MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE DE MASTER

SPECIALITE : MATHEMATIQUES

OPTION : PROBABILITES-STATISTIQUE

Présenté par

Kahina IMEÇAOUDENE

Thème:

Contribution aux tests statistiques pour la détection de rupture épidémique

Devant le jury d'examen composé de :

M.Boudiba Mohand Arezki ;	M. de conférences A;	UMMTO	Président
M. Hamadouche Djamel;	Professeur	UMMTO	Rapporteur
M. Graiche Farid;	M. de conférence B ;	UMMTO	Examinateur
Mme. Merabet Dalila;	M. de conférence B ;	UMMTO	Examinatrice
M. Taleb Youcef;	Chargé de recherche ;	UMMTO	Examinateur

Soutenu le : 09 /10 /2012

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Mr **Hamadouche Djamel** pour l'honneur qu'il m'a fait en assurant la direction et le suivi scientifique et technique du présent mémoire. Je le remercie pour sa grande contribution à l'aboutissement de ce travail, et pour sa disponibilité.

Je remercie vivement Mr **Boudiba Mohand Arezki** pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Mes remerciements chaleureux s'adressent également à Mme **Merabet Dalila**, Mr **Graiche Farid** et Mr **Taleb Youcef** pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je remercie tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste mémoire.

Table des matières

Introduction générale

L'étude des problèmes de rupture est devenue incontournable pour les statisticiens. En effet, ces problèmes surgissent dans beaucoup de domaines, tels que la médecine, l'économie, la météologie, etc. Pour éviter des résultats érronés, le statisticien est appelé à faire des tests pour détecter un changement (rupture) dans les paramètres de son modèle. Cette rupture peut être simple ou épidémique.

Dans ce travail, on considère des modèles statistiques de rupture épidémique pour certaines caractéristiques (moyenne, écart type,...). Pour un échantillon $(X_1,X_2,...,X_n)$ de variables aléatoires de moyenne μ_i pour $i = 1,..,n$, on dit qu'il y a une présence d'une rupture dans la moyenne de type épidémique aux points $1 < p < q < n$ si:

$$\mu_1 = ... = \mu_p = \mu_{q+1} = ... = \mu_n, \; \mu_{p+1} = ... = \mu_q \quad et \quad \mu_p \neq \mu_{p+1}.$$

Dans le cas où q = n, nous avons un modèle à une seule rupture. Ces modèles ont été intensivement étudiés dans la littérature, pour une revue détaillée on peut voir par exemple Pettitt[24], Chernoff et Zacks [7] qui ont opté pour l'approche bayesienne. Les modèles de rupture épidémique apparaissent en neurophysiologie, économétrie, ... Dans tous ces domaines d'application, se posent certainement de très importants problèmes de test de détection d'une rupture épidémique.
Plusieurs tests sont discutés dans différents articles par exemple Yao [34], Hogan et Siegmund [15], Račkauskas et Suquet [27] et autres.

Certains problèmes statistiques (détection de rupture, tests épidémiques,...) sont résolus en utilisant la convergence faible des processus stochastiques. Ces applications et procédures statistiques sont en effet, basées sur des fonctionnelles (formes linéaires) continues de trajectoires de processus. Les processus étudiés ont souvent la forme

$$\xi_n(t) = f_n(X_1,X_2,...,X_n,t),$$

où $X_1,X_2,...,X_n$ est un échantillon de variables aléatoires réelles et f_n des fonctions déterministes.
La convergence de ces processus qui sont généralement étudiés dans l'espace $D[0,1]$, $C[0,1]$ ou l'espace de Hölder $H_\alpha[0,1]$ implique celle des fonctionnelles continues de trajectoires. Comme exemple de fonctionnelles continues sur l'espace de Hölder $H_\alpha[0,1]$ on peut citer la statistique $UI(n,\alpha)$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ proposée par Račkauskas et Suquet [27] pour un problème

de détection de ruptures épidémiques .

Le travail de ce mémoire porte sur les tests statistiques pour la détection de rupture épidémique suivant deux approches: classique et l'approche hölderienne. Il comporte quatre chapitres.

Dans le chapitre 1, on s'intéresse aux modèles à une seule rupture. Pour cela on a introduit quelques statistiques telles que la statistique du rapport de vraissemblance et la statistique de Pettitt[24]. Ensuite, on a étudié quelques modèles de rupture en adoptant l'approche bayesienne.

Le chapitre 2 traite les différentes statistiques de test classiques pour la détection d'une rupture épidémique dans la moyenne et parmi ces statistiques, on peut citer la statistique de Levin et Kline, la statistique du rapport de vraissemblance, la statistique du semi rapport de vraissemblance, la statistique score et la statistique des résidus récursifs. Dans un premier temps, nous définissons ces statistiques et nous donnons leurs approximations de grandes déviations des niveaux de signification developpées par Hogan et Siegmund(1986), Siegmund(1986,1985a) et Yao (1989,1993). Ensuite, nous présentons les approximations des puissances des tests statistiques précédents développées par Yao.

Dans le chapitre 3, nous abordons les tests statistiques hölderiens pour la détection de rupture épidémique. On rappelle d'abord les statistiques proposées par Račkauskas et Suquet [27] $UI(n,\alpha)$ et $DI(n,\alpha)$ basées sur des sommes partielles de variables aléatoires. Ces deux statistiques ont le même comportement asymptotique mais les DI sont les plus intéressantes par leurs lois limites qui sont connues contrairement à UI. Ensuite, on donne la convergence de $DI(n,\alpha)$ dans le cas d'une suite non stationnaire de variables aléatoires indépendantes puis dans le cas d'une suite de variables aléatoires α-mélangeantes.

Dans le chapitre 4, on donne une application numérique où on vérifie l'exactitude de l'approximation de Yao qui établit les puissances des tests statistiques cités au chapitre 2, ainsi que la consistance de la statistique $DI(n,\alpha)$ proposée par Račkauskas et Suquet [27]. Une comparaison numérique des puissances des différents tests statistiques étudiées aux chapitres 2 et 3 est faite. On termine le travail par une conclusion générale et quelques perspectives .

Quelques résultats de convergence hölderienne de processus stochastiques et des propriétés des processus limites (mouvement brownien et pont brownien) sont présentés en annexe.

Chapitre 1

Tests statistiques pour la détection de rupture

1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous étudions quelques problèmes simples de rupture dans un échantillon de variables aléatoires suivant deux approches: classique et bayesienne.
Dans la première partie, nous citons quelques statistiques de test classiques qui ont été proposées pour la détection d'une rupture dans la moyenne.
Dans la seconde partie, nous étudions quelques problèmes de rupture dans le cas de variables indépendantes ou dépendantes en adoptant l'approche bayesienne.

1.2 Problèmes de rupture (approche classique)

Soit $(X_1,X_2,....,X_n)$ un échantillon de variables aléatoires indépendantes de lois normales de moyenne μ_i et de variance $\sigma_i^2 = 1$, $i = 1,..,n$. On pose $S_i = X_1 + X_2 + ... + X_i$.
On veut tester l'hypothèse nulle

$$H_0 : \mu_i = \mu_1 = ... = \mu_n = \mu,$$

contre l'hypothèse alternative où un point de rupture apparaît

$$H_1 : \exists\ 1 \leq m < n \ tel\ que$$

$$\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_m = \mu \neq \mu_{m+1} = ... = \mu_n = \mu + \delta,$$

où μ, $\delta > 0$.

Dans le but de tester H_0 contre H_1, plusieurs statistiques de test ont été proposées et

parmi ces statistiques, on retrouve celle du rapport de vraisemblance et la statistique score proposée par Pettitt.
Dans ce qui suit, on note par P_0 la mesure de probabilité sous l'hypothèse nulle H_0.

1.2.1 La statistique du rappport de vraisemblance

Pour tester H_0 contre H_1, la racine carrée de logarithme de la statistique du rapport de vraisemblance a été calculée. Alors pour certains $1 \leq n_0 < n_1 \leq n$ on obtient la statistique

$$U_n^{(1)} = \max_{n_0 \leq k \leq n_1} (kS_n/n - S_k)/\sqrt{k(1-k/n)}. \qquad (1.1)$$

Dans ce cas, Siegmund [31] a suggeré une généralisation de la statistique en la maximisant par rapport à $n_0 \leq k \leq n_1$ au lieu de la maximiser par rapport à $1 \leq k \leq n$.

Une approximation de grandes déviations de niveau de signification du test basé sur la statistique $U_n^{(1)}$ a été développée. En effet, si on suppose que b une constante positive, alors quand $n \to \infty$ on a :

$$P_0(U_n^{(1)} \leq b) \sim 1 - \frac{1}{2} b\phi(b) \int_{n_0/n}^{n_1/n} \frac{1}{(1-t)t} \nu(b/\sqrt{nt(1-t)})dt,$$

où ϕ est la fonction de densité d'une loi normale standard et ν est donnée par

$$\nu(x) = 2x^{-1} \exp\left\{-2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \Phi(-\frac{1}{2} x n^{\frac{1}{2}})\right\} \qquad (x > 0), \qquad (1.2)$$

1.2.2 La statistique score

Sans la maximisation, (1.1) est la différence normalisée entre la moyenne des k premières observations et la moyenne globale. Ce test est invariant sous un changement commun de l'endroit de toutes les observations, donc sans perte de généralité on pourrait restreindre la considération aux procédures d'invariants, c'est-à-dire le test ne dépend pas directement des X_i mais des différences ($Y_i = X_i - X_1$) pour i=2,...,n. Pour tester l'hypothèse nulle H_0 contre H_1, avec m fixé et $\delta > 0$, le rapport de vraisemblance des X sous H_0 et H_1 est :

$$\delta(mS_n/n - S_m) - \frac{1}{2} m(1 - \frac{m}{n})\delta^2. \qquad (1.3)$$

En dérivant (1.3) par rapport à δ et en attribuant la valeur 0 pour δ puis en maximisant la vraissemlance par rapport à m, on obtient la statistique score proposée initialement par Pettitt

$$U_n^{(2)} = \max_{1\leq k\leq n}(kS_n/n - S_n).$$

Le niveau de signification du test basé sur $U_n^{(2)}$ est:

$$P_0(U_n^{(2)} \leq b_1) \simeq 1 - \nu(4b_1/n)\exp\{-2b_1^2/n\}.$$

1.3 Problèmes de rupture (approche bayesienne)

Dans cette section, nous nous intéressons à l'étude de quelques problèmes simples de rupture dans un échantillon de variables aléatoires indépendantes ou dépendantes en adoptant l'approche bayesienne.

1.3.1 Problèmes de rupture dans le cas de variables indépendantes

Considérons le modèle suivant:

$$\begin{cases} X_i = \phi_0 + \epsilon_i, & i=1,2...m; \\ X_i = \phi_1 + \epsilon_i, & i=m+1....n. \end{cases} \tag{1.4}$$

Où

ϕ_0 et ϕ_1 des constantes réelles et inconnues, elles représentent respectivement la moyenne des variables X_i avant et après la rupture.

m est un entier qui prend ces valeurs entre 1 et $n-1$, il représente le point de rupture.

Les ϵ_i sont des erreurs aléatoires gaussiennes, indépendantes de moyenne nulle et de variance σ_i^2 i.e $\epsilon_i \sim N(0,\sigma_i^2)$, avec $\sigma_i > 0$.

Supposons que la variance est constante et inconnue, considérons le cas où il y a une rupture dans la moyenne à un instant inconnu .
Soit le modèle (1.4). Supposons que les moyennes ϕ_0 et ϕ_1 sont différentes et inconnues et les erreurs $\epsilon_i \sim N(0,\sigma_i^2)$, i=1,...,n, tel que σ_i sont constantes et inconnues.

En assignant des lois a priori impropres aux paramètres σ_i^2 et (ϕ_0,ϕ_1) et une loi uniforme sur 1, 2,...,n-1 pour le point de rupture m. Le théorème suivant nous détermine la masse de probabilité marginale a posteriori du point de rupture m.

Théorème 1.3.1. ***(L.D.Broemeling et D.Holbert** [16])*
Etant donné le modèle (1.4).
Si les densités a priori des paramètres σ_i^2, (ϕ_0,ϕ_1) et du point de rupture m sont données respectivement par :
$\pi_0(\sigma_i^2) \propto 1/\sigma_i^2$,
$\pi_0(\phi_0,\phi_1) \propto$ *constante sur* $\mathbb{R}^2$,
$\pi_0(m) \propto 1/(n-1)$ *pour m=1,2,...,n-1,*
avec σ_i^2, (ϕ_0,ϕ_1) *et m sont indépendants,*
alors la masse de probabilité a posteriori du point de rupture m est donnée par:

$$\pi_1(m) = \pi(m|X) \propto [m(n-m)]^{-1/2}[S_1^m + S_{m+1}^n]^{(-n-2)/2},$$

où
$S_j^k = \sum_{j=k}^k (X_i - \overline{X}_i^k)^2$ *et* $\overline{X}_i^k = \frac{1}{k-j+1}\sum_{j=k}^k X_i$, *pour k=1,...,n.*

1.3.2 Problèmes de rupture dans le cas de variables dépendantes

Dans cette partie, nous considérons quelques modèles de rupture dont les observations sont dépendantes. Par la méthode bayesienne, nous estimons les différents paramètres de ces modèles. Dans un premier temps, nous étudions le cas où la rupture concerne la moyenne avec une variance constante et inconnue. Ensuite on s'intéresse aux modèles de régression multiples ayant subi un changement.

Considérons le modèle suivant:

$$\begin{cases} X_i = \phi_0 + \epsilon_i, & i\text{=1,2...m;} \\ X_i = \phi_1 + \epsilon_i, & i\text{=m+1....n.} \end{cases} \tag{1.5}$$

Où:
ϕ_0 et ϕ_1 des moyennes réelles et inconnues.
Les ϵ_i , i=1,...,n, suivent un processus autorégressif d'ordre 1.
$\epsilon_i = \rho\epsilon_{i-1} + e_i; e_i \sim N(0,\sigma_i^2)$, i=1,...,n, avec ρ et σ sont inconnus.

Considérons le cas où la rupture est dans la moyenne .
Supposons que ϕ_0 et ϕ_1 du modèle sont différentes et inconnues et les erreurs $\epsilon_i \sim N(0,\sigma_i^2)$, i=1,...,n, tel que σ_i sont constantes et inconnues.

En assignant des lois a priori impropres aux paramètres σ_i^2, (ϕ_0,ϕ_1), ρ et m, le théorème suivant nous détermine la masse de probabilité marginale a posteriori du point de rupture m.

Théorème 1.3.2. ***(L.D.Broemeling et D.Holbert** [16])*
considérons le mdèle(1.5)
Si on suppose que la densité conjointe a priori des paramètres σ_i^2, (ϕ_0,ϕ_1), ρ et m est:

$$\pi_0(m,\sigma_i^2,(\phi_0,\phi_1),\rho) \propto 1/((n-1)\sigma_i^2)$$

Alors la masse de probabilité a posteriori du point de rupture m est donée par:

$$\pi_1(m) = \int_R \frac{1}{\sqrt{\alpha_1 a - \beta_1^2}}.\left[\alpha_3 - \frac{\beta_2^2}{a} - \left((\alpha_2 a + \beta_1\beta_2)/(\sqrt{\alpha_1 a^2 - \beta_1^2 a})\right)^2\right]^{-(n/2-1)} d\rho$$

où:
$a = m(1-\rho)^2 + \rho^2$,
$\alpha_1 = (n-m-1)(1-\rho)^2 + 1$,
$\alpha_2 = (1-\rho)\sum_{i=m+2}^{n}(X_i - \rho X_{i-1}) + (X_{m+1} - \rho X_m)$,
$\alpha_3 = \sum_{i=2}^{n}(X_i)^2$,
$\beta_1 = \rho$,
$\beta_2 = (1-\rho)\sum_{i=2}^{n}(X_i - \rho X_{i-1}) + (X_{m+1} - \rho X_m)$.

Modèle de régression

1^{er} **cas: les erreurs sont indépendantes**
le modèle suivant:

$$\begin{cases} Y_i = X_i\beta_1 + \epsilon_i, & i=1,2...m; \\ Y_i = X_i\beta_2 + \epsilon_i, & i=m+1....n. \end{cases} \tag{1.6}$$

Où:
Les X_i, $i = 1,...,n$ sont des vecteurs à $(1 \times p)$ observations constitués de p variables indépendantes.
Y_i est la ième réalisation de la variable dépendante.
β_1 et β_2 deux vecteurs à $(1 \times p)$, ils représentent les paramètres de la régression, avec $\beta_1 \neq \beta_2$.
Les ϵ_i sont des erreurs du modèle, supposons qu'elles sont indépendantes identiquement distribuées (iid) de lois $N(0,\sigma_i^2)$.

m est le point de rupture.

Le théorème suivant nous donne les densités a posteriori des différents paramètres du modèle(1.6).

Théorème 1.3.3. ***(Chin.Choy et Broemelling [8])***
Etant donné le modèle(1.6).
m,β, σ_i^2 *sont des paramètres inconnus avec* $\beta = (\beta_1',\beta_2')$.
m est uniformément distribué sur l'ensemble$\{$*1,2,...,n-1*$\}$
La loi conjointe a priori de β *et de* $R = 1/\sigma_i^2$ *est :*

$$\pi_0(\beta|R = r) \equiv 2p - N(\beta_\mu,r\tau)$$

tel que $\beta_\mu \in IR^{2p}$ *et* τ *est une matrice* $(2p \times 2p)$ *donnée, symétrique définie positive.*
Une telle loi est appelée une loi normal-Gamma.
R suit une loi Gamma de paramètres a, b $(a > 0,b > 0)$*;*
m est indépendant de β *et de R.*
Alors:
i) La masse de probabilité a postériori du point de rupture m est donnée par:

$$\pi(m|y) \propto \begin{cases} D(m)^{-a^*}|x'(m)x(m) + \tau|^{-1/2}, & m=1,2,...,n-1; \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

Où:
$a^* = a + n/2$.

$$\begin{aligned} D(m)^{-a^*} &= b + 1/2\{y'y + \beta_\mu' r\beta_\mu - \beta'^*(m)[x'(m)x(m) + \tau]\beta^*(m)\}, \\ &= b + 1/2\{[y - x(m)\beta^*(m)]'.y + [\beta_\mu - \beta^*(m)]' r\beta_\mu\}. \end{aligned}$$

ii) La densité de probabilité a postériori du paramètre de régression $\beta = \beta_1',\beta_2'$ *est:*

$$\pi(\beta|y) = \sum_{m=1}^{n-1} \pi(m|y)t[\beta,p,2a^*,\beta^*(m),p(m)],$$

où: $p(m) = a^*/D(m)(x'(m)x(m) + \tau)$,
$t[\beta,p,a^*,\beta^*(m),p(m)]$ *est une densité de student p-dimentionnelle du vecteur aléatoire* β *à* $2a^*$ *degré de liberté, de vecteur de position* $\beta^*(m)$*, et de matrice de précision p(m).*
Si on pose:

$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$, $\beta^*(m) = \begin{pmatrix} \beta_1^* \\ \beta_2^* \end{pmatrix}$, $p(m) = \begin{pmatrix} p_{11}(m) & p_{12}(m) \\ p_{21}(m) & p_{22}(m) \end{pmatrix}$,
où β_i et β_i^*, i=1, 2 sont $p \times 1$ et p_{ij}, i,j = 1, 2 sont des matrices de $p \times p$.
Alors:
iii) La densité de probabilité a postériori de β_1 est:

$$\pi(\beta_1|y) = \sum_{m=1}^{n-1} \pi(m|y) t[\beta,p,a^*,\beta_1^*(m),p_1^*(m)],$$

où $p_1^* = p_{11}(m) - p_{12}(m)p_{22}^{-1}(m)p_{21}(m)$

iv) La densité de probabilité a postériori de β_2 est:

$$\pi(\beta_2|y) = \sum_{m=1}^{n-1} \pi(m|y) t[\beta,p,a^*,\beta_2^*(m),p_2^*(m)],$$

où $p_2^* = p_{22}(m) - p_{21}(m)p_{11}^{-1}(m)p_{12}(m)$

v) La densité de probabilité a postériori de R est:

$$\pi(r|y) = \sum_{m=1}^{n-1} \pi(m|y) g(r,a^*,D(m)),$$

où $g(r,a^*,D(m))$ est la distribution Gamma de paramètres a^* et $D(m)$.

2^{er} **cas: les erreurs sont autocorrélées**

Si on s'intéresse au cas où les erreurs sont autocorrélées. Supposons que les erreurs sont

régies par un processus autorégressif d'ordre un (AR(1)), la masse de probabilité a posteriori du point de rupture m, les densités a posteriori marginales des paramètres β et R sont données par :

Théorème 1.3.4. ***(Salazar et Broemeling [29])*** *Considérons le modèle suivant:*

$$\begin{cases} Y_i = X_i\beta_1 + \mu_i, & \text{i=1,2...m;} \\ Y_i = X_i\beta_2 + \mu_i, & \text{i=m+1....n,} \end{cases}$$

$$\mu_i = \rho\mu_{i-1} + \epsilon_i; \text{i=1....n,}$$

$\epsilon_i \sim N(0,r)$; $0 < r = \sigma^2$
m, β_1, β_2 et $r = \sigma^2$ sont inconnus.

Y_i est la ième réalisation de la variable dépendante.
X_i est la ième réalisation de K variables indépendantes.
$\rho \in \mathbb{R}$, il est muni d'une loi non informative sur $\mathbb{R}$ ($\rho \propto$ constante sur $\mathbb{R}$).
m, est le point de rupture, uniformément distribué sur $I_{n-1} = 1,2,...n-2$.
$\beta = (\beta_1',\beta_2') \in \mathbb{R}^{2K}$ coefficient de régression $\beta_1' \neq \beta_2'$.
La loi conjointe a priori de β et de $R = 1/\sigma_i^2$ est :

$$\pi_0(\beta|R = r) \equiv N(\mu,rP)$$

c'est la loi normale 2K-dimensionnelle.
$\mu = (\mu_1'\mu_2')' \in \mathbb{R}^{2K}$ vecteur moyen.
P est une matrice $(2K \times 2K)$ donnée, symétrique définie positive.
R suit une loi Gamma de paramètres a, b $(a > 0,b > 0)$; $\pi_0(r) \propto r^{a-1}\exp(-br)$.
On suppose de plus m, ρ, β et R sont indépendants .
Alors :
i) La masse de probabilité a postériori du point de rupture m est donnée par:

$$\pi(m|Y) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} |H(\rho)|^{-1} C(\rho)^{-(a+n/2)}, & \text{m=1,2,...n-2;} \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Où
$C(p) = 2b + \mu' P\mu + \sum_{t=1}^{n}(Y_t - \rho Y_t - 1)^2 \tilde{\beta}' H(\rho)\tilde{\beta}$,
$Z_1 = ((X_1 - \rho X_0)',(X_2 - \rho X_1)',....,(X_m - \rho X_{m-1})')$,
$Z_2 = ((X_{m+2} - \rho X_{m+1})',....,(X_n - \rho X_{n-1})')$,
$V_1 = ((Y_1 - \rho Y_0)',(Y_2 - \rho Y_1)',....,(Y_m - \rho Y_{m-1})')$,
$V_2 = ((Y_{m+2} - \rho Y_{m+1})',....,(Y_n - \rho Y_{n-1})')$.

$$H(\rho) = X'X + 1 = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} p_{11} + Z_1'Z_1 + \rho^2 X_m' X_m & p_{12} - \rho^2 X_m' X_m \\ p_{21} - \rho^2 X_{m+1}' X_m & p_{22} + Z_2'Z_2 + \rho^2 X_{m+1}' X_m \end{pmatrix},$$
$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \ \tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_1',\tilde{\beta}_2')'$$

$\tilde{\beta}_1 = H_{11}^{-1}(\rho)(\alpha_1 - H_{11}(\rho)\beta_1 - H_{22}^{-1}(\rho).\alpha_2)$
$\tilde{\beta}_2 = H_{22}^{-1}(\rho)(\alpha_2 - H_{11}(\rho)\beta_1 - H_{21}^{-1}(\rho).\alpha_1)$

$$P\mu + X'y = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z_2' & -\rho X_m' & 0 \\ 0 & X_{m+1}' & Z_2' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} P_{11}.\mu_1 + P_{12}.\mu_2 + Z_1'V_1 - \rho X_m'(Y_{m+1} - \rho Y_m) \\ P_{21}.\mu_1 + P_{22}.\mu_2 + Z_2'V_2 - \rho X_m'(Y_{m+1} - \rho Y_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

ii) La densité a posteriori marginale de β est:

$$\pi(m|Y) \propto \sum_{m=1}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} |H(\rho)|^{-1/2} C(\rho)^{-(a+n/2)} f(\beta) d\rho, \beta \in \mathbb{R}^{2K}.$$

Où $f(\beta)$ est une densité de Student à 2K dimensionnelle et à (2a+n) degré de liberté de vecteur de position $\tilde{\beta}$ et de matrice de précision $(2a+n)H(\rho)/C(\rho)$.
iii) La densité a posteriori marginale de R est:

$$\pi(m|Y) \propto \sum_{m=1}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} r^{a+n/2} \exp(-rC(\rho)/2) |H(\rho)|^{-1/2} d\rho \; r > 0.$$

Remarque 1.3.1. *On peut aussi s'intéresser à l'étude d'une suite de variables aléatoires ayant subit une rupture dans la moyenne sous contamination i.e étudier quelques problèmes de rupture sous contamination.*

Chapitre 2

Tests statistiques pour la détection de rupture épidémique (approche classique)

2.1 Introduction

Soit $(X_1,X_2,....,X_n)$ un échantillon de variables aléatoires indépendantes de lois normales de moyenne μ_i et de variance $\sigma_i^2 = 1$, $i = 1,..,n$.
On veut tester l'hypothèse nulle

$$H_0 : \mu_i = \mu_1 = ... = \mu_n = \mu,$$

contre l'hypothèse alternative

$$H_1 : \exists\ 1 < p < q < n \ tel\ que$$
$$\mu_i = \begin{cases} \mu, & \text{si} \quad i \leq p; \\ \mu + \delta, & \text{si} \quad p < i \leq q; \\ \mu, & \text{si} \quad q < i \leq n. \end{cases}$$

Où μ, $\sigma > 0$.

Ce genre d'alternative qu'on appelle épidémique a été formulée par Levin et Kline [20] et étudiée ensuite par Q.Yao [35], D.Siegmund [30] et autres .
Dans ce chapitre on s'intéresse aux différentes statistiques de test classiques pour la détection de rupture épidémique dans la moyenne et on présente quelques approximations de grandes déviations des niveaux de signification de ces tests statistiques ainsi que les approximations de leurs puissanses.

2.2 Tests statistiques et approximation des niveaux de signification

Soit X_1,X_2,....,X_m une suite de variables aléatoires indépendantes. Supposons que pour $i = 1$,..,n les X_i suivent une loi normale de moynne μ_i et de variance $\sigma_i^2 = 1$.
Soit $S_i = X_1 + X_2 + ... + X_i$, on note par P_0 la mesure de probabilité sous l'hypothèse nulle H_0.
Dans le but de tester l'hypothèse H_0 contre H_1, nous allons présenter cinq statistiques de test. Pour simplifier notre étude, on considère le cas d'une alternative unilatérale pour lequel nous supposons que le signe de δ est connu. L'intérêt d'étudier ce modèle en détail est de mieux comprendre des problèmes plus généraux, tels que l'alternative bilatérale, le cas où la variance des Xi est inconnue ou bien même des modèles de régression. Ensuite, on donne quelques approximations de grandes déviations des niveaux de signification auxquelles on définit la fonction suivante:

$$\nu(x) = 2x^{-1} \exp\left\{-2\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\Phi(-\frac{1}{2}xn^{\frac{1}{2}})\right\} \qquad (x > 0), \tag{2.1}$$

où Φ est la fonction de répartition d'une loi normale standard.

2.2.1 La statistique de Levin et Kline

Lorsque μ et δ sont connus le logarithme de la statistique du rapport de vraisemblance testant l'hypothèse H_0 contre H_1 est proportionnel à

$$\max_{1\leq i<j\leq n}\{S_j - S_i - \mu(j-i) - \frac{1}{2}\delta(j-i)\}. \tag{2.2}$$

Levin et Kline [20] ont considéré le cas où μ et δ sont inconnus et proposent d'utiliser (2.2) en remplaçant μ par son estimateur de maximum de vraisemblance S_n/n sous H_0 et δ par δ_0 la plus petite valeur en moyenne qu'on considère importante pour la détection, alors on obtient la statistique de test

$$Z_n^{(1)} = \max_{1\leq i<j\leq n} Z_1(i,j) = \max_{1\leq i<j\leq n}\left\{S_j - S_i - \frac{j-i}{n}S_n - \frac{1}{2}\delta_0(j-i)\right\}. \tag{2.3}$$

Une approximation de niveau de signification du test statistique basé sur $Z_n^{(1)}$, a été dévelopée par Siegmund et Hogan [17], alors quand $n \to \infty$ et $\zeta = b/n$ fixé on a:

$$P_0(Z_n^{(1)} \leq b) = 1 - [\nu 2(2\zeta + \frac{1}{2}\delta_0)]^2\{2n(2\zeta + \frac{1}{2}\delta_0)(\zeta + \frac{1}{2}\delta_0)\} \exp\{-2n\zeta(\zeta + \frac{1}{2}\delta_0)\} \quad (2.4)$$

2.2.2 La statistique du semi-rapport de vraisemblance

Inspiré par Levin et Kline [22], Siegmund [30] a considéré le rapport de vraisemblance lorsque μ est inconnu avec $\delta = \delta_0$ et suggère la statistique

$$Z_n^{(2)} = \max_{1\leq i<j\leq n} Z_2(i,j) = \max_{1\leq i<j\leq n} \left\{ S_j - S_i - \frac{j-i}{n} S_n - \frac{1}{2}\delta_0(j-i)\left(1 - \frac{j-i}{n}\right)\right\}. \quad (2.5)$$

Une approximation asymptotique de niveau de signification du test statistique basé sur $Z_n^{(2)}$ a été développée par siegmund [30] et s'énonce par le théorème suivant.

Théorème 2.2.1. ***(Siegmund [30])*** *Soient $X_1,X_2,...$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi normale standard, on pose $S_i = X_1 + X_2 + ... + X_i$.*
Supposons que $b \to \infty$, $m \to \infty$ de telle façon que $b/n = \zeta$ soit une constante positive, alors :
i)Pour un $\xi_0 > 4\zeta$ on a

$$P\left[\max_{1\leq i<j\leq n}\left\{S_j - S_i - \frac{j-i}{n}S_m - \xi_0(j-i)\left(1-\frac{j-i}{n}\right)\right\} > b\right]$$

$$\sim \nu^2(2\xi_0)n\xi_0^2\left[\frac{1}{4} - \frac{\zeta}{\xi_0}\right]^{-1/2}\exp(-2n\zeta\xi_0),$$

ii)Pour $0 \leq \xi_0 < 4\zeta$ on a:

$$P\left[\max_{1\leq i<j\leq n}\left\{S_j - S_i - \frac{j-i}{n}S_n - \xi_0(j-i)\left(1-\frac{j-i}{n}\right)\right\} > b\right]$$
$$\sim \nu^2(\xi_0 + 4\zeta)4n(\zeta + \xi_0/4)^{5/2}(\zeta - \xi_0/4)^{-1/2}\exp\left[-2n(\zeta + \xi_0/4)^2\right],$$

où ν est définie par (2.1).

D'après ce théorème, on déduit que

$$P_0(Z_n^{(2)} \leq b)$$
$$\sim \begin{cases} 1 - \frac{1}{4}\nu^2(2\xi_0)n\xi_0^2(\frac{1}{4} - \frac{2\zeta}{\delta_0})^{-1/2}\exp(-n\delta_0\zeta) & (\delta_0 > 8\zeta), \\ \\ 1 - 4\nu^2(\frac{1}{2}\delta_0 + 4\zeta)n(\zeta + \frac{1}{8}\delta_0)^{\frac{5}{2}}(\zeta - \frac{1}{8}\delta_0)^{-\frac{1}{2}}exp[-2n(\zeta + \frac{1}{8}\delta_0)^2] & (0 \leq \delta_0 < 8\zeta). \end{cases} \tag{2.6}$$

Remarque 2.2.1. *Si on compare (2.3) avec (2.5), on remarque que $Z_n^{(1)}$ est plus facile à étudier que $Z_n^{(2)}$. Cependant, si la durée de l'épidemie $q-p$ est proche de n, $Z_n^{(1)}$ ne serait pas aussi performente que $Z_n^{(2)}$.*

2.2.3 La statistique du rapport de vraisemblance

Pour tester H_0 contre H_1 dans le cas où μ et δ sont inconnus, avec $\delta > 0$. La racine carrée de logarithme de la statistique du rapport de vraisemblance a été calculée. Alors pour certains $1 \leq n_0 < n_1 \leq n$, on obtient la statistique

$$Z_n^{(3)} = \max_{n_0 \leq j-i \leq n_1} Z_n^{(3)}(i,j) = \max_{n_0 \leq j-i \leq n_1} \left(S_j - S_i - \frac{j-i}{n}S_n\right) / \sqrt{(j-i)\left(1 - \frac{j-i}{n}\right)}. \tag{2.7}$$

Dans ce cas, Sigmuend [30] a suggeré une géneralisation de la statistique en la maximisant par rapport $n_0 \leq j-i \leq n_1$ au lieu par $1 \leq i < j \leq n$.

Une approximation de grandes déviations de niveau de signification du test statistique basé sur $Z_n^{(3)}$ a été développée ensuite par Siegmund[31] et Yao[34]. En effet, si on suppose que $b = \sqrt{n}$ et c une constante positive, $n_0 = nt_0$ et $n_1 = nt_1$ avec $0 \leq t_0 < t_1 \leq 1$, alors quand $n \to \infty$ on a :

$$P_0(Z_n^{(3)} \leq b) \sim 1 - \frac{1}{4}b^3\phi(b)\int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{(1-t)t^2}\left(\nu[c/t(1-t)^{\frac{1}{2}}]\right)^2 dt, \tag{2.8}$$

où ϕ est la fonction de densité d'une loi normale standard et ν est donnée par (2.1).

2.2.4 La statistique score

Sans la maximisation, (2.7) est la différence normalisée entre la moyenne des $X_{i+1},...,X_j$ et la moyenne globale, c'est-à-dire qu'il est en quelque sorte la statistique de test standard de deux échantillons que la moyenne des $X_{i+1},...,X_j$ est supérieur à la moyenne des $n-(j-i)$

autres observations. La maximisation cherche l'endroit le plus admissible pour localiser i et j de façon que la valeur moyenne de $X_{i+1},...,X_j$ soit la plus grande. Dans le cas d'un test de deux échantillons, le problème est invariant sous un changement commun de l'endroit de toutes les observations, donc sans perte de généralité on pourrait restreindre la considération aux procédures d'invariants, c'est-à-dire le test ne dépend pas directement des X_i mais du maximum invariant ($Y_k = X_k - X_1$). Par le lemme de Neyman-Pearson, le test du rapport de vraisemblance basé sur les $Y_2,...,Y_n$ est le test invariant le plus puissant pour tester l'hypothèse nulle H_0 contre H_1, avec (p,q) fixé et $\delta > 0$ qui donne la statistique de test:

$$\delta\left(S_q - S_p - \frac{q-p}{n}S_n\right) - \frac{1}{2}(q-p)\left(1 - \frac{j-i}{n}\right)\delta^2. \tag{2.9}$$

Cependant, le plus souvent δ est inconnu. En dérivant (2.9) par rapport à δ et attribuant la valeur 0 pour δ, on obtient la statistique du score invariant $S_q - S_p - (q-p)\frac{S_n}{n}$, ce qui conduit au test local invariant le plus puissant dans le sens où elle maximise la pente de la fonction de puissance en $\delta = 0$. Maximiser cette fonction score par rapport à $p < q$ suggère une statistique de test

$$Z_n^{(4)} = \max_{1\leq i<j\leq n} Z_4(i,j) = \max_{1\leq i<j\leq n}\left(S_j - S_i - \frac{j-i}{n}S_n\right). \tag{2.10}$$

Si $j = n$, $Z_n^{(4)}$ devient une méthode de Pettitt, qui a été conçue pour tester les hypothèses d'un point de rupture. D'autre part, si dans (2.3), δ_0 prend la valeur 0, $Z_n^{(1)}$ devient $Z_n^{(4)}$, ce qui signifie que $Z_n^{(4)}$ peut être interprétée comme un cas particulier de la statistique de Levin et Kline quand on est intéressé par la détection de toute rupture dans les moyennes. Par conséquent, le cas particulier de (2.5) avec $\delta_0 = 0$ fournit une approximation asymptotique de la probabilité de $Z_n^{(4)}$.
Évidemment, $Z_n^{(4)}$ semble plus simple que $Z_n^{(1)}$, $Z_n^{(2)}$ et $Z_n^{(3)}$. Toutes autres choses étant égales par ailleurs, ce serait un point en faveur de la statistique $Z_n^{(4)}$. On remarque que lorsque δ_0 est petit, $Z_n^{(2)}$ et $Z_n^{(4)}$ fonctionnent de manière semblable. Toutefois, le comportement de $Z_n^{(3)}$ est très différent. Intuitivement, il semble évident que la principale contribution à la puissance du test basé sur $Z_n^{(3)}$ vient de la probabilité que le processus $S_j - S_i - (j-i)\frac{S_n}{n}$, soit supérieure à la limite de $b[(j-i)\{1-(j-i)/n\}]^{\frac{1}{2}}$ pour certain (i,j) dans un voisinage de $(i,j) = (p,q)$. En effet, on a $Z_n^{(3)}$ a pour région de rejet

$$\begin{aligned} B &= \left[\max_{n_0 \leq j-i \leq n_1} \left(S_j - S_i - \frac{j-i}{n} S_n \right) / \left\{ (j-i) \left(1 - \frac{j-i}{n} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} > b \right] \\ &= \left[\max_{n_0 \leq j-i \leq n_1} \left(S_j - S_i - \frac{j-i}{n} S_n \right) > b \left\{ (j-i) \left(1 - \frac{j-i}{n} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned}$$

Supposons que la région de rejet de $Z_n^{(4)}$ est

$$\left[\max_{1 \leq i < j \leq n} \left\{ S_j - S_i - \frac{j-i}{n} S_n \right\} > b_1 \right].$$

Afin que les deux statistiques, $Z_n^{(4)}$ et $Z_n^{(3)}$ aient le même niveau de signification, b_1 doit être inférieure à $b[(j-i)\{1-(j-i)/n\}]^{\frac{1}{2}}$ dans un voisinage de $j-i=n/2$. C'est pourquoi nous attendons à ce que Z_n^4 aura une puissance plus grande que celle du test basé sur $Z_n^{(3)}$ quand $q-p$ est proche de $n/2$, car dans ce cas, le processus est plus susceptible d'aller au-dessus de b_1 qu'au-dessus de $b[(j-i)\{1-(j-i)/n\}]^{\frac{1}{2}}$. L'inverse est vrai lorsque $q-p$ est proche de 0 *ou* n.

2.2.5 La statistique des résidus récursifs

Une statistique spéciale de test intéressante peut être définie par une statistique dite récursive, qui a été proposée initialement par Brown et al [5] pour tester un changement de point dans un modèle linéaire.
Considérons les résidus standarisés des X_k de la valeur moyenne:

$$\bar{X}_{k-1} = (X_1 + ... + X_{k-1})/(k-1),$$

Soit

$$W_k = \{(k-1)/k\}^{\frac{1}{2}} (X_k - \bar{X}_{k-1}) \qquad (k = 2,....,n).$$

Nous formons la somme cumulée $\tilde{S}_k = W_2 + ... + W_k$ et on définit la statistique de test

$$Z_n^{(5)} = \max_{n_0 \leq j-i \leq n} Z_n^{(5)}(i,j) = \max_{n_0 \leq j-i \leq n} (\tilde{S}_j - \tilde{S}_i)/\sqrt{(j-i)}. \tag{2.11}$$

Sous H_0, les résidus récursifs $W_2,...,W_k$ sont des variables indépendantes de lois normales

standard.
Une Approximation de grandes déviation de niveau de signification du test basé sur $Z_n^{(5)}$ a été développée dans Yao [35], elle est donnée par:

$$P\{Z_n^{(5)} \leq b\} \sim \Phi(b) + \frac{1}{2}b^3\phi(b)\int_{n^{-\frac{1}{2}}b}^{n_0^{-\frac{1}{2}}b} x^{-1}\left(\frac{nx^2}{b^2} - 1\right)\nu^2(x)dx. \tag{2.12}$$

Remarque 2.2.2. *Si les variables $X_1,....,X_n$ ont une variance constante σ^2 inconnue, il a été demontré que la statistique du rapport de vraisemblance testant H_0 contre H_1, peut être considéré comme $Z_n^{(3)}/\hat{\sigma}^2$, où $\hat{\sigma}^2$ est l'estimateur de maximum de vraisemblance de σ^2 sous H_0.*
Yao [36] a présenté une approximation de grandes déviations pour son niveau de signification et il a montré que des modifications similaires peuvent également être établies pour les autres statistiques.

Remarque 2.2.3. *Pour l'hypothèse alternative bilatérale, à savoir ne pas restreindre $\sigma >$ 0 dans H_1, la statistique du rapport de vraisemblance est $Z_n^{(3)}$. Dans le cas où σ^2 est inconnue cette statistique peut être $Z_3/\hat{\sigma}^2$, en utilisant $|S_j - S_i - (j-i)S_n/n|$ à la place de $\{S_j - S_i - (j-i)S_n/n\}$.*
Yao [34] a montré que asymptotiquement le niveau de signification pour une alternative bilatérale est deux fois le niveau correspondant pour une alternative unilatérale et si nous faisons un remplacement similaire dans la statistique score et la statistique des résidus récursifs, une telle relation asymptotique est également admise.

Remarque 2.2.4. *Soit $X_1,..,X_n$ un modèle linéaire de forme*

$$X_k = Y_k'\beta + \varepsilon_k \quad (k = 1,....,n), \tag{2.13}$$

où $Y_1,....,Y_n$, β sont des vecteurs $(n \times 1)$, $Y_1,....,Y_n$ sont donnés, β est inconnu, et $\varepsilon_1,....\varepsilon_m$ sont des variables indépendantes de loi normale $N(0,\sigma^2)$. Pour tester l'alternative qu'il y a un changement δ(vecteur $(n \times 1)$) en β, de p +1 à q, la distribution d'échantillonnage du rapport de vraisemblance est assez compliquée. Pour un modèle spécial en ligne droite de régression, Yao [36] a développé les approximations de grandes déviations pour les niveaux de signification.
D'autre part, en se basant sur les résidus récursifs $W_{m+1} + ... + W_n$, qui ont été définis par Brown et al [5], on peut former la somme cumulée et définir ainsi une statistique de test comme Z_5. Cette appelation des résidus récursifs est dû a, ce que, sous l'hypothèse (2.13),

W_{m+1},...W_n *sont encore des variables aléatoires indépendantes de loi normale* $N(0{,}1)$.

2.3 Approximation des puissances

Dans cette section on s'intéresse aux méthodes d'approximations des puisances développées par Yao [35].
Soient $Z_n^{(1)}$, $Z_n^{(2)}$, $Z_n^{(3)}$ *et* $Z_n^{(4)}$ les statistiques de test définies dans la section précédente. On définit quatre marches aléatoires indépendantes de loi normale par $\{S_m^k, m \leq 1\}$ pour $1 \leq k \leq 4$ tel que $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$ ont une même distribution $N(-u,1)$ tandis que $S_1^{(3)}$, $S_1^{(4)}$ ont la distribution $N(-v,1)$ avec $u > 0$ et $v > 0$. Soit alors

$$M_k = \sup_{n \leq 1} S_m^k \qquad (1 \leq k \leq 4). \tag{2.14}$$

Définissons pour $x > 0$

$$g(x;u,v) = P\{(M_1+M_2 \geq x) \cup (M_3+M_4 \geq x) \cup (M_1+M_3 \geq x) \cup (M_2+M_4 \geq x)\}. \tag{2.15}$$

Dans ce qui suit on suppose que l'hypothèse H_1 est vraie avec (p,q) fixé et $\delta > 0$. On note par $P_{\rho,\delta}$ la mesure de probabilité sous H_1 avec $\rho = q - p$. Le théorème suivant fournit une approximation de grandes déviations des puissances des tests statistiques basés sur $Z_n^{(k)}$ $(1 \leq k \leq 4)$ aux quelles on définit les constantes suivantes :
Pour $\rho_0 = \rho/n$, on a:

$$u_1 = \frac{b}{\rho} \qquad\qquad v_1 = \frac{b}{n-\rho} + \frac{\delta_0}{2(1-\rho_0)},$$

$$\lambda_1 = \delta\{\rho_0(1-\rho_0)\}^{\frac{1}{2}} - \frac{b}{\{\rho(n-\rho)\}^{\frac{1}{2}}} - \frac{\delta_0 \rho^{\frac{1}{2}}}{(n-\rho)^{\frac{1}{2}}};$$

$$u_2 = \frac{b}{\rho} + \frac{1}{2}\delta_0\rho_0, \qquad\qquad v_2 = \frac{b}{n-\rho} + \frac{1}{2}\delta_0(1-\rho_0);$$

$$\lambda_2 = (\delta - \frac{1}{2}\delta_0)\{\rho_0(1-\rho_0)\}^{\frac{1}{2}} - \frac{b}{\{\rho(n-\rho)\}^{\frac{1}{2}}};$$

$$u_3 = v_3 = \frac{1}{2}\frac{b}{\{\rho(1-\rho_0)\}^{\frac{1}{2}}}, \qquad \lambda_1 = \delta\{\rho_0(1-\rho_0)\}^{\frac{1}{2}} - \frac{b}{n^{\frac{1}{2}}};$$

$$u_4 = \frac{b}{\rho}, v_4 = \frac{b}{n-\rho}, \qquad \lambda_4 = \delta\{\rho_0(1-\rho_0)\}^{\frac{1}{2}} - \frac{b}{\{\rho(n-\rho)\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Théorème 2.3.1. ***(Yao [35])*** *i)Supposons que $b = n\zeta$, $\rho = q - p = n\rho_0$, avec $\zeta > 0$ et $\rho_0 \in (0,1)$. Alors quand $n \to \infty$ pour $k = 1,2,4$ avec $|u_k - v_k| < \delta$,*

$$P_{\rho,\delta}\{Z_n^{(k)} \geq b, Z_n^{(k)}(p,q) < b\} \sim \frac{\phi(n^{\frac{1}{2}}\lambda_k)}{\{\rho_0(1-\rho_0)\}^{\frac{1}{2}}}\int_0^\infty g(x; u_k, v_k)\exp\{-\delta x + (u_k + v_k)x\}dx; \tag{2.16}$$

ii)Supposons que $b = n^{\frac{1}{2}}c$, $n_0 = t_0 n$, $n_1 = n(1-t_0)$ et $\rho = q - p = n\rho_0$, avec $c > 0$, et $0 < t_0 < \rho_0 < 1 - t_0$. Alors quand $n \to \infty$ on a:

$$P_{\rho,\delta}\{Z_n^{(3)} \geq b, Z_n^{(3)}(p,q) < b\} \simeq \frac{\phi(n^{\frac{1}{2}}\lambda_3)}{\{\rho_0(1-\rho_0)\}^{\frac{1}{2}}}\int_0^\infty g(x; u_3, u_3)\exp\{-\delta x + (2u_3)x\}dx. \tag{2.17}$$

D'après le théorème précédent, on a l'approximation suivante:
Pour $1 \leq k \leq 4$;

$$P_{\rho,\delta}\{Z_n^{(k)} \geq b\} \sim \Phi(n^{\frac{1}{2}}\lambda_k) + \frac{\phi(n^{\frac{1}{2}}\lambda_k)}{\{\rho_0(1-\rho_0)\}^{\frac{1}{2}}}\int_0^\infty g(x; u_k, v_k)\exp\{-\delta x + (u_k + v_k)x\}dx; \tag{2.18}$$

En effet on a:

$$\begin{aligned} P_{\rho,\delta}\{Z_n^{(k)} \geq b\} &= P_{\rho,\delta}\{Z_n^{(k)} \geq b, Z_n^{(k)}(p,q) < b\} + P_{\rho,\delta}\{Z_n^{(k)} \geq b, Z_n^{(k)}(p,q) \geq b\}, \\ &= P_{\rho,\delta}\{Z_n^{(k)} \geq b, Z_n^{(k)}(p,q) < b\} + P_{\rho,\delta}\{Z_n^{(k)}(p,q) \geq b\}. \end{aligned}$$

Et d'après le théorème (2.3.1)on a:

$$P_{\rho,\delta}\{Z_n^{(k)} \geq b, Z_n^{(k)}(p,q) < b\} \simeq \frac{\phi(n^{\frac{1}{2}}\lambda_k)}{\{\rho_0(1-\rho_0)\}^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty g(x;u_k,u_k)\exp\{-\delta x + (u_k+v_k)x\}dx;$$

et en plus pour $1 \leq k \leq 4$ on a:

$$\begin{aligned} P_{\rho,\delta}\{Z_n^{(k)}(p,q) \geq b\} &= P_{\rho,\delta}\left\{\frac{[S_n - (S_q - S_p)]/(n-\rho) - (S_q - S_p)/\rho + \delta}{\sqrt{1/\rho + 1/(n-\rho)}} \leq \lambda_k\sqrt{n}\right\} \\ &\sim \Phi(n^{\frac{1}{2}}\lambda_k). \end{aligned}$$

Vu la difficulté du calcul de la probabilité g définie dans (2.15) d'une façon exacte et pour rendre l'expression (2.18) numériquement possible Yao [36] a dû faire plus d'approximations en prenant en considération quelques approximations browniennes, c'est-à-dir de supposer que les M_k définies dans (2.14) sont les maximaux de certains mouvements browniens appropriés.

Le lemme suivant, qui est lié à l'approximation de Cramer pour approximer la probabilité de la ruine d'un processus de risque, semble très utile à l'approximation de la fonction g.

Lemme 2.3.1. ***(Yao [35])*** *Quand $n \to \infty$*

$$P(M_1 \geq x) \sim \nu(2u)\exp(-2ux)$$

oùν est donnée par (2.1), et M_1 est définie dans (2.14).

Similaire à James et al, Yao a supposé que lemme (2.3.1) est valable pour tout $x > 0$, ce qui donne une précision numérique raisonnable bien qu'il ne dispose pas d'une justification mathématique précise. Basé sur ces suppositions, Yao a pu obtenir une expression analytique de la probabilité g qui utilisera ensuite dans 2.18, et aura l'approximation suivante des puissances :
pour $k = 1,..,4$ avec $|u_k - v_k| < \delta$:

$$P_{\rho,\delta}\{Z_n^{(k)} \geq b\} \sim \Phi(n^{\frac{1}{2}}\lambda_k) + \frac{\phi(n^{\frac{1}{2}}\lambda_k)}{\{\rho_0(1-\rho_0)\}^{\frac{1}{2}}} \times \begin{cases} H(u_k,v_k) & (u_k \neq v_k) \\ H(u_k) & (u_k = v_k) \end{cases} \tag{2.19}$$

où pour $x \neq y$

$$
\begin{aligned}
H(x{,}y) \quad &= \quad 2\nu(2x)\nu(2y)^2 \frac{x+y}{(\delta+x+y)}^{2} \\
&+ \quad \nu(2x)\nu(2y)^2 \frac{1+2y^{-1}x/\nu(2y)+2x^{-1}y/\nu(2x)}{\delta+x+y} \\
&+ \quad 2x\left\{\frac{\nu(2x)}{(\delta+x-y)}\right\}^2 + 2y\left\{\frac{\nu(2x)}{(\delta-x+y)}\right\}^2 \\
&- \quad \nu^2(2x)\frac{2\nu(2y)(x+y)/y+2(x-y)^{-1}\nu(2y)y/\nu(2x)-1}{(\delta-x+y)} \\
&- \quad \nu^2(2y)\frac{2\nu(2x)(x+y)/x+2(y-x)^{-1}\nu(2x)x/\nu(2y)-1}{(\delta-x+y)}
\end{aligned}
$$

et

$$
H(x) = \nu^2(2x)\left[\frac{4x\nu^2(2x)}{(\delta+2x)}^{2} + \frac{\nu^2(2x)+4\nu(2x)}{\delta+2x} + \frac{8x}{\delta}^{2} + \frac{4\{1-2\nu(2x)\}}{\delta}\right].
$$

Remarque 2.3.1. *La puissance du test statistique basé sur* $Z_n^{(5)}$ *ne peut-être approximée par la méthode adaptée par Yao.*

Chapitre 3

Tests statistiques pour la détection de rupture épidémique (approche hölderienne)

3.1 Introduction

Soit $(X_1,X_2,....,X_n)$ un échantillon de variables aléatoires de moyenne μ_i pour $i = 1,..,n$. On veut tester l'hypothèse nulle

$$H_0 : \mu_i = \mu_1 = ... = \mu_n,$$

contre l'hypothèse alternative

$$H_1 : \exists\ 1 < p < q < n \ tel\ que$$

$$\mu_1 = ... = \mu_p = \mu_{q+1} = ... = \mu_n \ , \mu_{p+1} = ... = \mu_q \quad et \quad \mu_p \neq \mu_{p+1}.$$

On définit le processus de sommes partielles basé sur les X_i par

$$\xi_n(t) = S_{[nt]} + (nt - [nt])X_{[nt]+1},\ t \in [0,1]. \tag{3.1}$$

$$S(0) = 0, S(t) = \sum_{k \leq t} X_k \ \ et\ t_k = \frac{k}{n}\ 0 \leq k \leq n,$$

Levin et kline [20] ont proposé la statistique

$$Q = \max_{1 \leq i < j \leq n} |S(j) - S(i) - \frac{j-i}{n} S(n)|. \tag{3.2}$$

Pour une fonctionnelle $g(x) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$, on a $Q = g(\xi_n)$.
Donsker et Prohorov ont prouvé que pour une suite de variables aléatoires i.i.d, si la variance σ^2 est finie, alors $\sigma^{-1} n^{-\frac{1}{2}} \xi_n$ converge dans $\mathcal{C}[0,1]$ vers le movement brownien W, et par le théorème de conservation de la convergence en loi par image continue, on aura $g(\sigma^{-1} n^{-\frac{1}{2}} \xi_n)$ converge en loi vers $g(W)$

Comme g est continue sur $C[0,1]$, sous l'hypothèse nulle d'un échantillion i.i.d de variance 1 et d'espérance fixée on a

$$n^{-\frac{1}{2}} Q \xrightarrow{\mathcal{L}} \sup_{0 \leq t \leq 1} |B(t)|.$$

où $B(t) = W(t) - tW(1)$ et le pont brownien correspondant à W (voir Annexe B).

Sous l'hypothèse alternative, on peut utiliser la statistique proposée par Račkauskas et Suquet [27]

$$UI(n,\alpha) = \max_{1 \leq i < j \leq n} \frac{|S(j) - S(i) - S(n)\frac{j-i}{n}|}{[(j - i/n)(1 - (j - i/n))]^{\alpha}}. \tag{3.3}$$

La fonctionnelle corespondante est

$$h(x) = \sup_{0 < |t-s| < 1} \frac{x(t) - x(s)}{|t - s|^{\alpha}}.$$

h n'est pas continue sur $C[0,1]$, mais elle est continue sur l'espace de Banach $(H_{\alpha}^{0}, \|.\|_{\alpha})$.
Lamperti a prouvé que si $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ et $\mathbb{E}|X_1|^p < \infty$, où $p = (\frac{1}{2} - \alpha)^{-1}$, alors $\sigma^{-1} n^{-\frac{1}{2}} \xi_n$ converge dans H_{α}^{0} ce qui nous permet d'avoir la limite de $h(\sigma^{-1} n^{-\frac{1}{2}} \xi_n)$.

Soit D_j l'ensemble des nombres dyadiques sur [0,1] de niveau j:

$$D_0 = \{0,1\},; \quad D_j = \{(2l-1)2^{-j}, 1 \leq l \leq 2^{j-1}\} \; j \geq 1.$$

On note

$$D = \bigcup_{j \geq 0} D_j, \qquad D^* = D \backslash \{0\}$$

Pour $r \in D_j$, $j \geq 0$, $r^- = r - 2^{-j}$ et $r^+ = r + 2^{-j}$. Alors pour toute fonction $x : [0,1] \to \mathbb{R}$, on définit ses coefficients de Schauder $\lambda_r(x)$ par

$$\lambda_r(x) = x(r) - \frac{x(r^+) - x(r^-)}{2}, \, r \in D_j, \, j \geq 1,$$

$\lambda_0(x) = x(0)$ et $\lambda_1(x) = x(1)$.

Soit $DI(n,\alpha)$ la statistique définie par Račkauskas et Suquet [27]

$$DI(n,\alpha) = \max_{1<2^j \leq n} \frac{1}{2^{-j\alpha}} \max_{r \in D_j} \left| S(nr) - \frac{1}{2}S(nr^+) - \frac{1}{2}S(nr^-) \right| \tag{3.4}$$

Ils ont considèré la variable aléatoire

$$DI(\alpha) = \max_{j \geq 1} \frac{1}{2^{-j\alpha}} \max_{r \in D_j} \left| W(r) - \frac{1}{2}W(r^+) - \frac{1}{2}W(r^-) \right| \tag{3.5}$$

Pour une suite de variables aléatoire $(X_i)_{i\geq 1}$, Račkauskas et Suquet [27] ont établit sous

l'hypothèse
$(H_0^{'})$: Les variables aléatoires X_i sont indépendantes de même loi.

Théorème 3.1.1. ***(Račkauskas et Suquet [27]):*** *Sous* $(H_0^{'})$*, on suppose que*

$$P(|X_1| > t) = o(t^{-p}), \, p = \frac{1}{\frac{1}{2} - \alpha}. \tag{3.6}$$

Alors

$$\sigma^{-1} n^{-\frac{1}{2}} DI(n,\alpha) \xrightarrow{\mathcal{L}} DI(n), \qquad quand n \to \infty$$

La consistance de rejeter (H_0') contre (H_1') est donnée par le théorème suivant:

Théorème 3.1.2. ***(Račkauskas et Suquet [27]):*** *Supposons sous* (H_1) *les* X_i *sont indépendantes et* $\sup_{k\geq 1} V(X_k) < +\infty$*. Si*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{h_n}{n^{\frac{1}{2-2\alpha}}} |m_c| = +\infty, \;\; h_n = \frac{l^*}{n}(1 - \frac{l^*}{n}).$$

Alors

$$n^{-1/2} DI(n,\alpha) \xrightarrow{P} +\infty, \, quand \, n \to +\infty.$$

Les statistiques hölderiennes ont pour intérêt de détecter des courtes épidémies. La statistique Q détecte seulement des épidémies de longueur $l^* = q - p$ d'ordre d'au moins $n^{\frac{1}{2}}$ tandis que $UI(n,\alpha)$ détecte des épidémies de longueur l^* d'ordre n^δ, $0 < \delta < \frac{1}{2}$.
$DI(n,\alpha)$ ont le même comportement asymptotique que $UI(n,\alpha)$, mais dans ce chapitre on étudie les statistiques de type DI qui sont plus intéréssantes car leurs lois limites sont connues, et ça dans le cas de variables aléatoires indépendantes non de même loi ou dans le cas de variables aléatoires dépendantes (α-mélangeantes).

3.2 Les statistiques $DI(n,\alpha)$ dans le cas indépendant non stationnaire

3.2.1 Convergence de $DI(n,\alpha)$

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de variance $(\sigma_i^2)_{i\geq 1}$, on note $s_n = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$.
Sous l'hypothèse
(H_0'): Les variables aléatoires X_i sont indépendantes et centrées. On a le résultat suivant:

Théorème 3.2.1. ***(Hamadouche, Graiche et Merabet [13])*** *Sous (H_0), supposons qu'il existe $\gamma > 2$, $m > 0$ et $M > 0$ telles que*

$$m \leq \mathbb{E}|X_j|^2 \text{ et } \mathbb{E}|X_j|^\gamma \leq M < +\infty, \forall j > 1$$

.

Alors pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$ et quand $n \to \infty$ on a:

$$s_n^{-1} DI(n,\alpha) \xrightarrow{\mathcal{L}} DI(\alpha).$$

Preuve. : On note que

$$DI(n,\alpha) = \max_{1<2^j\leq n} \frac{1}{2^{-j\alpha}} \max_{r\in D_j} |\lambda_r(S_n)|, \tag{3.7}$$

où (S_n) est le processus discontinu $(S(nt), 0 \leq\ t \leq 1)$ défini par

$$S(nt) = \sum_{k=1}^{[nt]} X_k,$$

et qu'on peut aussi écrire $S(nt) = \xi_n(t) - (nt - [nt])X_{[nt]+1}$ pour lequel $|\lambda_r(S_n) - \lambda_r(\xi_n)| \leq 2 \max_{1\leq i\leq n} |X_i|$.
Alors pour $r \in D_j$ on a

$$\frac{s_n^{-1}\lambda_r(S_n)}{2^{-j\alpha}} = \frac{s_n^{-1}\lambda_r(\xi_n)}{2^{-j\alpha}} - \frac{s_n^{-1}\lambda_r((nt-[nt])X_{[nt]+1})}{2^{-j\alpha}}$$

En utilisant cette estimation dans (3.7), avec $\lambda_r((nt-[nt])X_{[nt]+1}) = -(\lambda_r(S_n)-\lambda_r(\xi_n))$ on obtient

$$s_n^{-1}DI(n,\alpha) = \max_{1<2^j\leq n} \max_{r\in D_j} \frac{|\lambda_r(s_n^{-1}\xi_n)|}{2^{-j\alpha}} + \frac{n^\alpha}{s_n}(\lambda_r(S_n) - \lambda_r(\xi_n)).$$

ce qui implique pour $g_n(x) = \max_{1<2^j\leq n} \max_{r\in D_j} \frac{|\lambda_r(x)|}{2^{-j\alpha}}$, $x \in H_\alpha^0$:

$$s_n^{-1}DI(n,\alpha) = g_n(s_n^{-1}\xi_n) + Z_n, \tag{3.8}$$

avec

$$|Z_n| \leq \frac{2}{s_n/n^\alpha} \max_{1\leq i\leq n} |X_i|, \tag{3.9}$$

et

$$P(\max_{1\leq i\leq n} |X_i| > A\frac{s_n}{n^\alpha}) \leq \sum_{i=1}^n P(|X_i| > A\frac{s_n}{n^\alpha}).$$

Or

$$P(|X_i| > A\frac{s_n}{n^\alpha}) \leq P(|X_i| > A\frac{s_n}{n^{\frac{1}{2}}})\ \forall\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}\ \forall i \geq 1.$$

De la condition (3.6), on aura la convergence en probabilité de $\max_{1\leq i\leq n} |X_i|/\frac{s_n}{n^\alpha}$ vers 0.
Pour la suite de la preuve, on utilse les résultats suivants:

Lemme 3.2.1. ***(Račkauskas, Suquet [27])****: Soit $(\eta_n)_{n\geq 1}$ une suite tendue de variables aléatoires sur un espace de Banach séparable B et g_n, g des fonctionnelles continues de B dans $\mathbb{R}$. On suppose que g_n converge vers g dans B et $(g_n)_n$ est equicontinue. Alors*

$$g_n(\eta) = g(\eta) + o_P(1)$$

Lemme 3.2.2. ***(Račkauskas, Suquet [27])**: Soit $(B,\|.\|)$ un espace vectoriel normé et q:$B \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle vérifiant*
a-q est sous additive:$q(x+y) \geq q(x)+q(y)$, $x,y \in B$/
b-q est symetrique: $q(-x)=q(x)$, $x \in B$.
c-Pour une certaine constante C, $q(x) \leq C\|x\|$, $x \in B$.
Alors q satisfait la condition de lipschitz:

$$|q(x+y)-q(x)| \leq C\|y\|, \, x,y \in B. \tag{3.10}$$

Et si F est un ensemble de fonctionnelles q vérifiant a,b et c avec la même constante C, alors a,b et c sont aussi vérifiées pour $g(x) = supq(x)$, $q \in F$, qui vérifie alors la condition (3.10).

Les fonctionnelles $q_r(x) = \frac{\lambda_r(x)}{(r-r^-)^\alpha}$ vérifient les hypothèses du lemme(3.2.2) avec la même constante $C = 1$ et de même pour $g_n = \max_{1<2^j \leq n} \max_{r \in D_j} q_r$ et $g(x) = \sup_{j \geq 1} \max_{r \in D_j} q_r(x)$. Avec (3.8), (3.9) et le lemme (3.2.1) on aura

$$s_n^{-1} DI(n,\alpha) = g_n(s_n^{-1}\xi_n) + o_P(1),$$

et par un résultat des théorèmes limites fonctionnels établis dans [14] on aura la convergence de $s_n^{-1}DI(n,\alpha)$ vers $DI(\alpha)$.
□

3.2.2 Consistance de $DI(n,\alpha)$

Soit(H_1') : $X_k = \begin{cases} m_c + X_k', & \text{si} k \in I_n = \{p+1,...,q\}; \\ X_k', & \text{si} k \in I_n^c = \{1,..,n\} \setminus \, I_n, \end{cases}$

où $m_c \neq 0$ st X_k' satisfait (H_0').

La consistance de rejeter (H_0') contre (H_1') pour des grandes valeurs de $DI(n,\alpha)$ est donnée par le théorème suivant:

Théorème 3.2.2. ***(Hamadouche, Graiche et Merabet [13])**: On pose $l^* = q - p$ et on suppose que*

$$\lim_{n\to+\infty} ns_n^{-1}h_n^{1-\alpha}|m_c| = +\infty, \tag{3.11}$$

où $h_n = min\{\frac{l^*}{n},1-\frac{l^*}{n}\}$, *alors sous* (H_1')

$$s_n^{-1}DI(n,\alpha) \xrightarrow{P} +\infty, \text{ quand } n \to +\infty.$$

Preuve.
1er**cas:** $\frac{l^*}{n} \leq \frac{1}{2}(h_n = \frac{l^*}{n})$.
On pose

$$S_n' = \sum_{i=1}^{n} X_i',$$

et on a les cardinaux $a_{n,r} = |I_n \cap]nr^-,nr]|$ et $b_{n,r} = |I_n \cap]nr,nr^+]|$.
Donc on peut écrire

$$\lambda_r(S_n) = \lambda_r(S_n') + \frac{1}{2}(a_{n,r} - b_{n,r})m_c.$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} |\lambda_r(S_n)| &= |\frac{1}{2}(a_{n,r} - b_{n,r})m_c + \lambda_r(S_n')| \\ &\geq \frac{1}{2}|a_{n,r} - b_{n,r}||m_c| - |\lambda_r(S_n')|. \end{aligned}$$

D'après Račkauskas et Suquet [27], on a

$$\max_{1<2^j\leq n}\max_{r\in D_j}\frac{|a_{n,r}-b_{n,r}|}{2^{-j\alpha}} \geq \frac{l^*}{2(4l^*/n)} = \frac{n(l^*/n)}{2^{2\alpha+1}(l^*/n)^\alpha}$$

En utilisant l'inégalité:

$$\max(f-g) \geq \max f - \max g, \ \forall f,g \geq 0;$$

on aura

$$DI(n,\alpha) \geq \frac{n(l^*/n)}{2^{2\alpha+2}(l^*/n)^\alpha}|m_c| - DI'(n,\alpha).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
s_n^{-1}DI(n,\alpha) &\geq s_n^{-1}\frac{n(l^*/n)}{2^{2\alpha+2}(l^*/n)^{\alpha}}|m_c| - s_n^{-1}DI'(n,\alpha),\\
&= \frac{ns_n^{-1}h_n^{1-\alpha}}{2^{2\alpha+2}}|m_c| - s_n^{-1}DI'(n,\alpha).
\end{aligned}$$

2ème cas:$\frac{l^*}{n} \geq \frac{1}{2}(h_n = 1 - \frac{l^*}{n})$.
a)Si $t_p \geq 1 - t_q$ $(t_p \geq (1 - \frac{l^*}{n})/2)$,
Il existe un unique j tel que $0 < 2^{-j-1} < t_p \leq 2^{-j} \leq \frac{1}{2} < t_q$. On pose $r_0 = 2^{-j} \in D_j$, on obtient

$$\begin{aligned}
2\lambda_{r_0}(S_n) &= \sum_{nr_0^- \leq k \leq nr_0} X_k - \sum_{nr \leq k \leq nr_0^+} X_k\\
&= \sum_{nr_0^- \leq k \leq nt_p} X'_k + \sum_{nt_p \leq k \leq nr} (X'_k + m_c) - \sum_{nr_0 \leq k \leq nr_0^+} (X'_k + m_c)\\
&= [(nr_0 - nr_0^-) + (nr_0^- - nt_p) - (nr_0^+) + (nr_0)]m_c + 2\lambda_{r_0}(S'_n)\\
&= (nr_0^- - nt_p)m_c + 2\lambda_{r_0}(S'_n).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
|\lambda_{r_0}(S_n)| &\geq \frac{1}{2}|(nr_0^- - nt_p)||m_c| - |\lambda_{r_0}(S'_n)|\\
&\geq \frac{1}{4}n(1 - \frac{l^*}{n})|m_c| - |\lambda_{r_0}(S'_n)|.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\max_{1<2^j\leq n} 2^{j\alpha} \max_{r\in D_j} |\lambda_r(S_n)| \geq \frac{1}{4}n(1 - \frac{l^*}{n})|m_c| \max_{1<2^j\leq n} 2^{j\alpha} - \max_{1<2^j\leq n} 2^{j\alpha} \max_{r\in D_j} |\lambda_r(S'_n)|,$$

et

$$\begin{aligned}
DI(n,\alpha) &\geq \frac{1}{4}n(1 - \frac{l^*}{n})n^{\alpha}|m_c| - DI'(n,\alpha)\\
&\geq \frac{n}{4}(1 - \frac{l^*}{n})(1 - \frac{l^*}{n})^{\alpha}|m_c| - DI'(n,\alpha).
\end{aligned}$$

Finalement
$$s_n^{-1}DI(n,\alpha) \geq \frac{1}{4}ns_n^{-1}h_n^{1-\alpha}|m_c| - s_n^{-1}DI'(n,\alpha).$$

b)Si $t_p < 1 - t_q \ \ (1 - t_q \geq (1 - \frac{l^*}{n})/2)$,
pour un j fixé par $1 - 2^{-j} \leq 1 - 2^{-j-1}$ et pour un $r_0 = 1 - 2^{-j} \in D_j$ choisi on a

$$\begin{aligned}
2\lambda_{r_0}(S_n) &= \sum_{nr_0^- \leq k \leq nr_0} X_k - \sum_{nr \leq k \leq nr_0^+} X_k \\
&= \sum_{nr_0^- \leq k \leq nr_0} (X'_k + m_c) - \sum_{nr_0 \leq k \leq nt_q} (X'_k + m_c) - \sum_{nt_q \leq k \leq nr_0^+} X'_k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (nr_0 - nr_0^- - nt_q + nr_0) - (nr_0^+) + (nr_0)]m_c + 2\lambda_{r_0}(S'_n) \\
&= n(1 - t_q)m_c + 2\lambda_{r_0}(S'_n).
\end{aligned}$$

D'où
$$\begin{aligned}
|\lambda_{r_0}(S_n)| &\geq \frac{n}{2}(1 - t_q)|m_c| - |\lambda_{r_0}(S'_n)| \\
&\geq \frac{n}{4}(1 - \frac{l^*}{n})|m_c| - |\lambda_{r_0}(S'_n)|.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$s_n^{-1}DI(n,\alpha) \geq \frac{1}{4}ns_n^{-1}h_n^{1-\alpha}|m_c| - s_n^{-1}DI'(n,\alpha).$$

Par le théorème (3.2.1) $s_n^{-1}DI'(n,\alpha)$ est stochastiquemet borné et d'après (3.11), le coefficient de $|m_c|$ tend vers ∞ quand n tend vers ∞.
alors
$$s_n^{-1}DI(n,\alpha) \xrightarrow{P} +\infty, \, quand \; n \to +\infty.$$
$\square$

3.3 Les statistiques $DI(n,\alpha)$ dans le cas dépendant stationnaire (α- mélange)

3.3.1 Convergence de $DI(n,\alpha)$

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires. Sous l'hypothèse
(H'_0): La suite $(X_i)_{i\geq 1}$ est strictement stationnaire, de moyenne 0 et α-mélangente. On a

le résultat suivant:

Théorème 3.3.1. ***(Hamadouche, Graiche et Merabet [13])****: Sous (H_0), supposons qu'il existe $\gamma > 2$, $\epsilon > 0$ tels que*

$$\mathbb{E}|X_1|^{\gamma+\epsilon} < +\infty \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^{\frac{\gamma}{2}-1}(\alpha_n)^{\frac{\epsilon}{\gamma+\epsilon}} < \infty.$$

Alors pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$, et quand $n \to \infty$ on a:

$$\sigma^{-1}n^{-\frac{1}{2}}DI(n,\alpha) \xrightarrow{\pounds} DI(\alpha),$$

où $\sigma^2 = \mathbb{E}(X_1^2) + 2\sum_{j=2}^{\infty} cov(X_1,X_j) < \infty$.

Preuve. :On note que

$$DI(n,\alpha) = \max_{1<2^j\leq n} \frac{1}{2^{-j\alpha}} \max_{r\in D_j} |\lambda_r(S_{n.})| \tag{3.12}$$

où $(S_{n.})$ est le processus discontinu $(S(nt), 0 \leq t \leq 1)$ défini par

$$S(nt) = \sum_{k=1}^{[nt]} X_k.$$

et qu'on peut aussi $S(nt) = \xi_n(t) - +(nt-[nt])X_{[nt]+1}$ pour lequel

$$|\lambda_r(S_{n.}) - \lambda_r(\xi_n)| \leq 2 \max_{1\leq i\leq n} |X_i|.$$

En utilisant cette estimation dans (3.12), on obtient

$$\sigma^{-1}n^{-\frac{1}{2}}DI(n,\alpha) = g_n(\sigma^{-1}n^{-\frac{1}{2}}\xi_n) + Z_n, \tag{3.13}$$

où

$$g_n(x) = \max_{1<2^j\leq n} \max_{r\in D_j} \frac{|\lambda_r(x)|}{2^{-j\alpha}}, \, x \in H_\alpha^0$$

et les Z_i vérifiant

$$|Z_n| \leq \frac{2}{\sigma n^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{n})^{\alpha}} \max_{1\leq i\leq n} |X_i| = \frac{2}{\sigma n^{\frac{1}{2}-\alpha}} \max_{1\leq i\leq n} |X_i|. \tag{3.14}$$

On a

$$P(\frac{2}{\sigma n^{\frac{1}{2}-\alpha}}\max_{1\leq i\leq n}|X_i|>\varepsilon)=P(\max_{1\leq i\leq n}|X_i|>\varepsilon\sigma n^{\frac{1}{2}-\alpha})\leq\sum_{i=1}^{n}P(|X_i|>\varepsilon\sigma n^{\frac{1}{2}-\alpha}).$$

D'ou

$$P(\frac{2}{\sigma n^{\frac{1}{2}-\alpha}}\max_{1\leq i\leq n}|X_i|>\varepsilon)\leq nP(|X_1|>\varepsilon\sigma n^{\frac{1}{2}-\alpha}).$$

On a

$$\forall\, p,\, t^pP(|X_1|>t)\leq t^p\frac{\mathbb{E}|X_1|^{\gamma+\epsilon}}{t^{\gamma+\epsilon}}=t^{p-\gamma-\epsilon}\mathbb{E}|X_1|^{\gamma+\epsilon}.$$

Comme $\mathbb{E}|X_1|^{\gamma+\epsilon}<\infty$, alors pour $p=(\frac{1}{2}-\alpha)^{-1}$, $t^pP(|X_1|>t)$ tend vers 0 pour tout $\alpha<\frac{1}{2}-\frac{1}{\gamma}$. Ce qui revient à dire que $P(|X_1|>t)=o(t^{-p})$. Ainsi on a la convergence en probabilité vers 0 de $\max_{1\leq i\leq n}\frac{|X_i|}{n^{\frac{1}{2}-\alpha}}$.

Les fonctionnelles $q_r(x)=\frac{\lambda_r(x)}{(r-r^-)^\alpha}$ vérifient les hypothèses du lemme(3.2.2) avec la même constante $C=1$ et de même pour $g_n=\max_{1<2^j\leq n}\max_{r\in D_j}q_r$ et $g(x)=\sup_{j\geq 1}\max_{r\in D_j}q_r(x)$. Avec(3.14),(3.15) et le lemme (3.2.1) on aura

$$\sigma^{-1}n^{-\frac{1}{2}}DI(n,\alpha)=g_n(\sigma^{-1}n^{-\frac{1}{2}}\xi_n)+o_P(1),$$

et la convergence de $\sigma^{-1}n^{-\frac{1}{2}}DI(n,\alpha)$ vers $DI(\alpha)$ est donnée par un résultat des théorèmes limites fonctionnels établis dans [12]. $\square$

3.3.2 Consistance de $DI(n,\alpha)$

$$\text{Soit}(H_1'):X_k=\begin{cases} m_c+X_k', & \text{si } k\in I_n=\{p+1,...,q\};\\ X_k', & \text{si } k\in I_n^c=\{1,..,n\}\setminus\ I_n,\end{cases}$$

où $m_c\neq 0$ st X_k' satisfait (H_0').

La consistance de rejeter (H_0') contre (H_1') pour des grandes valeurs de $DI(n,\alpha)$ est donnée par le théorème suivant:

Théorème 3.3.2. ***(Hamadouche, Graiche et Merabet [13])****: On pose $l^*=q-p$ et on suppose que*

$$\lim_{n\to+\infty}n^{\frac{1}{2}}h_n^{1-\alpha}|m_c|=+\infty, \tag{3.15}$$

où $h_n = min\{\frac{l^*}{n}, 1 - \frac{l^*}{n}\}$, *alors sous* (H_1')

$$n^{-\frac{1}{2}} DI(n,\alpha) \xrightarrow{P} +\infty, \textit{ quand } n \to +\infty.$$

Preuve. **1^{er}cas:** $\frac{l^*}{n} \leq \frac{1}{2} (h_n = \frac{l^*}{n})$.

$$DI(n,\alpha) \geq \frac{n(l^*/n)}{2^{2\alpha+2}(l^*/n)^\alpha} |m_c| - DI'(n,\alpha)$$

Par conséquent

$$n^{-\frac{1}{2}} DI(n,\alpha) \geq \frac{n^{\frac{1}{2}} h_n^{1-\alpha}}{2^{2\alpha+2}} |m_c| n^{-\frac{1}{2}} DI'(n,\alpha).$$

$2^{ème}$ cas:$\frac{l^*}{n} \geq \frac{1}{2} (h_n = 1 - \frac{l^*}{n})$.

a)Si $t_p \geq 1 - t_q$ $(t_p \geq (1 - \frac{l^*}{n})/2)$ on a:

$$n^{-\frac{1}{2}} DI(n,\alpha) \geq \frac{1}{4} n^{\frac{1}{2}} h_n^{1-\alpha} |m_c| - n^{-\frac{1}{2}} DI'(n,\alpha).$$

b)Si $t_p < 1 - t_q$ $(1 - t_q \geq (1 - \frac{l^*}{n})/2)$,

$$n^{-\frac{1}{2}} DI(n,\alpha) \geq \frac{1}{4} n^{\frac{1}{2}} h_n^{1-\alpha} |m_c| - n^{-\frac{1}{2}} DI'(n,\alpha).$$

Par le théorème (3.3.1), $n^{-\frac{1}{2}} DI'(n,\alpha)$ est stochastiquemet borné et d'après (3.15), le coéfficient de $|m_c|$ tend vers ∞ quand n tend vers ∞.
alors

$$n^{-\frac{1}{2}} DI(n,\alpha) \xrightarrow{P} +\infty, \textit{ quand } n \to +\infty.$$

□

Chapitre 4

Application numérique pour la détection de rupture épidémique dans la moyenne

4.1 Introduction

Dans le but de vérifier quelques résultas étudiés dans les chapitres précédents, on a consacré ce chapitre pour une application numérique pour la détection de rupture épidémique dans la moyenne. Dans un premier lieu, on vérifie l'exactitude des approximations de Yao qui établit les puissances des tests statistiques $Z_n^{(k)}$. Dans un second lieu, on s'est intéressé à la consistance des statistiques $T_n = \sigma^{-1}n^{-1/2}D(n,a)$ et $n^{-1/2}Q$, et on termine par une comparaison numérique des différents tests statistiques.

4.2 Exactidude des approximations des puissances

Afin de vérifier l'exactidude des approximations des puissances $Z_n^{(1)}$, $Z_n^{(2)}$, $Z_n^{(3)}$ et $Z_n^{(4)}$ établit dans Yao [35], on simule 10000 échantillons de taille n = 60 de loi normale $N(\delta,1)$, ensuite on compare nos résultats avec ceux de Yao obtenus avec l'approximation (2.19) citée dans le chapitre 2.

Le tableau suivant donne les résultats de notre simulation qu'on note par simul, anisi que les résultats de Yao obtenus avec l'approximation (2.19) qui établit les puissances des tests statistiques basés sur $Z_n^{(k)}$, k=1, 2, 3, 4, sous la condition $\delta > |u_k - v_k|$.

δ	q-p	$Z_n^{(1)}$ $\delta_0 = 0.2$ *simul*	(2.19)	$Z_n^{(2)}$ $\delta_0 = 0.2$ *simul*	(2.19)	$Z_n^{(3)}$ $m_0 = 1, m_1 = 59$ *simul*	(2.19)	$Z_n^{(4)}$ *simul*	(2.19)
0.8	10					0.293	0.229		
1.2						0.673	0.595		
1.6		0.945	0.948	0.924	0.919	0.928	0.901	0.902	0.922
0.8	20	0.683	0.694	0.679	0.702	0.530	0.451	0.659	0.718
1.2		0.967	0.952	0.967	0.915	0.914	0.878	0.960	0.961
1.6		0.999	0.998	0.999	0.999	0.996	0.994	0.999	0.999
0.4	30	0.249	0.307	0.266	0.374	0.175	0.124	0.249	0.368
0.8		0.732	0.751	0.763	0.774	0.603	0.518	0.752	0.778
1.6		0.979	0.968	0.981	0.975	0.949	0.922	0.980	0.978
	b	9.24		10.18		3.60		11.66	

Table 4.1 :Exactitude des approximations des puissances

On remarque bien que les résultats obtenus par les approximations (2.19) coinsident avec les valeurs des puissances obtenues par notre simulation.

4.3 Consistance des tests statistiques

Soit $(X_1,X_2,....,X_n)$ un échantillon de variables aléatoires indépendantes de loi normale$N(\delta_i,1)$, $(\delta_i \geq 0)$.
On veut tester l'hypothèse nulle
$H_0 : \delta_1 = ... = \delta_n = 0$,
contre l'hypothèse alternative
$H_1 : \exists\ 1 < p < q < n \ tel\ que$

$\delta_1 = ... = \delta_p = \delta_{q+1} = ... = \delta_n = 0$, $\delta_{p+1} = ... = \delta_q = \delta > 0$.
Si on simule 1000 échantillons de loi normale $N(\delta,1)$ de taille n = 200 sous (H_1), on obtient les valeurs de T_n avec différentes valeurs de a, δ et $l^* = q - p$. La région critique du test est

$$W = \{(x_1,...,x_n)\backslash T_n > c\}.$$

où c est la valeur critique donnée par la table de la loi limite de T_n (Račkauskas et Suquet [28]) au seuil $\alpha = 0.05$.

		$T_n = \sigma^{-1}n^{-1/2}D(n,a)$		
l^*	δ	a=0.1	a=0.3	a=0.4
5	0.5	0.7134	1.0257	1.3701
	1	0.7266	1.0656	1.4237
	1.5	0.7768	1.1387	1.4850
	2	0.8671	1.2376	1.6043
	2.5	0.9444	1.3561	1.7651
	3	1.1500	1.5203	1.9516
10	0.5	0.7373	1.0559	1.4082
	1	0.8366	1.2296	1.5722
	1.5	1.1233	1.4848	1.8858
15	0.5	0.7576	1.0920	1.4194
	1	0.9421	1.3154	1.6315
	1.5	1.2172	1.5920	1.9775
	c	1.12	1.42	1.76

Table 4.2 : Valeurs de T_n sous H_1.

On voit bien que la statistique T_n détecte même des courtes épidémies et lorsque $l^* = q - p$ augmente, elle détecte plus rapidement cette épidémie (δ plus petit).

Comme on a vu le chapitre 3 a pour objectif d'étudier les tests statistiques hölderiens pour la détection de rupture épidémique et on a constaté que la statistique proposée par Račkauskas et Suquet [27] est plus consistante que la statistique de Levin et Kline [20].

Afin de comparer les deux statistiques T_n et $n^{-1/2}Q = Z_n^{(1)}$, on simule 1000 échantillons de taille $n = 60$ de loi normale $N(\delta,1)$. Le tableau suivant donne les valeurs de T_n pour $a = 0.25$ et celles de $n^{-1/2}Q$ de Levin et Kline [20].

q-p	δ	$T_n = \sigma^{-1}n^{-1/2}D(n,a)$	$n^{-1/2}Q$
1	6	1.20	1.35
	7	1.3301	1.4298
	8	1.458	1.5174
2	3	1.210	1.340
	3.5	1.332	1.4162
	4	1.4561	1.439
	4.5	1.5785	1.6008
5	0.5	0.92356	1.1438
	1	0.9923	1.2424
	1.5	1.1314	1.4184
	2	1.3193	1.6147
8	0.5	0.9591	1.1931
	1	1.1206	1.3564
	1.5	1.3511	1.7120
10	0.5	0.9918	1.2154
	1	1.6296	1.5225
	1.5	1.6383	1.9146
20	0.5	1.0569	1.3610
	1	1.5148	1.9770
30	0.5	1.1008	1.4320
	1	1.6406	1.1581
	c	1.32	1.50

Table 4.2 : Comparaison entre T_n et $n^{-1/2}Q$.

On remarque qu'il est plus intéressant d'utiliser la statistique T_n que la statistique $n^{-1/2}Q$ pour de courtes épidémies ($l \leq n^{1/2} \simeq 8$).

4.4 Puissances des tests statistiques

Dans la section précédente, on a comparé la statistique de Račkauskas et Suquet [27] avec la statistique de Levin et Kline [20] selon le critère de consistance. Dans ce qui suit on s'intéressera à la puissance des différents tests étudiés au chapitre 2 et 3.

Afin de comparer les puissances des tests statistiques basés sur T_n et $Z_n^{(k)}$ pour k=1, 2, 3, 4, on simule 10000 échantillons de taille $n = 60$ de loi normale $N(\delta,1)$.
Le tableau suivant donne les valeurs de la puissance du test basé sur T_n pour $a = 0.25 et$

$\alpha = 0.05$ et celles des tests basés sur les statistiques $Z_n^{(1)}$, $Z_n^{(2)}$, $Z_n^{(3)}$et $Z_{(n)}^{(4)}$

δ	q-p	$Z_n^{(1)}$ $\delta_0 = 0.2$	$Z_n^{(2)}$ $\delta_0 = 0.2$	$Z_n^{(3)}$ $m_0 = 1$ $m_1 = 59$	$Z_n^{(4)}$	T_n
0.8	6	0.1716	0.1579	0.1730	0.1542	0.1363
1.2		0.3633	0.3212	0.4184	0.3010	0.2807
1.8		0.6301	0.5744	0.7259	0.5238	0.5168
0.8	10	0.3633	0.3304	0.3025	0.3181	0.2463
1.2		0.7225	0.6734	0.6661	0.6451	0.5188
1.6		0.9506	0.9200	0.9296	0.9052	0.8094
0.8	20	0.6804	0.6828	0.5255	0.6776	0.5244
1.2		0.9647	0.9622	0.9110	0.9195	0.8810
1.6		0.9992	0.9990	0.9978	0.9989	0.9914
0.4	30	0.2458	0.2856	0.1676	0.2801	0.1514
0.8		0.7327	0.7639	0.5960	0.7635	0.5641
1.2		0.9786	0.9832	0.9463	0.9852	0.9339
	0	0.0530	0.0552	0.0494	0.0468	0.0511
-	b	9.24	10.18	3.60	11.66	1.32

Table 4.3 : Comparaison entre T_n et $n^{-1/2}Q$.

On remarque que la statistique de test $Z_n^{(3)}$ est plus puissante pour les petites valeurs de $l^* = q - p$. Autrement on voit bien que les tests statistiques basés sur $Z_n^{(2)}$ *et* $Z_n^{(4)}$ semblent plus puissants lorsque l^* est proche de $\frac{n}{2}$, tandis que la statistique de Levin et Kline $Z_n^{(1)}$ et la statistique de Račkauskas et Suquet T_n ne sont performentes en aucun cas .

On donne ici les programmes utilisés pour simuler sous (H_1) les puissances des tests statistiques $Z_n^{(k)}$ pour $k = 1,2,3,4 =$ et T_n
Ces programmes ont été écrit en langage Matlab sous environnement Windows.

Programme de simulation de la puissance du test statistique basé sur $Z_n^{(1)}$

$n = 60;$
$p = 30;$
$q = 40;$
$delta = 0.8$
$t = 0;$
$b = 9.24;$
$\delta_0 = 0.2;$
$rep = 10000;$
$for\ s = 1 : rep;$
$fori = 1 : p$
$x(i) = randn;$
$for\ i = p + 1 : q$
$x(i) = randn + delta;$
$for\ i = q + 1 : n$
$x(i) = randn;$
end
end
end
x
$S = cumsum(x);$
$for\ i = 2 : n$
$for\ j = 1 : i - 1$
$Q1(i,j) = S(i) - S(j) - ((i - j)/n) * S(n) - ((i - j)/2) * \delta_0;$
end
end
$Q1;$
$Q12 = max(Q1);$
$Q2 = max(Q12);$
$if(Q2 <= b),$
$t = t + 1;$
end
end

$Beta = t/rep;$
$1 - Beta.$

Programme de simulation de la puissance du test statistique basé sur $Z_n^{(2)}$

$n = 60;$
$p = 30;$
$q = 40;$
$delta = 0.8$
$t = 0;$
$b = 9.24;$
$\delta_0 = 0.2;$
$rep = 10000;$
$for\ s = 1 : rep;$
$for\ i = 1 : p$
$x(i) = randn;$
$for\ i = p + 1 : q$
$x(i) = randn + delta;$
$for\ i = q + 1 : n$
$x(i) = randn;$
end
end
end
x
$S = cumsum(x);$
$for\ i = 2 : n$
$for\ j = 1 : i - 1$
$Q1(i,j) = S(i) - S(j) - ((i - j)/n) * S(n) - ((i - j)/2) * \delta_0 * (1 - ((i - j)/n));$
end
end
$Q1;$
$Q12 = max(Q1);$
$Q2 = max(Q12);$
$if(Q2 <= b),$
$t = t + 1;$
end
end
$Beta = t/rep;$

$1 - Beta$

Programme de simulation de la puissance du test statistique basé sur $Z_n^{(3)}$

$n = 60;$
$p = 10;$
$q = 40;$
$delta = 0.8;$
$rep = 10000;$
$t = 0;$
$b = 3.60$
$m_0 = 1;$
$m_1 = 59;$
$for\ s = 1 : rep;$
$for\ i = 1 : p$
$x(i) = randn;$
$for\ i = p + 1 : q$
$x(i) = randn + delta;$
$for\ i = q + 1 : n$
$x(i) = randn;$
end
end
end
x
$S = cumsum(x);$
$for\ i = 2 : m_1$
$for\ j = m_0 : i - 1$
$Q1(i,j) = (S(i) - S(j) - ((i - j)/n) * S(n))/(sqrt((i - j) * (1 - ((i - j)/n))));$
end
end
$Q2 = max(Q1);$
$Q = max(Q2);$
$if(Q2 < b),$
$h = h + 1;$
end
end
$Beta = t/rep;$
$1 - Beta$

programme de simulation de la puissance du test statstique basé sur $Z_n^{(4)}$

$n = 60;$
$p = 15;$
$q = 45;\ delta = 0$
$; rep = 10000;$
$b = 11.66;$
$t = 0;$
$for\ s = 1 : rep;$
$for\ i = 1 : p$
$x(i) = randn;$
$for i = p + 1 : q$
$x(i) = randn + delta;$
$for i = q + 1 : n$
$x(i) = randn;$
end
end
end
x
$S = cumsum(x);$
$for i = 2 : n$
$for j = 1 : i - 1$
$Q1(i,j) = S(i) - S(j) - ((i - j)/n) * S(n);$
end
end
$Q1;$
$Q2 = max(Q1);$
$if(Q2 <= b),$
$t = t + 1;$
end
end
$Beta = t/rep;$
$1 - Beta.$

Programme de simulation de la puissance du test statistique basé sur T_n

$n = 60;$
$a = 0.25;$
$p = 15;$
$q = 45;$
$t = 0;$
$b = 1.32;$
$delta = 0;$
$k = floor(log2(n));$
$rep = 10000;$
$fors = 1 : rep;$
$fori = 1 : p$
$x(i) = randn;$
$fori = p + 1 : q$
$x(i) = randn + delta;$
$fori = q + 1 : n$
$x(i) = randn;$
end
end
end
x
$S = cumsum(x);$
$forj = 2 : k$
$forl = 2 : 2^(j - 1)$
$S1(j,l) = S(floor(n * (((2 * l) - 1)/2^j)));$
$S2(j,l) = S(floor((2 * n * (l - 1))/2^j));$
$S3(j,l) = S(floor((2 * n * (l))/2^j));$
$D1(j,l) = (2^(j * a)) * abs(S1(j,l) - (1/2) * S2(j,l) - (1/2) * S3(j,l));$
end
end
$D1;$
$D2 = max(D1);$
$D3 = max(D2);$
$forj = 1 : k$
$S11(j) = S(floor(n/2^j));$
$S12(j) = S(floor((2 * n)/2^j));$
$D4(j) = (2^(j * a)) * abs(S11(j) - (1/2) * S12(j));$

end
$D4$;
$D5 = max(D4)$;
$DY = max(D3,D5)$;
DY;
$T_n = n^(- 1/2) * DY$;
$if(T_n <= b)$,
$t = t + 1$;
end
end
$Beta = t/rep$;
$1 - Beta$.

Conclusion générale

Le travail de ce mémoire a porté sur l'étude des tests statistiques pour la détection d'une rupture épidémique.
Dans le premier chapitre, nous avons introduit les tests statistiques classiques qui nous permettent de détecter une rupture dans les moyennes d'une suite de variables aléatoires. Ensuite nous citons quelques modèles simples de rupture en adaptant l'approche bayessienne.
En chapitre 2, nous avons étudié les différents tests statistiques classiques pour la détection de rupture épidémique dans la moyenne et donné des approximations des niveaux de signification ainsi que les puissance de ces tests. Dans le chapitre 3, on s'est interessé aux tests statistiques hölderiens, on a rappelé d'abord les statistiques proposées par Račkauskas et Suquet ensuite on a donné la convergence de DI dans le cas d'une suite non stationnaire de variables aléatoires indépendantes puis dans le cas d'une suite de variables aléatoires α-mélangeantes.
Dans le chapitre 4, on a donné une application numérique pour verifier d'une part l'exactidude des approximations de Yao qui établie les puissances des tests statistiques et d'autre part on s'est intéressé à la consisistance de DI. Une comparaison numérique des puissances des différents tests statistiques etudiées dans les chapitres 2 et 3 a été contribuée a la fin du chapitre.

Comme perspectives de ce travail, on peut essayer de proposer d'autres statistiques de test pour la détection de rupture épidémique soit dans la moyenne, la variance ou dans d'autres paramètres.

Des applications numériques sur des données réelles peuvent tre envisagées.

Annexe A

Convergence hölderienne de processus stochastiques

A.1 Les espaces de Banach $H_\alpha[0,1]$ et $H_\alpha^0[0,1]$

Définition A.1. *On appelle espace de Hölder d'ordre* α ($0 < \alpha \leq 1$)*, noté* $H_\alpha[0,1]$*, l'espace des fonctions définies sur* $[0,1]$*, nulles en zéro telles que*

$$\|f\|_\alpha = \sup_{0<|t-s|\leq 1} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha} < \infty.$$

On appelle module de continuité hölderien de f *la quantité*

$$w_\alpha(f,\delta) = \sup_{0<|t-s|\leq \delta} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha}.$$

$H_\alpha[0,1]$ n'est pas séparable, à cause de ce désavantage on introduit un sous espace fermé séparable $H_\alpha^0[0,1]$, défini par:

$$f \in H_\alpha^0[0,1] \Leftrightarrow f \in H_\alpha[0,1] \quad et \quad \lim_{\delta\to 0} w_\alpha(f,\delta) = 0$$

Dans ce qui suit on notera $H_\alpha[0,1]$ par H_α et $H_\alpha^0[0,1]$ par H_α^0.

$(H_\alpha^0,\|.\|_\alpha)$ est un sous espace fermé, séparable alors $(H_\alpha,\|.\|_\alpha)$ est séparable pour la norme $\|.\|_\beta$ pour tout $0 < \beta < \alpha$. De plus H_α s'injecte continûment dans H_β.

A.2 Analyse fonctionnelle de H_α et H_α^0

On note $C_0[0,1]$ l'hyperplan fermé des fontions de $C[0,1]$, nulle en zéro.
Pour définir la base de Faber-Schauder, on considère la fonction triangulaire $\Delta(t)$ définie par

$$\Delta(t) = \begin{cases} 2t & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 2(1-t) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \\ 0 & \qquad \text{ailleurs.} \end{cases}$$

pour $n = 2^j + k$, $j \geq 0$, $0 \leq k < 2^j$, on pose

$$\Delta_n(t) = \Delta_{j,k}(t) = \Delta(2^j t - k), \ \ t \in [0,1],$$

$$\Delta_0(t) = t1_{[0,1]}(t),$$

$$\Delta_{-1}(t) = 1_{[0,1]}(t).$$

On note par

$$\lambda_0(f) = f(1),$$

$$\lambda_n(f) = \lambda_{j,k}(f) = f\left(\frac{(k+1)2^{-1}}{2^j}\right) - \frac{1}{2}\left\{f\left(\frac{k}{2^j}\right) + f\left(\frac{k+1}{2^j}\right)\right\}$$

Lemme A.0.1. ***(Faber-Schauder)*** *Pour toute fonction f de $C_0[0,1]$,*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(f)\Delta_n(t), \tag{A.1}$$

avec $\lambda_0(f) = f(1)$ et pour $n = 2^j + k (j \geq 0,\ 0 \leq k < 2^j)$:

$$\lambda_n(f) = \lambda_{j,k}(f) = f\left(\frac{(k+1)2^{-1}}{2^j}\right) - \frac{1}{2}\left\{f\left(\frac{k}{2^j}\right) + f\left(\frac{k+1}{2^j}\right)\right\}.$$

La série $(A.1)$ *converge uniformément sur* $[0,1]$*, autrement dit, au sens de la norme* $\|.\|_\infty$ *de* $C_0[0,1]$.

Théorème A.1. ***(Ciesielski [9])****: Pour toute fonction* f *de* H_α^0 *la serie*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(f)\Delta_n(t),$$

converge au sens de la $\|.\|_\alpha$*. La famille* $\{\Delta_n, n \geq 0\}$ *est une base de Schauder de* $(H_\alpha^0, \|.\|_\alpha)$.

A.3 Processus à trajectoires dans H_α

Dans notre cas le processus ξ_n est à trajectoires dans H_α, c'est-à-dire considéré comme élément aléatoire de H_α. On donne aussi les résultats sur l'existence d'une modification à trajectoires presque sûres dans H_α.

Théorème A.2. ***(Kolmogorov)*** *Soit* $(\xi_t, t \in [0,1])$ *un processus défini sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ *et supposons qu'il existe* $\delta > 0$*,* $\gamma > 0$ *et* $c > 0$ *tels que*

$$\forall \lambda > 0,\ \mathrm{P}(|\xi_t - \xi_s| > \lambda) \leq \frac{c}{\lambda^\gamma}|t-s|^{1+\delta}.$$

Alors il existe une version de ξ *à trajectoires dans* H_α^0 *pour tout* $0 < \alpha < \frac{\delta}{\gamma}$,

Théorème A.3. ***(Ibragimov [17])****: Soit* f *une fonction définie sur* $\mathbb{R}^+$*, croissante telle que pour tous* s,t *dans* $[0,1]$

$$\mathbb{E}|\xi_t - \xi_s|^P \leq f^P(|t-s|).$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que presque toutes les trajectoires de ξ *soient dans* H_α *est que*

$$\int_0^1 \frac{f(u)}{u^{\alpha+1+\frac{1}{P}}} < \infty.$$

A.4 Compacité dans H_α

Dans Hamadouche [14], il a été démontré que la convergence faible hölderienne d'une suite de processus stochastique est équivalente à la convergence des lois fini-dimensionnelles de cette suite et à sa relative compacité dans l'espace de mesures de probabilité sur H_α^0 muni de la topologie de la convergence étroite. Par le théorème de Prohorov, cette relative compacité équivaut à l'équitension de cette suite de lois. Les deux lemmes ci-dessous permettent de caracteriser les compacts de H_α^0.

Lemme A.1. ***(Hamadouche[11])***: *Si $0 < \alpha < \beta < 1$ et si K est borné dans H^β alors K est compact dans H_α^0.*

Lemme A.2. ***(Suquet [33])***: *K est relativement compact dans H_α^0 si et seulement si*

$$\lim_{\delta\to\infty} \sup_{f\in K} w_\alpha(f,\delta) = 0.$$

A.5 Convergence faible hölderienne

On considère un processus ξ à trajectoires hölderiennes (élément aléatoire de l'espace fonctionnel H_α^0). Comme H_α^0 s'injecte continûment dans H_α, la convergence faible dans H_α^0 entraine celle dans H_α .

Proposition A.1. ***(Hamadouche [12])***: *La convergence en loi dans dans H_α d'une suite de processus (ξ_n, $n \geq 1$ équivaut à l'équitension sur H_α^0 de la suite des lois $P_n = P\xi_n^{-1}$ des éléments aléatoires ξ_n et à la convergence des lois fini-dimensionnelles de ξ_n.*

A.6 Equitension hölderienne

Théorème A.4. ***(Kerkyacharian, Roynette [18])***: *Soit $(\xi_n)_{n\geq 1}$ une suite de processus nuls en zéro et vérifiant pour des constantes $\gamma > 0$, $\delta > 0$ et $c > 0$*

$$\forall\lambda > 0, P(|\xi_n(t) - \xi_n(s)| > \lambda) \leq \frac{c}{\lambda^\gamma}|t-s|^{1+\delta}.$$

Alors la suite des lois P_n des processus ξ_n est équitendue dans H_α^0 pour $0 < \alpha < \frac{\delta}{\gamma}$.

La version des moments de ce théorème est obtenue par l'négalité de Markov. Elle s'énonce par le corollaire suivant.

Corollaire A.1. ***(Lamperti [19])***: *Soit $(\xi_n)_{n\geq 1}$ une suite de processus nuls en zéro et* *verifiant pour de constantes* $\gamma > 0$, $\delta > 0$ *et* $c > 0$

$$\mathbb{E}|\xi_n(t) - \xi_n(s)|^{\gamma} \leq c|t-s|^{1+\delta}.$$

Alors la suite des lois P_n *des processus* ξ_n *est équitendue dans* H_α^0 *pour* $0 < \alpha < \frac{\delta}{\gamma}$.

Théorème A.5. *(**Hamadouche [12]**):* $(\xi_n)_{n\geq 1}$ *une suite de processus à trajectoire dans* H_α^0, *vérifiant les conditions suivantes:*
a)Il existe des constantes $a > 0$,$b > 0$,$c > 0$ *et une suite de nombres positifs* $(a_n) \searrow 0$ *telles que*

$$\mathbb{E}|\xi_n(t) - \xi_n(s)|^{a} \leq c|t-s|^{b}, \tag{A.2}$$

pour tout n *et tout* s,t *tels que* $|t-s| \geq a_n$

b)$\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} P\{w_\alpha(\xi,a_n) > \varepsilon\} = 0.$
Alor pour tout $\alpha < a^{-1}(min(a,b) - 1)$, *la suite* ξ_n *est équitendue dans* H_α^0.

Idée de la preuve:
On construit un autre pracessus ζ_n qui interpole linéairement ξ_n aux points $t_k = ka_n$ $0 \leq k \leq ka_n$ avec $k_n = [\frac{1}{a_n}]$ et $t_{k_{n+1}} = 1$. les trajectoires de ζ_n sont des lignes polygonales , danc dans H_α^0, pour tout $\alpha \leq 1$. On utilise alors a) pour montrer l'équitension de $\{\zeta_n, n \geq 1\}$ et b) pour la convergence en probabilité vers 0 de $\|\xi_n - \zeta_n\|_\alpha$. l'équitension de $\{\xi_n, n \geq 1\}$ s'en déduit facilement par la caractérisation séquentielle de la relative compacité des familles de mesures de probabilité sur H_α^0

Pour prouver l'équitension de $\{\zeta_n, n \geq 1\}$ dans H_α^0 nous nous appuierons sur la condition suffisante du théorème 1.7.1 plus pércisément en utilisee le corollaire 1.7.1, nous souhaitons montrer

$$\mathbb{E}|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|^{a} \leq K|t-s|^{\gamma},\ \ n \geq 1,\ \ s,t \in [0,1] \tag{A.3}$$

où $\gamma = min(a,b)$, et ça en discutant la localisation de s et t.
Autrement, pour prouver la convergence en probabilité de $\|\xi_n - \zeta_n\|_\alpha$, on doit montrer la convergence en probabilité vers zéro de la suite de variables aléatoires réelles

$$\|\chi_n\| = \sup_{0\leq t\leq s|\leq 1} \frac{|\chi_n(t) - \chi_n(s)|}{|t-s|^{\alpha}}.$$

où $\chi_n = \|\xi_n - \zeta_n\|_\alpha$
Comme à la première étape, nous discutons suivant la localisation de s et t.
Dans tous les cas, on aura $\|\xi_n - \zeta_n\|_\alpha \leq 4w_\alpha(\xi,a_n)$. L'hupothese b) du théorème nous donne la convergence en probabilité vers zéro $\|\xi_n - \zeta_n\|_\alpha$.
Ainsi $\{\zeta_n,n \geq 1\}$ est équitendue dans H_α^0.

A.7 Principes d'invariance dans les espaces de Hölder

A.7.1 Principes d'invariance pour des variables aléatoires indépendantes et de même loi

Soit $(X_j)_{j\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, centrées et de variance commune $\mathbb{E}X_j^2 = \sigma^2$. On note par ζ_n les lignes polygonales obtenues par interpolation linraire aux points $(\frac{j}{n},\frac{S_j}{\sigma\sqrt{n}})$ où $S_j = \sum_{k=1}^j X_k$.

I) Lissage polygonal du processus de sommes partielles

Le premier principe d'invariance dans H_α pour les variables aléatoires indépendantes et de même loi est donné par le théorème de Lamperti.

Théorème A.6. ***(Lamperti[19])****: Soit $(X_j)_{j\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, centrées, réduites. On suppose qu'il sxiste $q > 0$ tel que $\mathbb{E}|X_j|^q < \infty$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq j < n$:*

$$\xi_n(t,\omega) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\sum_{0<k\leq j} X_k(\omega) + (nt-j)X_{j+1}(\omega)\right], \frac{j}{n} \leq t < \frac{j+1}{n}. \tag{A.4}$$

Alors la suite de loi de ξ_n converge étroitement vers la mesure de Wiener de P_W dans H_α^0 pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$.

Lamperti a prouvé la convergence de ξ_n vers W dans H_α^0 en supposant $\mathbb{E}|X_1|^q < \infty$ pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$, Račkauskas et Suquet ont obtenue une condition nécessaire et suffisante pour le théorème limite central fonctionnel de Lamperti qu'on donne dans le théorème suivant.

Théorème A.7. *(****Račkauskas et Suquet [26]****): Soit $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, alors ξ_n converge en* *loi dans H_α^0 vers W si et seulement si*

$$\lim_{t\to\infty} t^{p(\alpha)} P(|X_1| \geq t) = 0,$$

où

$$p(\alpha) = \frac{1}{\frac{1}{2} - \alpha}.$$

II) Lissage par convolution du processus de sommes partielles

Soit $(X_j)_{j\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, centrées telles que $\mathbb{E}|X_1|^q < \infty$ pour $q > 2$. On note σ^2 leur variance commune. On pose $S_j = \sum_{k=1}^{j} X_k$ et on considère le processus de sommes partielles normalisé de Donsker-Prohorov

$$\xi_n(t) = \frac{1}{s_n} S_{[nt]}(t), \qquad t \in [0{,}1] \tag{A.5}$$

où $[nt]$ =partie entière de (nt),
$s_n^2 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2$

soit K une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\int_{\mathbb{R}} |u| K(u) du < +\infty \tag{A.6}$$

et $(b_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs tendant vers zéro et verifiant:

$$\frac{1}{b_n} = O(n^{\frac{\tau}{2}}), \qquad 0 < \tau < \frac{1}{2}. \tag{A.7}$$

On définit la suite $(K_n)_{n\geq 1}$ de noyaux de convolution par

$$K_n(t) = \frac{1}{b_n} K\left(\frac{1}{b_n}\right), \ t \in \mathbb{R} \tag{A.8}$$

Nous considérons le processus de sommes partielles lissé défini par:

$$\zeta_n(t) = (\xi_n * K_n)(t) - (\xi_n * K_n)(0), \qquad t \in [0{,}1] \tag{A.9}$$

Le terme correctif $(\xi_n * K_n)(0)$ assure la nulté du processus ζ_n.

$$(\xi_n * K_n)(t) = \int_{\mathbb{R}} \xi_n(t-u) * K_n(u) du = \int_{\mathbb{R}} \xi_n(u) * K_n(t-u) du. \tag{A.10}$$

Lemme A.3. ***(Hamadouche [12])**: Soit f une fonction meusurable, bornée à support dans $[0,1]$ et K un noyau de convolution tel que*

$$K \in L^1([-1,1]) \cap L^{\frac{1}{2}}([-1,1]), \tag{A.11}$$

$$|K(x) - K(y)| \leq \alpha(K)|x - y|, \qquad x,y \in [-1,1], \tag{A.12}$$

Pour une certaine constante $\alpha(K)$. Alors la restriction à l'intervalle $[0,1]$ de $\zeta_n(t)$ defini par $(A.9)$ est dans $H_{\frac{1}{2}}[0,1]$

Ce lemme assure que ζ_n est dans $H_{\frac{1}{2}}[0,1]$.

Lorsque les conditions énoncées ci-dessus sur K_n sont remplies, on peut énoncer le résultat suivant :

Théorème A.8. ***(Hamadouche [12])**: Soit $(X_j)_{j\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, centrées et réduite telles que $\mathbb{E}|X_1|^\gamma < \infty$ pour $\gamma > 0$. On suppose que les noyaux de convolution K_n vérifiant (A.6)(A.8)(A.11)et(A.12).*
Alors la suite de processus de sommes partielles lissés $\zeta_n(t)$ defini par(A.9) converge faiblement vers le mouvement brownien W dans H_α^0 pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - max(\tau,\frac{1}{\gamma}.)$

Idée de la preuve
On montre l'équitension de la suite des lois de $\zeta_n(t)$ en utilisant le théorème A.7.2 avec $a_n = \frac{1}{n}$
Pour la convergence des loi fini-dimensionnelles, on se ramène à celle de ξ_n en montrant que la distance entre $(\zeta_n(t_1),....,\zeta_n(t_k)$ et $(\xi_n(t_1),....,\xi_n(t_k)$ tend en probabilité vers zéro.

A.7.2 Principes d'invariance pour des variables aléatoires indépendantes non de même loi

Soit $(X_j)_{j\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, non nécessairement de même loi, centrées et de variance commune $\sigma_j^2 = \mathbb{E}X_j^2$. On note par ζ_n les lignes polygonales obtenues par interpolation linraire aux points $(\frac{j}{n},\frac{S_j}{s_n})$ où $S_j = \sum_{k=1}^{j} X_k$ et $s_n^2 =$

$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + ... + \sigma_n^2$.

A) lissage polygonal du processus de sommes partielles

La première extension du théorème de lamperti pour une suite de variables aléatoires indépendantes non identiquement distribuées est donnée par:

Théorème A.9. ***(Hamadouche-Taleb [14])****: Soit $(X_j)_{j\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, centrées et , non de même loi. On suppose qu'il existe $\gamma > 2$, $m > 0$ et $M > 0$ telles que*

$$m \leq \mathbb{E}|X_j|^2 \qquad et \quad \mathbb{E}|X_j|^\gamma \leq M < \infty, \qquad \forall j \geq 1. \tag{A.13}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,$0 \leq j < n$.

$$\xi_n(t,\omega) = \frac{1}{s_n}\left[\sum_{k=1}^{k=j} X_k(\omega) + (nt-j)X_{j+1}(\omega)\right], \frac{j}{n} \leq t < \frac{j+1}{n} \tag{A.14}$$

Alors la suite de lois de ξ_n convergen étroitement vers la mesure de Wiener P_W dans H_α^0 pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$.

Idée d la preuve

D'après la proposition A.7.1 , il suffit de montrer l'équitension de la suite des loi $P_n = P\xi_n^{-1}$. Sous les hypothèses du corollaire A.7.2, on discute suivant la localisation de s et t relativement aux intervalles de la subdivision. Dans tout les cas on aura:

$$\exists k \; tel \; que \; \mathbb{E}|\xi_t - \xi_s|^\gamma \leq k|t-s|^{1+\delta},$$

avec $1 + \delta = \frac{1}{2} > 1$

C'est à dire que la suite de lois de processus ξ_n est equitendue dans H_α^0 pour tout $0 < \alpha < \frac{\delta}{\gamma} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$.

Pour demonter la convergence des lois fini-dimensionnelles, on montre d'abord la convergence en loi de $\xi_n(t_1)$ vers W_{t_1} pour un point t_1 donné.

On montre en suite la convergrnce $(\xi_n(t_1),\xi_n(t_2) - \xi_n(t_1)) \xrightarrow{\mathcal{L}} (W_{t_1},W_{t_2} - W_{t_1})$ pour deux points donnés t_1 t_2 $t_1 < t_2$ dans[0,1].

Enfin, on genéralise pour tous $t_1,....,t_k$ de [0,1] et on établit la convergence en loi de $(\xi_n(t_1),\xi_n(t_2) - \xi_n(t_1),.....,\xi_n(t_k) - \xi_n(t_{k-1}))$ vers $(W_{t_1},W_{t_2} - W_{t_1},....,W_{t_k} - W_{t_{k-1}})$

Ce qui revient à dire que les lois fini-dimensionnelles de ξ_n convergent vers celles du mouvement brownien W pour $0 < \alpha <= \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$.
On obtien alors la propositin suivante et ainsi la preuve du théorème.

Proposition A.2. ***(Hamadouche-Taleb [14])****: Soit $(X_j)_{j\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, centrées, pas nécessairement identiquement distribuéés avec $\sigma_j^2 = \mathbb{E}X_j^2$ verifiant(A.13).*
Alors les lois fini-dimensionnelles du processus ξ_n défini par (A.14) convergent vers celles du mouvement brownien W dans H_α^0 pour $\alpha <= \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$.

B) Lissage par convolution du processus de sommes partielles

On reprend quelques résultats établit dans (Hamadouche [12]) relatifs aux noyaux de convolution. On considère processus de somme partielles normalisé de Donsker-Prohorov

$$\xi_n(t) = \frac{1}{s_n} S_{[nt]}(t), \qquad t \in [0,1] \tag{A.15}$$

$[nt]$ =partie entière de (nt),

Selon les besoins, on utilesera les notations suivantes

$$\xi_n(t) = \frac{1}{s_n} \sum_{i=1}^{n} S_i 1_{[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]}(t), \tag{A.16}$$

$$\xi_n(t) = \frac{1}{s_n} \sum_{k=1}^{n} X_k 1_{[\frac{k}{n}, 1]}(t), \tag{A.17}$$

Soit le processus lissé défini par

$$\zeta_n(t) = (\xi_n * K_n)(t) - (\xi_n * K_n)(0), \qquad t \in [0,1] \tag{A.18}$$

Le terme correctif $(\xi_n * K_n)(0)$ assure la nullté du processus ζ_n dans H_α^0.
On suppose que les condition sont vérifiées

Théorème A.10. ***(Hamadouche-Taleb [14])*** *Soit $(X_j)_{j\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, centrées, non identiquement distribuées vérifiant (A.13). On suppose que les noyaux de convolution K_n vérifient (A.6), (A.8), (A.11)et(A.12) .*

Alors la suite de processus de sommes partielles lissés $\zeta_n(t)$ défini par (A.18) converge faiblement vers le mouvement brownien W dans H^0_α pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - max(\tau, \frac{1}{\gamma})$.

Idée de la preuve

Le lemme A.7.1 implique que toutes les trajectoires de $\zeta_n(t)$ sont dans $H_{\frac{1}{2}}$ et donc dans H^0_α pour tout $\alpha < \frac{1}{2}$
d'après la propositon A.7.1 il suffit de montrer l'équitension sur H^0_α des lois $P_n = P\zeta_n^{-1}$ des éléments aléatoires de ζ_n et la convergence des lois fini-dimensinnelles de ζ_n .
En appliquant le théorème avec $a_n = \frac{1}{n}$, on démontre l'équitension de la suite des lois $P_n = P\zeta_n^{-1}$. On distingue deux cas : $t - s \geq \frac{1}{n}$, $t - s < \frac{1}{n}(t > s)$. l'équitension est vérifiée dans H^0_α pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \tau$ et $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$.
Pour la convergenc des lois fini-dimensionnelles , on démontre d'abord que que la distance entre $(\zeta_n(t_1),....,\zeta_n(t_k)$ et $(\xi_n(t_1),....,\xi_n(t_k)$ tend en probabilité vers zéro, dans $\mathbb{R}^k$, comme d'aprés la proposition (A.7.1), on a $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{L}} W$, il en sera de même pour ζ_n .
Pour cela, on montre que $\mathbb{E}|\zeta_n(t) - \xi_n(t)|^2$ converge vers 0 ce qui implique la convergence de $\xi_n * K_n - \xi_n(t)$ vers zéro dans L^2 et enfin en conclut que $\zeta_n \xrightarrow{\mathcal{L}} W$ dans H^0_α pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - max(\tau, \frac{1}{\gamma}.)$

A.7.3 Principes d'invariance sous dépendance

Lamperti a donné une extension du principe d'invariance de Donsker-Prohorov au cas Hölderienne pout tout $\alpha < \frac{1}{2}$ du processus lissé polygonalement de sommes partielles de variables i.i.d.
Ce résultat est par ailleure, étendu par Hamadouche aux suite statoinnaires de variables aléatoires dépendantes (α-mélangeante et associées) et ce avec deux types de lissage (polygonal et par convolution).

A) Quelques outils de dépendance

Les résultats suivants sont nécessaires lors de l'itablissement des principes d'invariances sous dépendance.

Définition A.2. *On appelle coefficient de mélange fort entre de tribus $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ le nombre*

$$\alpha(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \sup_{(A,B)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}} |P(A \cap B) - P(A)P(B)|.$$

Définition A.3. *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé. On définit le coéficient de mélange fort α_n par*

$$\alpha_n = sup\{\alpha(\mathcal{F}_1^k, \mathcal{F}_{n+k}^{\infty})\ k \in \mathbb{N}^*\}$$

où $\mathcal{F}_j^l$ désigne la tribu engendrée par les variables $(X_i,\ j \leq i \leq 1\ )$.

On dit que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est α-mélangeante si $\alpha_n \to 0$ lorsque n tend vers ∞ .

Définition A.4. *On dit que $X_1, X_2, ..., X_m$ est une suite finie de variables associées si*

$$Cov(f(X_1, X_2, ..., X_m), g(X_1, X_2, ..., X_m)) \geq 0$$

pour toute paire f,g de fonction $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ croissantes et telles que cette covariance existe.

Définition A.5. *On dit qu'une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables associées si toute sous-suite finie est associée.*

Théorème A.11. ***(Birkel [4])**: Soit $(X_j)_{j\geq 1}$ une suite de variables aléatoires associées, centrées, telles que sup $\mathbb{E}|X_j|^{\gamma+\varepsilon} < \infty$ pour $\gamma > 2$ et un $\varepsilon > 0$. On suppose que le coeficient*

$$u(n) = \sup_{k\in\mathbb{N}^*} \sum_{j:|j-k|\geq n} cov(X_1, X_k) = O(n^{-(\gamma-2)(\gamma+\varepsilon)/(2\varepsilon)}).$$

Alors il existe une constante b telle que pour tout $n \geq 1$:

$$\sup_m \mathbb{E}|S_{n+m} - S_m|^{\gamma} \leq bn^{\frac{\gamma}{2}} \text{ où } S_k = \sum_{j=1}^{j=k} X_j.$$

Théorème A.12. ***(Yokoyama [38])**: Soit $(X_j)_{j\geq 1}$ une suite strictement stationnaire, α-mélangeante telle que $\mathbb{E}X_1 = 0$ $\mathbb{E}|X_1|^{\gamma+\varepsilon} < \infty$ pour $\gamma > 2$ et un $\varepsilon > 0$ et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^{\frac{\gamma}{2}-1} \alpha_n^{\frac{\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}} < +\infty$$

Alors il existe $C > 0$ tel que

$$\mathbb{E}|X_1 + X_2 + ... + X_n|^{\gamma} \leq Cn^{\frac{\gamma}{2}}.$$

Théorème A.13. ***(Odaria, Yoshihara [23])****: Soit* $(X_j)_{j\geq 1}$ *une suite* α*-mélangeante vérifiant pour des constantes* $\gamma > 2$ *,* $\varepsilon > 0$ *les conditions:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n^{\frac{\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}} < +\infty,$$

$$\sup_{j\geq 1} \mathbb{E}|X_j|^{\gamma+\varepsilon} < \infty.$$

Alors $(X_j)_{j\geq 1}$ *satisfait le théorème central limite fonctionnel dans* D[0,1].

Théorème A.14. ***(Newman, Wright [22])****: Soit* $(X_j)_{j\geq 1}$ *une suite strictement stationnaire de variables aléatoires centrées, de variance finie associées telles que*

$$\sigma^2 = \mathbb{E}X_1^2 + 2cov(X_1,X_j) < \infty$$

Pour tout $n \geq 1$*, on définit le processus ,*

$$W_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left[\sum_{k=1}^{k=j} X_k + (nt-j)X_{j+1}\right], \frac{j}{n} \leq t < \frac{j+1}{n}, 0 \leq j < n$$

Alors W_n *converge faiblement dans* C[0,1] *vers le mouvement W. A fortiori, les lois fini-dimensionnelles de* W_n *convergent vers celles de W.*

B) Lissage polygonal du processus de sommes partielles

Les principes d'invariance pour une suite de variables aléatoires faiblement dépendantes $(X_j)_{j\geq 1}$, sont donnés par.

Théorème A.15. ***(Hamadouche [12])****: Soit* $(X_j)_{j\geq 1}$ *une suite strictement stationnaire,* α*-mélangeante de variables aléatoires centrées. On suppose qu'il existe* $\gamma > 2$ *et un* $\varepsilon > 0$ *tels que* $\mathbb{E}|X_1|^{\gamma+\varepsilon} < \infty$ *et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)^{\frac{\gamma}{2}-1}\alpha_n^{\frac{\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}} < +\infty$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $0 \leq j < n$

$$\xi_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left[\sum_{k=1}^{k=j} X_k + (nt-j)X_{j+1}\right], si\ \frac{j}{n} \leq t < \frac{j+1}{n}$$

où

$$\sigma^2 = \mathbb{E}X_1^2 + 2\sum_{j=2}^{\infty} cov(X_1,X_j) < \infty.$$

Les lois de ξ_n convergent étroitement vers la mesure de Wienner P_W dans H_α^0 poue tout $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$.

Remarque A.1. *Pour la preuve, on utilise le théorème A.7.1 pour démontrer l'équitension de la suite des les lois de processus ξ_n alors que la convrgence des loi fini-dimensionnelles de ξ_n vers celles de mouvement brownien ce fait par le théorème A.8.1 .*

Théorème A.16. ***(Hamadouche [12])****: Soit $(X_j)_{j\geq 1}$ une suite strictement stationnaire de variables associées, centrées, telles que $\mathbb{E}|X_1|^{\gamma+\varepsilon} < \infty$ pour $\gamma > 2$ et un $\varepsilon > 0$. On suppose*

$$u(n) = \sum_{j\geq n+1} cov(X_1,X_k) = O(n^{-(\gamma-2)(\gamma+\varepsilon)/(2\varepsilon)})$$

et

$$0 < \sigma^2 = \mathbb{E}X_1^2 + u(1) < \infty$$

Les lois de ξ_n convergent étroitement vers la mesure de Wienner P_W dans H_α^0 pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$.

C) Lissage par convolution du processus de sommes partielles

Dans le cas de variables aléatoires dépendantes α-mélangeante ou associées, lorsque les conditions énoncées sont remplies, on a l es deux résulats suivants.

Théorème A.17. ***(Hamadouche [12])****: Soit $(X_j)_{j\geq 1}$ une suite strictement stationnaire α-mélangeante de variables aléatoires, centrées, telles que $\mathbb{E}|X_1|^{\gamma+\varepsilon} < \infty$ pour $\gamma > 2$ et un $\varepsilon > 0$. On suppose*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)^{\frac{\gamma}{2}-1}[\alpha_n]^{\frac{\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}} < +\infty.$$

et

$$0 < \sigma^2 = \mathbb{E}X_1^2 + 2\sum_{j=2}^{\infty} cov(X_1,X_j) < \infty.$$

On suppose de plus que les noyaux de convolution K_n *vérifiant (A.6)(A.8)(A.11)et(A.12)*
.
Alors la suite de processus de sommes partielles lissés ζ_n *defini par(A.9) converge étroitement vers le mouvement brownien* W *dans* H_α^0 *pour tout* $\alpha < \frac{1}{2} - max(\tau,\frac{1}{\gamma})$.

Théorème A.18. ***(Hamadouche [12])****: Soit* $(X_j)_{j\geq 1}$ *une suite strictement stationnaire de variables associées, centrées, telles que* $\mathbb{E}|X_1|^{\gamma+\varepsilon} < \infty$ *pour* $\gamma > 2$ *et un* $\varepsilon > 0$*. On suppose*

$$u(n) = 2\sum_{j\geq n+1} cov(X_1,X_k) = O(n^{-(\gamma-2)(\gamma+\varepsilon)/(2\varepsilon)}).$$

et

$$0 < \sigma^2 = \mathbb{E}X_1^2 + u(1) < \infty.$$

On suppose de plus que les noyaux de convolution K_n *vérifiant (A.6), (A.8), (A.11)et(A.12). Alors la suite de processus de sommes partielles lissés* ζ_n *defini par(A.9) converge étroitement vers le mouvement brownien* W *dans* H_α^0 *pour tout* $\alpha < \frac{1}{2} - max(\tau,\frac{1}{\gamma})$.

Annexe B

Mouvement brownien

Nous rappelons ici la définition et les propriétées du mouvement brownien. Pour plus de détail, on confére [2], [3] et [21].

Définition B.1. *Soit* $(\xi_t)_{t\geq 0}$ *un processus gaussien continu adapté de fonction de moyenne*

$$\mathbb{E}\xi_t = \mu t$$

et de fonction de covariance

$$\mathbb{E}(\xi_t - \mu t)(\xi_s - \mu s) = \sigma^2 (s \wedge t) \quad \forall s,t \geq 0$$

$s \wedge t = min(t,s)$.
Tout processus de ce type est appelé ***mouvement brownien****.*

Pour tout mouvement brownien $(\xi_t)_{t\geq 0}$, on peut se ramener au mouvement canoniqua par le changement de variable

$$\xi_t \mapsto \frac{\xi_t - \mu t}{\sigma} = \zeta_t.$$

Alors on aura

$$\mathbb{E}\zeta_t = 0, \quad cov(\zeta_t,\zeta_s) = \mathbb{E}\zeta_t\zeta_s = s \wedge t \quad \forall s,t \geq 0.$$

B.1 Les accroissements du mouvement brownien

Propriété B.1. *(**Brzezniak [6]**) Soit* ξ_t *un mouvement brownien. Alors, pour tous* $0 \leq s < t$, $\xi_t - \xi_s$ *suit une loi normale* $\mathcal{N}(0,t-s)$.

Pour la preuve voire (**Brzezniak [6]**).
La proposition prècédente implique que le mouvement brownien est à accroissements stationnaires.

Propriété B.2. *(**Brzezniak [6]**) Pour tous* $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_k$ *les accroissements*

$$\xi_{t_1} - \xi_0,..,\xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}}$$

sont indpendants

B.2 Regularité des trajectoires

Théorème B.1. *(Kolmogorov- Čentsov)Soit* ξ_t *un processus sur l'espace probabilisé* $(\Omega,\mathcal{A},P)$ *tel que*
$\forall s,t \in [0,T], \mathbb{E}|\xi_t - (\xi_s|^\alpha \leq c|t-s|^{1+\beta}$ *où* α *et* β *sont des constantes positives, alors il existe un processus* $(\tilde{\xi_t})$ *de* (ξ_t) *qui est continu dont les trajectoires sont prèsque surement localement* γ*-höldériennetel que*

$$P[\tilde{\xi_t} - \xi_t] = 1 \;\; \forall t \in [0,T]$$
$$P\left[\left\{\omega \in \Omega, \sup_{(s,t)\in[0,1],0<|t-s|<h} \frac{|\tilde{\xi_t}(\omega) - \tilde{\xi_s}(\omega)|}{|t-s|^\gamma} \leq \delta\right\}\right] = 1.$$

où h *est une variable aléatoire positive et* $\delta > 0$ *est une constante,* $\gamma \in]0,\frac{\beta}{\alpha}[$.

Cas du mouvement brownien

Pour $s < t$, la $\xi_t - \xi_s$ suit une loi normale de moyenne nulle et de variance $(t-s)$, et donc $\xi_t - \xi s$ a même loi que $\sqrt{t-s}$T, où T suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Donc pour α

$$\mathbb{E}|\xi_t - (\xi_s|^\alpha = (t-s)^{\alpha/2}\mathbb{E}T^\alpha$$

donc il existe $c = \mathbb{E}T^\alpha < \infty$ tel que le critère de kolmogorov s'applique pour $\alpha > 2$ et $\beta = \frac{\alpha}{2}$. On trouve ainsi que ξ_t à une modification dont les trajectoires sont continues et localement γ-hölderiennes.

Dans ce qui suit on notera W_t le mouvement brownien canonique modification de ξ_t.

B.3 Propriètes du mouvement brownien

B.3.1 Invariance du mouvement brownien

Soit W_t un mouvement brownien, alors les processus suivants sont aussi des mouvements browniens:

1. $-W_t$. (C'est la propriété de symétrie du mouvement brownien).
2. $\frac{1}{\sqrt{c}}W_{ct}$, $c > 0$, (C'est la propriété d'autosimilarité du mouvement brownien).
3. $W_{t+s} - W_s$,$s \geq 0$. (C'est la propriété d'invariance par translation du mouvement brownien).
4. W'définit par:($W'_0 = 0$,$W'_t = tW_{\frac{1}{t}}$). (C'est la propriété d'invariance par inversion du temps du mouvement brownien).

B.3.2 Propriété de Markov

a)Le mouvement brownien est un processus de Markov c'est-à-dire
Pour tout $t \leq s$ et $A \in B(\mathbb{R})$ avec $F_t = \sigma(W_\tau,\tau \leq t)$

$$P\{W_s \in A|F_t\} = P\{W_s \in A|W_t\}$$

Preuve. Il suffit de vérifier que $\forall k$, $\forall t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_k \leq s$ on a

$$P\{W_s \in A|W_{t_1},W_{t_2},...,W_{t_k}\} = P\{W_s \in A|W_{t_k}\}$$

$W_s - W_{t_k},W_{t_k} - W_{t_{k-1}},...,W_{t_2} - W_{t_1},W_{t_1} = W_{t_1} - W_0$ sont independants donc la loi de W_s conditionnellement aux écarts:$W_{t_k} - W_{t_{k-1}},...,W_{t_2} - W_{t_1} = W_{t_1} - W_0,W_{t_1}$ est une loi gausienne de variance $(s - t_k)$, centrée en t_k, ce qui implique

$$P\{W_s \in A|F_t\} = P\{W_s \in A|W_t\}.$$

□

a) Propriété de Markov simple

Pour $t \geq 0$ on note F_t la tribu engendrée par le un mouvement brownien W_t, le processus $(W_{t+t'} - W_t)_{t' \in R^+}$ est un mouvement brownien indépendant de F_t

b) Propriété de Markov fort

Notre but est d'étendre la propriété de Markov simple au cas où l'instant t est remplacé par un temps aléatoire τ .

Définition B.2. *Une variable aléatoire τ a valeurs dans $[0,\infty]$ est un temps d'arrêt si*

$$\forall t \leq 0, \{\tau \geq t\} \in F_t.$$

Théorème B.2. *(Propriété de Markov fort) Soit τ un temps d'arrêt, alors le processus $(W_{\tau+t} - W_\tau)$ est un mouvement brownien indépendant de F_τ.*

Théorème B.3. ***Loi du logarithme itéré*** *Pour presque tout ω on a*

$$\lim_{t\to 0} \sup \frac{W_t}{\sqrt{2tloglog\frac{1}{t}}} = 1,$$

$$\lim_{t\to 0} \inf \frac{W_t}{\sqrt{2tloglog\frac{1}{t}}} = -1.$$

et

$$\lim_{t\to \infty} \sup \frac{W_t}{\sqrt{2tloglog\frac{1}{t}}} = 1,$$

$$\lim_{t\to \infty} \inf \frac{W_t}{\sqrt{2tloglog\frac{1}{t}}} = -1.$$

B.5 Propriétés des martingales

Propriété B.3. *Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien , alors les processus suivants sont des martingales pour la famille $(F_t)_{t\geq 0}$*

1. $(W_t)_{t\geq 0}$;
2. $(W_t^2 - t)_{t\geq 0}$;
3. $[\exp(\lambda W_t - \frac{\lambda^2 t}{2})]_{t\geq 0}$, $\lambda > 0$.

B.6 Le pont brownien

Un élément aléatoire X de $C[0,1]$ est gaussien si ses lois fini-dimensionnelles sont des vecteurs gaussiens. Dans $C[0,1]$ la loi gaussienne d'un élément aléatoire X est complétement définie par le moment $\mathbb{E}X(t)$ et par le moment du produit $\mathbb{E}(X(s)X(t))$, $0 \leq s,t \leq 1$ puisqu'ils déterminent les lois fini-dimensinnelles.
Or on sait que pour le mouvement brownien W on a:

$$\mathbb{E}W_t = 0$$

,

$$\mathbb{E}(W_s W_t) = s \wedge t.$$

Dans le cadre de l'étude des loi empriques, on cherche à avoir un élément aléatoire gaussien B qui remplit les deux conditions:

$i)\mathbb{E}B_t = 0,$
$ii)\mathbb{E}(B_s B_t) = s(1-t)\ si\ s < t.$

Il existe plusieurs maniéres de montrer l'éxistence d'un tel élément. Dans Billingsley[2] il est construit comme suit:

$$B_t = W_t - tW_1$$

L'élément aléatoire B_t ainsi défini est appelé pont brownien.
Comme W_t et W_1 sont des élément aléatoires gaussiens, B_t est aussi un élément aléatoire gaussien. De plus

$$B_0 = B_1 = 0,$$

$$\mathbb{E}B_t = 0,$$

$$\mathbb{E}\{(B_t - B_s)^2\} = (t-s)(1-(t-s)))\ si\ s < t,$$

$$\mathbb{E}\{(B_{s_2} - B_{s_1})(B_{t_2} - B_{t_1})\} = -(s_2 - s_1)(t_2)\ Sis_1 \leq s_1 \leq t_1 \leq t_2.$$

le pont brownien admet les mêmes propriétés que le mouvement brownien.

Bibliographie

[1] **Belkacem, C.,** Estimation et tests dans les modèles de rupture. Mémoire de Magister, Département de mathématiques, Faculté des Sciences, U.M.M.T.O, 2005.

[2] **Billingsley, P.,** Convergence of Probability Measures, Second Edition,J. WILEY, New York, 1968 .

[3] **Billingsley, P.,** Probability and Measures, Second Edition, J. WILEY, New York, 1986 .

[4] **Birkel , T.,** The invariance principle for associated processes, stochastic processes, and their application, 27 (1988), 57-71.

[5] **Brown, R. L., Durbin. J. and Evans. J. M.,** Techniques for Testing the Constancy of Regression Relationships over Time. J. R. Statist. Soc. B 37, (1975), 149-192.

[6] **Breźniak.Z. and Zastwaniak.T.,** Basic stochastic processes : a course through exercises. (1958). Springer undergraduate mathematics series.

[7] **Chernoff, H. and Zacks, S.,** Estimating the current mean of a normal distribution whiche is subject to change in time. Ann. Math. Statist., 35, (1964), 999-1028.

[8] **Ching. Choy and Broemeling,** Some Bayesian inference for a changing linear model, Technometrics.

[9] **Ciesielski, Z.,** On the isomorphisms of the spaces H_α and m, Bull. acad. Pol. Sci. Sér. Math. Astronom. Phys.

[10] **Dedecker, J, Doukhan, P, Lang, G, León R. J .R, Louhichi. S, Prieur. C.,** Weak Dependence: With Examples and Applications. (2007) Springer Science + Business Media, LLC, New York.

[11] **Hamadouche, D.,** Weak convergence of smoothed empirical process in Hölder spaces, Stat. Probab. Letters, 36 (1998), 393-400.

[12] **Hamadouche, D.,** Invariance principles in Hölder spaces. Portugaliae Mathematica, 57, (2000) 127-151.

[13] **Hamadouche, D., Graiche, F. and Merabet, D.,** Testing epidemic change in the variance, Pub. IRMA Lille, 71-V (2011), 1-20.

[14] **Hamadouche, D., Taleb, Y.,** hölderian version of Donsker-Prohorov's principle, IAENG Int. J. Appl. Math. 39 (2009), 01, 1-8.

[15] **Hogan, M. L. and Siegmund, D.,** Large Deviation for The Maxima of Some Random Fields. Adv. Appl. Math. 7, (1986), 2-22.

[16] **Holbert, D. and Broemeling, L.D.,** Bayesian inference related to Shifting sequence and two-phase regression, Commun. Stat. Theo. Math., A, 6 (1977), 265-275.

[17] **Ibragimov, I.,** Sur la régularité des trajectoires des fonctions aléatoires, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, 289 (1979), 545-547.

[18] **Kerkyacharian, G. and Roynette, B.,** Une démonstration simple des théorèmes de Kolmogorov, Donsker et Ito-Nisio, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, 312 (1991), 877-882.

[19] **Lamperti, J.,** On convergence of stochastic processes, Trans. Amer. Math. Soc., 104 (1962), 430-435.

[20] **Levin, B. and Kline, J.,** CUSUM tests of homogeneity. Stat. Med. 4 (1985) 469–488.

[21] **Loève, M.,**Probability Theory II, 4th Edition, New York, 1963.

[22] **Newman, C.M. and Wright, A.L.,** An invariance principle for certain dependent sequences, Ann. Probab., 9 (1981), 671-675.

[23] **Oodaraïa, H. and Yoshihara, K.I.,** Functional central limit theorems for strictly stationary processes satisfying the strong mixing condition, Kodai Math. Sem. Rep., 24 (1972), 259-269.

[24] **Pettitt, A. N.,** A simple cumulative sum type statistic for the change-point problem with zero-one observations. Biometrika 67, (1980), 79-84.

[25] **Prohorov, Y. V.,** Convergence of random processes and limit theorems in probability theory. Theor. Prob. Appl. 1 (1956), 157-214.

[26] **Račkauskas, A., Suquet, Ch.,** Necessary and sufficient condition for the Hölderian functional central limit theorem, Journal of Theoretical Probability, 17(1), 221–243 (2004).

[27] **Račkauskas, A., Suquet, Ch.,** Hölder norm test statistics for epidemic change. Journal of Statistical Planning and Inference, 126, Issue 2,(2004), 495-520.

[28] **Račkauskas, A., Suquet, Ch.,** On the distribution of sequential Hölder norms of the Brownian motion. Pub. IRMA, Lille, vol. 71, No IX (2011).

[29] **Salazar, D., Boremelinge, L.D. and Chi, A.,** Prameter model with autocorrelated errors. Commun. stat. Theo, . Meth. A10(17), (1981), 1751-1758.

[30] **Siegmund, D.,** Boundary Crossing Probabilities and Statistical Applications. Ann. Statist. 14,(1986) 361-404.

[31] **Siegmund, D.,** Approximate Tail Probabilities for The Maxima of Some Random Fields . Ann. Prob. 16, (1988a), 487-501.

[32] **Siegmund, D.,** Confidence sets in change-point problems. Int. Statist. Rev. 56, (1988b), 31-48.

[33] **Suquet, Ch.,** Tightness in Sehauder decomposable Banach spaces. Translations of A.M.S., Proc. St Petersburg Math. Soc., vol. 5, (1996).

[34] **Yao, Q.,** Large deviation for boundary crossing probabilities of Some Random Fields. J. Math. Res . Exposition 9, (1989) 181-192.

[35] **Yao, Q.,** Tests for change-points with epidemic alternatives, Biometrika, 80, 179–191 (1993).

[36] **Yao, Q.,** Boundary-Crossing Probabilities of Some Random Fields Related to Likelihood Ratio Tests for Epidemic Alternatives, J. Appl. Prob . 30(1). (1993), 52-65.

[37] **Yao, Q.,** Boundary-Crossing Probabilities and two-stage tests for a change-point. Scandnavian, J. Stat., 23(4). (1996), 511-525.

[38] **Yokoyama, R.,** Moment bounds for stationary mixing sequences, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 52 (1980), 45-57.