394	0.491	0.578	0.649	0.700	0.729	0.734	0.756
2.30	0.000	0.172	0.269	0.363	0.454	0.535	0.604	0.657	0.689	0.698	0.723
2.96	0.000	0.154	0.238	0.322	0.404	0.481	0.549	0.603	0.639	0.655	0.649
3.95	0.000	0.139	0.215	0.292	0.370	0.445	0.513	0.569	0.609	0.628	0.626
4.62	0.000	0.133	0.206	0.281	0.358	0.433	0.502	0.559	0.600	0.620	0.618
10.00	0.000	0.103	0.184	0.259	0.337	0.414	0.487	0.547	0.591	0.612	0.609
20.00	0.000	0.091	0.172	0.257	0.336	0.416	0.490	0.552	0.596	0.616	0.612
30.00	0.000	0.087	0.169	0.258	0.338	0.418	0.493	0.555	0.598	0.619	0.613
50.00	0.000	0.087	0.169	0.258	0.338	0.418	0.493	0.555	0.598	0.619	0.613
Mach											

-

Profil d'incidence imposé:

Si le nombre de Mach est plus grand que 10 alors l'incidence est égale à 40. Si le nombre de Mach est compris entre 2 et 10 alors l'incidence est une fonction linéaire du nombre de Mach, entre les valeurs 12 et 40. Si le nombre de Mach est plus petit que 2 alors l'incidence est égale à 12.

3.2 Implémentation de la méthode de tir pour le modèle simplifié

Résoudre le système d'équations différentielles revient à trouver le zéro de la fonction de tir $S_0(z)$ en utilisant la commande *fsolve* sous Matlab.

L'algorithme d'intégration d'un système différentiel à valeur initial est effectué en utilisant la commande *ode* sous Matlab.

Le programme suivant nous permet d'afficher les solutions du problème.

```
function nav
```

```
% Methode de tir simple, en utilisant fsolve, pour le système de contrôle
%clear all ; clf ; clc ; format long ;
```

```
options=optimset('Display','iter','LargeScale','on');
[z,FVAL,EXITFLAG]=fsolve(@S0,[0.99;0.99 ;0.9999],options);
```

```
EXITFLAG % 1 si la methode converge, -1 sinon
```

```
% Trace de la trajectoire optimale
```

```
options = odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9) ;
```

```
[t,y]=ode45(@sys,[0,1300],[0.64979590000E+07;7404.95;-0.32114058733E-01;z(1);z(2);z(3)],
```

```
subplot(331) ; plot(t,y(:,1)) ; axis square ; title('altitude');
```

```
subplot(332) ; plot(t,y(:,2)) ; axis square ; title('vitesse') ;
```

```
subplot(333) ; plot(t,y(:,3)) ; axis square ;title('angle de vol);
```

```
subplot(334) ; plot(t,y(:,4)) ; axis square ; title('p1') ;
```

```
subplot(335) ; plot(t,y(:,5)) ; axis square ; title('p2') ;
```

```
subplot(336) ; plot(t,y(:,6)) ; axis square ; title('p3') ;
```

```
v=-sign(y(6)*coefk(y)*rho(y)*y(2));
```

```
subplot(338) ; plot(t,v) ; axis square ; title('Controle') ;
```

```
%La fonction de tir.
```

```
function Xzero=S0(z)
```

```
% Definition de la fonction dont on cherche un zero.
```

```
options = odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9) ;
```

```
[t,y]=ode113(@sys,[0;1300], ...
```

```
[0.64979590000E+07;7404.95;-0.32114058733E-01;z(1);z(2);z(3)],options);
```

```
global rt ;rt=6378139;
```

```

Xzero =[ y(end,1)-15000-rt
          y(end,2)-445
          y(end,3)+0.4 ];
%Le système dynamique de contrôle.
function ydot=sys(t,y)
    global omega g0 rt cq hs;
omega=7.292115853608596e-005; g0=39800047e7; rt=6378139; hs=7143;
cq=1.705e-4;

    u=-sign(y(6)*coefkp(y)*rho(y)*y(2))

ydot = [ y(2)* sin(y(3))
         -g(y)*sin(y(3))-coefk(y)*rho(y)*y(2)^2
         cos(y(3))*(-g(y)/y(2)+y(2)/y(1))+2*omega+coefkp(y)*rho(y)*y(2)*u
         cq*0.5*(1/hs)*sqrt(rho(y))*y(2)^3-2*y(5)*g0*sin(y(3))/y(1)^3 ...
         -y(5)*(1/hs)*coefk(y)*rho(y)*y(2)^2 -y(6)*cos(y(3))*(2*g0/(y(2)*y(1)^3) ...
         -y(2)/y(1)^2)+y(6)*(1/hs)*coefkp(y)*rho(y)*y(2)*u
         -3*cq*sqrt(rho(y))*y(2)^2-y(4)*sin(y(3))+2*y(5)*coefk(y)*rho(y)*y(2) ...
         +y(5)*coefk_1(y)*rho(y)*y(2)^2-y(6)*cos(y(3))*(1/y(1)+g(y)/y(2)^2) ...
         -y(6)*rho(y)*u*(coefkp_1(y)*y(2)+coefkp(y))
         -y(4)*y(2)*cos(y(3))+y(5)*g(y)*cos(y(3))+y(6)*sin(y(3))*(-g(y)/y(2)+y(2)/y(1))];

function denatm=rho(y)
    global hs rt;
    denatm =1.225*exp(-1/hs.*(y(1)-rt));

function ge=g(y) global g0;
    ge=g0./y(1).^2;

function k=coefk(y)
    k=0.5*15.05*CD(y)/7169.602;

function kp=coefkp(y)
    kp=0.5*15.05*CL(y)/7169.602;

```

```
function cd=CD(y)
    if y(2)<=1000
        cd=0.245;
    elseif y(2) > 3000
        cd=0.585;
    else cd= 0.075+1.7e-4*y(2);
    end
```

```
function cl=CL(y)
    if y(2) <= 3000
        cl=0.1732 + 1.256e-4*y(2);
    else cl=0.55;
    end
```

```
function k=coefk_1(y)
    k=0.5*15.05*CD_1(y)/7169.602;
```

```
function cd=CD_1(y)
    if y(2)<=1000
        cd=0;
    elseif y(2) > 3000
        cd=0;
    else cd=1.7e-4;
    end
```

```
function kp=coefkp_1(y)
    kp=0.5*15.05*CL_1(y)/7169.602;
```

```
function cl=CL_1(y)
    if y(2) <= 3000
        cl= 1.256e-4;
    else cl=0;
    end
```

Un handicap majeur de cette méthodes est le besoin d'un point initial correct : comme elles consistent typiquement à appliquer un algorithme de quasi-Newton à la fonction de tir, le rayon de convergence peut être très faible, suivant la régularité du problème (grande sensibilité à l'initialisation). Cependant, il existe des méthodes dites démarches homotopiques pour obtenir un point initial satisfaisant; ce que nous n'avons pas pu traiter dans ce travail. Pour la résolution de ce problème nous avons adopté un autre procédé en tenant compte de certaines spécificités du problème.

3.3 Tracé des solutions en utilisant le temps de commutation

3.3.1 Le problème sans contrainte

La trajectoire optimale représente un arc solution du système d'équations de l'état associé au contrôle $u = -1$ (resp. $u = +1$). Le résultat suivant [13] assure que le contrôle ne possède qu'une seule commutation.

Proposition 3.1. *La trajectoire optimale satisfaisant les conditions initiale et finale (voir tab 2.1) est constituée des deux arcs consécutifs $u = -1$ puis $u = +1$.*

Il s'agit donc de déterminer numériquement le temps de commutation t_c , i.e. le temps auquel le contrôle $u(t)$ passe de la valeur -1 à la valeur $+1$. Pour cela, on peut procéder par dichotomie, de la manière suivante. Étant donné un temps de commutation t_c , on intègre le système en $(r; v; \gamma)$, jusqu'à ce que la vitesse v atteigne la valeur requise, soit 445 m/s . On effectue alors une dichotomie sur t_c de manière à ajuster l'altitude finale $r(t_f) = r_T + h(t_f)$ à la valeur souhaitée, soit 15 km .

Il s'agit d'un cas particulier de méthode de tir, qui se ramène ici pour le problème simplifié à une dichotomie.

Le programme suivant nous permet d'afficher la trajectoire de l'altitude, celle de la vitesse, l'angle de vol, le flux thermique et le contrôle en utilisant ce temps de commutation.

Dichotomie pour trouver t_c avec $v_f = 445$ et $h_f = 15000$.

```
function dichotomie1
parametre;
range=[0; inf];
global tc; tc=-5;
```

```
hf=0;
while hf<15110
global tc;
tc=tc+5
xinit=[r0;v0;gam0;flux0];
options = odeset('events',@event);
[t,x]=ode113(@systdim,range,xinit,options);
hf=x(end,1)-rt;
end

a=tc-10; b=tc; hfm=hf; while abs(hfm-15110)>1
global tc; tc=a;
xinit=[r0;v0;gam0;flux0];
options = odeset('event',@event,'RelTol',1e-6) ;
[t,x]=ode113(@systdim,range,xinit,options); hfa=x(end,1)-rt;

global tc;tc=b;
xinit=[r0;v0;gam0;flux0];
options =odeset('event',@event,'RelTol',1e-6) ;
[t,x]=ode113(@systdim,range,xinit,options);
hfb=x(end,1)-rt;

global tc; tc=(b+a)/2;
xinit=[r0;v0;gam0;flux0];
options =odeset('event',@event,'RelTol',1e-6) ;
[t,x]=ode113(@systdim,range,xinit,options); hfm=x(end,1)-rt;

if (hfa-15110)*(hfm-15110)<=0
b=(b+a)/2
else a=(a+b)/2
end
end
```

Fin de la fonction *dichotomie1*.

Le temps de commutation obtenu après exécution de ce programme est $tc = 252$.

Le programme suivant permet d'afficher les solutions et leurs graphiques correspondant en utilisant ce temps de commutation.

```
function [t,x]=simudim3
    clc;
parametre; range=[0;inf];
    dichotomie1;
global tc;
    tc=252
    xinit=[r0;v0;gam0;flux0];
    options =odeset('event',@event,'RelTol',1e-6) ;
[t,x]=ode113(@systdim,range,xinit,options);

disp(['altitude finale:'num2str(x(length(t),1)-rt)'m'])
disp(['vitesse finale:'num2str(x(length(t),2))'m/s'])
    disp(['gamma finale:'num2str(x(length(t),3)-rt)/pi*180)deg'])
    disp(['flux total:'num2str(x(length(t),4))'UI'])

for i=1:length(t)
    gee=g(x(i,1));densite(i)=rho(x(i,1));
    ck(i)=coefk(x(i,2));
    cd(i)=CD(x(i,2));cl(i)=CL(x(i,2));
end

    flux_thermique=cq.*sqrt(densite(:)).*(x(:,2)).*3;

    figure
subplot(221) ; plot(t,x(:,1)-rt) ; axis square ;title('altitude');
subplot(222) ; plot(t,x(:,2)) ; axis square ; title('vitesse') ;
subplot(223) ; plot(t,x(:,3)) ; axis square ; title('angle devol');
subplot(224); plot(t,flux_thermique); hold on;
plot(t,717300,'red') title('flux thermique')
end
```

Fin de la fonction *simudim3.m*.

Les deux programmes précédent fonctionneront après avoir déclaré sous Matlab les

fonctions suivante:

Stopper l'intégration numérique lorsqu'une fonction calculée le long de la solution s'annule.

```
function[value,isterminal,direction]=events(t,x)
global
omega g0 rt cq hs;
%arret a vitesse 445 ou altitude 10000:
value=(x(2)-445)*(x(1)-rt-10000);
  isterminal=1;
  direction=0;
```

Système simplifié de la navette en $r, v, \gamma, flux$.

```
function dXdt=sysdim(t,X) ;
parametre;
r= X(1); V=X(2);gam=X(3);
dXdt=[v*sin(gam)
      -g(r)*sin(gam)-coefk(v)*rho(r)*v^2
      cos(gam)*(-g(r)/v+v/r)+2*omega+coefkp(v)*rho(r)*v*u(t,r,v,gam)
      cq*sqrt(rho(r))*v^3];
```

Le contrôle en fonction du temps de commutation.

```
function controle=u(t,r,v,gam)
%controle pour le problème sans contrainte:-1 puis +1.
  global tc;
  if t<tc
    controle=-1;
  else
    controle=1;
```

Modèle de densité atmosphérique.

```
function denatm=rho(r) global hs rt;
denatm=1.225*exp(-1/hs.*(r-rt));
```

Modèle de gravité.

```
function ge=g(r)
global g0;
ge=g0./r.^2;
```

Coefficient de traînée.

```
function k=coefk(v)
    k=0.5*15.05*CD(v)/7169.602;
```

Coefficient de portance

```
function kp=coefkp(v)
    kp=0.5*15.05*CL(v)/7169.602;
```

Coefficient de traînée en fonction de la vitesse

```
function cd=CD(v)
    if v > 3000
        cd=0.585;
    elseif v > 1000
        cd= 0.075+1.7e-4*v;
    else cd=0.245;
    end
```

Coefficient de portance en fonction de la vitesse

```
function cl=CL(v)

    if v > 3000
        cl=0.55;
    else cl= 0.1732+1.256e-4*v; end
```

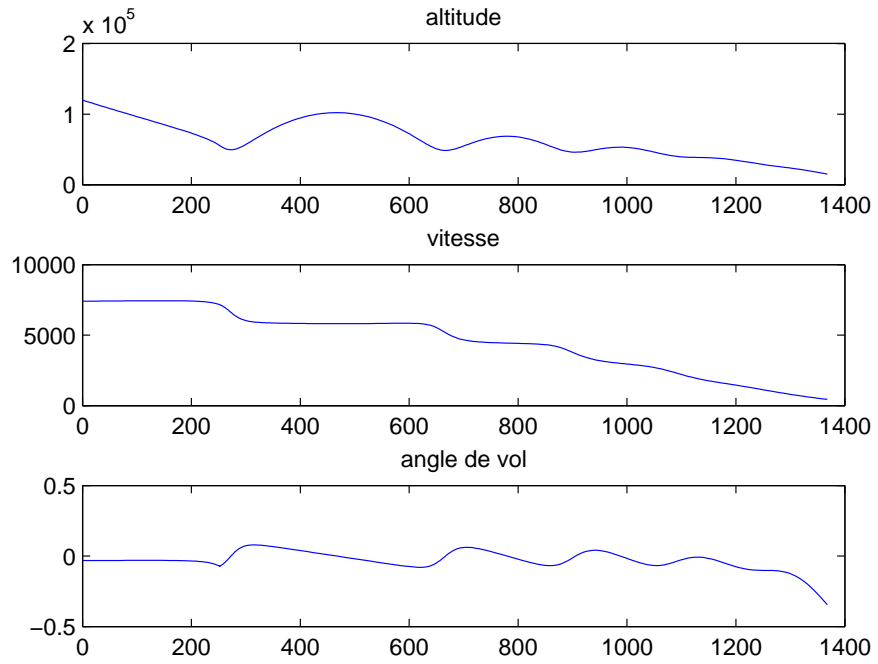



FIG. 3.1 - - Coordonnées d'état pour le problème sans contrainte.

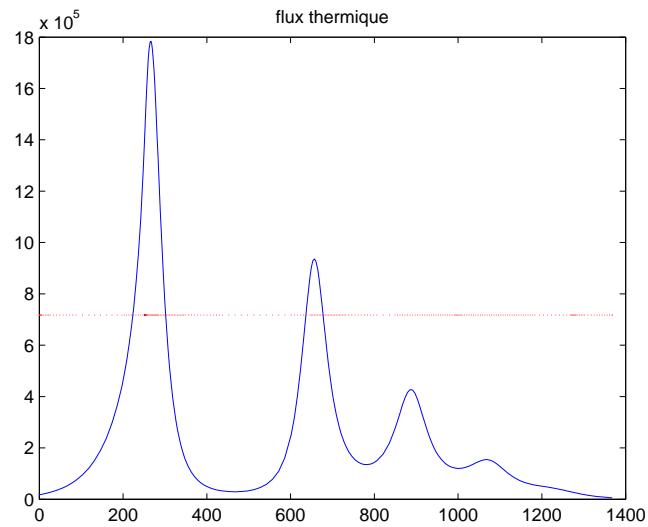
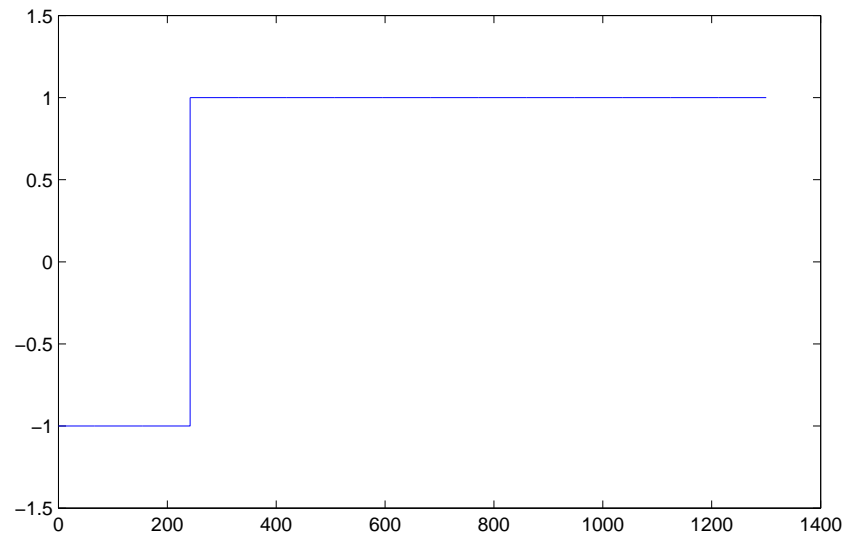


FIG. 3.2 - - Flux.

FIG. 3.3 – - *angle de gîte.*

Les résultats obtenus sont tracés sur les figures (3.1) et (3.2) On se rend compte que cette stratégie ne permet pas de respecter la contrainte sur le flux thermique, et n'est donc pas adaptée au problème. La prise en compte de cette contrainte sur l'état est donc bien indispensable. Cependant, la prise en compte de cette contrainte modifie la structure du problème et son traitement peut s'avérer plus complexe.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons abordé de façon sommaire la théorie du contrôle, qui joue un rôle important dans notre quotidien. Nous avons donné un aperçu sur le principe de maximum de Pontryagin, ainsi que son application (méthode de tir). Nous avons restreint l'étude au domaine de l'aérospatiale où une modélisation d'une navette spatiale en rentrée atmosphérique a été élaborée. Ensuite on est passé à l'application du principe de maximum de Pontryagin au problème simplifié. Au dernier chapitre nous avons implémenté la méthode de tir appliquée au problème de la navette. Cette méthode étant très sensible à l'initialisation. Nous avons opté pour une autre démarche utilisant la dichotomie après avoir étudié la spécificité du problème concernant le temps de commutation du contrôle. Pour finir, les perspectives futures de ce travail incluent l'étude du problème avec des contraintes sur l'état, qui est difficile à traiter par les méthodes indirectes, mais aussi à trouver des procédés pour résoudre le problème d'initialisation de l'algorithme de la méthode de tir, notamment l'utilisation des méthodes homotopiques.

Bibliographie

- [1] E.L. Houghton , P.W. Carpenter. *Aerodynamics for Engineering Students*, Butterworth-Heineman. Sept 1993.
- [2] Bonnard B, Faubourg L, Trelat E. *Mécanique céleste et controle des véhicules spatiaux*, Springer-Verlag Italia. May 5, 2005.
- [3] Alfio Quarteroni.,Riccardo Sacco., Fausto Saleri. *Méthodes Numériques Algorithmes, analyse et applications*, Springer, 2007 .
- [4] Pierre Martinon. *Résolution numérique de problèmes de controle optimal par une méthode homotopique simpliciale*,Thèse de doctora, 2005.
- [5] Emmanuel Trélat. *Contrôle optimal*, Notes de cours Master de Mathématiques,Université d'Orléans, 2007-2008.
- [6] Emmanuel Trélat. *Contrôle optimal: théorie et applications*, livre de contrôle optimal, Université Paris-Sud, Laboratoire Mathématiques AN-EDP, 2005.
- [7] EMMANUEL TRÉLAT, JEAN-MICHEL CORON, *Tout est sous contrôle*, Article,Université Paris-Sud, Laboratoire Mathématiques AN-EDP, Université d'Orléans, Fédération Denis Poisson, Laboratoire MAPMO, Juillet 2007.
- [8] J.L.LIONS, *Sur la théorie du contrôle*, Actes de Congrès International des Mathématiciens, Vancouver, 1974.

-
- [9] NADIA BELKACEME, *Résolution numérique d'un problème de commande optimale d'un véhicule électrique*, Mémoire d'ingénieur, Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou, 2009
- [10] Pierre Martinon R. *Résolution numérique de problèmes de contrôle optimal par une méthode homotopique simpliciale*, Thèse de doctorat, Ecole Doctorale en Informatique et Télécommunications, L'INP De Toulouse, Novembre 2005.
- [11] Abdelkader MERAKEB. *Optimisation multicritères en contrôle optimal: Application au véhicule électrique*, Thèse de doctorat, Recherche opérationnelle et optimisation, U.M.M.T.O, juin 2011.
- [12] Enrique FERNANDEZ-CARA, Enrique ZUAZUA . *Control Theory: History, Mathematical Achievements and Perspectives*, Université de Sevilla et Autonoma Espagne, 2002.
- [13] Bonnard B., Faubourg L., Trélat E. . *Mécanique céleste et contrôle des véhicules spatiaux*, Springer; May 2005 .
- [14] Fauré Alexandre et Dupré de Baubigny Julien. *Reentering the Earth's Atmosphere*, mémoire L3 Physique Fondamentale; avril 2009.
- [15] Donald E.Krik .*Optimal Control Theory*, Dover édition, California 2004.
- [16] B. Bonnard, M. Chyba. *The role of singular trajectories in control theory*, *Math. Monograph*, Springer-Verlag, 2003.