

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud Mammeri De Tizi-Ouzou



Faculté de Génie Electrique et d'Informatique  
Département d'Automatique

**Mémoire de Fin d'Etude  
de MASTER ACADEMIQUE  
Spécialité : Automatique**

*Présenté par*

**Ania FATHI**

**Nassira AIT MOHAMMED**

Mémoire dirigé par **Mr. Ahmed MAIDI**

Thème

**Commande prédictive d'un système  
multivariable : application à une colonne  
de distillation**

*Mémoire soutenu publiquement le 14 septembre 2014 devant le jury composé de :*

**M Said GUERMAH**

Président

**M Ahmed MAIDI**

Rapporteur

**M Mourad ALLAD**

Examineur

**M Redouane KARA**

Examineur

---

## REMERCIEMENTS

*Nous remercions le Dieu le tout puissant de nous avoir motivé et guidé à réaliser ce modeste travail.*

*Nos sincères remerciement en vers notre promoteur Mr A.MAIDI pour ses conseils constructifs tout au long de l'élaboration de ce mémoire.*

*Nos remerciements vont également aux membres du jury qui nous feront l'honneur d'évaluer ce travail.*

*Nous sommes aussi très reconnaissantes à tous les enseignants qui ont veillé au bon déroulement de notre formation tout au long de notre cursus. Qu'ils trouvent ici l'expression de notre respect et remerciements les plus sincère.*

*Que tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail, trouvent ici notre sincère reconnaissance.*

# SOMMAIRE

Introduction générale : ..... 01

Chapitre 1 : Commande prédictive :

I.1. Introduction.....	03
I.2. Commande prédictive généralisée(GPC).....	03
I.3. Principe de commande prédictive.....	03
I.4. Eléments d'une commande prédictive.....	06
I.5. Modèle du système.....	06
I.5.1 Réponse impulsionnelle.....	07
I.5.2 Réponse indicielle.....	07
I.6. Fonction objectif.....	08
I.6.1 Horizon de prédiction et de commande.....	08
I.6.2 Trajectoire de référence.....	09
I.7. Contraintes.....	09
I.8. Prédiction.....	10
I.9. conclusion.....	12

Chapitre 2 : Commande par matrice dynamique'DMC' :

II.1. Introduction.....	13
II.2. Modèle de la réponse indicielle.....	13
II.3. Modèle de prédiction.....	15

II.4. Synthèse d'un correcteur DMC .....	17
II.5 Perturbations dans DMC .....	18
II.6. DMC sans contraintes.....	20
II.7 Exemple illustratif .....	21
II.8 Étude de l'influence des paramètres de réglage .....	24
II.8.1 Horizon de commande $N_u$ .....	24
II.8.2 Horizon de prédiction $N_p$ .....	24
II.9 Conclusion .....	25

### Chapitre 3 : Optimisation avec contraintes :

III.1 Introduction .....	26
III.2 Fonction soumise à des contraintes du type inégalité .....	26
III.3 Utilisation de fonctions d'écart.....	26
III.4 Paramètres de Kuhn-Tucker.....	27
III.5 Fonction soumise à des contraintes mixtes .....	28
III.6 Programmation quadratique(QP) .....	29
III.7 DMC avec contraintes .....	30
III.8 Conclusion.....	34

### Chapitre 4 : Commande DMC d'une colonne de distillation:

IV.1 Introduction .....	35
IV.2 Généralité sur le fonctionnement des colonnes de distillation.....	35
IV.3 Principe de fonctionnement.....	36
IV.4 Présentation de la colonne de distillation.....	36

IV.5 Modèle de la colonne de distillation étudiée.....	38
IV.6 Analyse des interactions par la RGA .....	39
IV.7 Méthode de la Matrice des Gains Relatif.....	40
IV.8 Calcul de la Matrice des Gains Relatifs .....	41
IV.9 Interprétation de la Matrice des Gains Relatifs.....	41
IV.10 Limitation de la Matrice des Gains Relatifs.....	42
IV.10.1 Analyse des interactions dans la colonne de distillation.....	42
IV. 11 Commande DMC de la colonne de distillation.....	43
IV.12 Conclusion .....	47
Conclusion générale .....	48

## Liste des Figures

<b>Figure 1.1</b> : principe de la commande prédictive .....	06
<b>Figure 1.2</b> : stratégie de la commande prédictive .....	07
<b>Figure 1.3</b> : trajectoire de référence.....	09
<b>Figure 2.1</b> : réponse indicielle de processus de 1 <sup>er</sup> ordre.....	21
<b>Figure 2.2</b> : commande du processus .....	23
<b>Figure 2.3</b> : sortie du processus .....	23
<b>Figure 3.1</b> : Sortie et commande du système .....	32
<b>Figure 3.2</b> : Sortie et commande du système .....	33
<b>Figure 4.1</b> : colonne de distillation.....	37
<b>Figure 4.2</b> : schéma bloc d'une colonne de distillation.....	38
<b>Figure 4.3</b> : commande et sortie de la colonne de distillation.....	45
<b>Figure 4.4</b> : commande et sortie de la colonne de distillation.....	45

## Liste des Tableaux

<b>Tableau 2.1</b> : coefficients de la réponse indicielle du processus de 1er ordre .....	22
<b>Tableau 3.1</b> : conditions de Kuhn-Tucker.....	27
<b>Tableau 3.2</b> : coefficients de la réponse indicielle du processus .....	31

## Liste des indices

$t$	temps
$f_i$	la sortie échantillonnée
$y(t)$	la sortie du modèle
$u(t)$	la commande appliquée au système
$g_i$	les coefficients de la réponse indicielle
$\Delta u_{t-1}$	l'incrément de commande
$N_s$	le temps de stabilisation du processus
$z^{-1}$	opérateur retard
$A(z^{-1})$	Polynôme de degré $na$
$B(z^{-1})$	Polynôme de degré $nb$
$x_t$	terme lié aux perturbations
$R_j$	matrice de pondération de la commande
$Q_j$	matrice de pondération des états
$N_1$	début de prédiction
$N_2$	l'horizon de prédiction maximale
$N_u$	l'horizon de commande
$N_p$	l'horizon de prédiction
$G$	matrice dynamique
$y^d$	sortie désirée
$J$	Critère de performance
$y_{\text{ref}}$	trajectoire de référence
$h_j(x)$	contraintes d'inégalité
$f(x)$	fonction quelconque
$E(x_j)$	fonctions d'écart
$g_j(x)$	contraintes d'égalité
$k$	temps discret
$\hat{y}(k+1 k)$	la sortie prédite
$\lambda_i$	multiplicateurs de Lagrange
$L(x, \mu)$	fonction Lagrangienne
$\mu_j$	paramètres de Kuhn-Tucker

$\nabla_x(x, \lambda)$	gradient de $L$ par rapport à $x$
$\nabla_\lambda(x, \lambda)$	gradient de $L$ par rapport à $\lambda$
$Q$	matrice constante symétrique
$A$	constante de dimension $p \times n$
$C$	constante de dimension $q \times n$
$r$	vecteur constant de dimension $1 \times n$
$b$	vecteur constant de dimension $1 \times p$
$d$	vecteur constant de dimension $1 \times q$
$c$	matrice symétrique
$x$	vecteur
$b$	vecteur
$x_d$	le distillat
$x_b$	le résidu
$x_d$	le reflux liquide
$x_v$	le reflux vapeur
$x_f$	l'alimentation qui représente la perturbation
$k_s$	matrice des gains statiques



## Liste des abréviations

MPC	Model Prédictive Control
DMC	Dynamic Matrix Control
GPC	Generalized Predictive Control
IDCOM	Identification et Commande
SMOC	Shell Multivariable Optimizing Control
SISO	Single Input Single Output
LTI	Linear Time invariant
TRBF	temps de réponse en boucle fermée
MIMO	Multiple Input Multiple Output
QP	Programmation quadratique
RGA	Relative Gain Array

La commande prédictive à base de modèle (MPC, sigle Anglais correspondant à Model Predictive Control) connue aussi sous l'appellation de commande à horizon fuyant ou glissant (Receding Horizon Control or Moving Horizon Control) est apparu au début de la décennie 60.

Cette commande est devenue de plus en plus populaire, ces dernières années, dans le milieu industriel pour sa tolérance envers différents types de systèmes et le respect des contraintes imposées.

L'idée principale de la commande prédictive est basée sur l'utilisation d'un modèle du système à commander pour prédire sa sortie sur un certain horizon, les objectifs de commande sont spécifiés par un critère à minimiser et de contraintes à imposer sur les variables d'état, de commandes et de sorties [1, 2, 3]. Par conséquent, la commande à appliquer, à chaque instant d'échantillonnage, est obtenue en résolvant un problème d'optimisation avec contraintes en un temps inférieur à la période d'échantillonnage [4, 5]. La nature du problème d'optimisation dépend généralement du type du modèle utilisé pour la prédiction puisque le critère est généralement quadratique et exprime des objectifs de poursuite et de minimisation d'énergie [2, 3]. Lorsque le modèle est linéaire, la solution analytique du problème d'optimisation existe et simple à calculer et les performances seront meilleures puisque l'optimum global est atteint [6, 7, 1, 2].

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à la commande prédictive. L'objectif principal du travail est d'étudier la commande par matrice dynamique (DMC, Dynamic Matrix Control) avec et sans contraintes et d'étudier les performances de cet algorithme.

Le mémoire comprend quatre chapitres:

Le premier chapitre a pour objectif de proposer un bref historique de cette approche et la définition de quelques concepts de la commande prédictive tels que son principe de fonctionnement et ses éléments.

Le deuxième chapitre est consacré à la commande par matrice dynamique DMC. Pour montrer l'intérêt de l'approche de commande, les performances de cette dernière sont évaluées

dans le cas de la présence de perturbations et sans la prise en charge des contraintes. L'influence des paramètres de réglage sur les performances est examinée par simulation.

Le troisième chapitre, présente les méthodes de résolution d'un problème d'optimisation avec contraintes en particulier la programmation quadratique. Une application à la commande par matrice dynamique avec contraintes est présentée.

Dans le quatrième chapitre, nous appliquons la commande par matrice dynamique à la commande d'une colonne de distillation.

Notre travail se termine par une conclusion générale.

## I.1 Introduction

La commande prédictive à base du modèle c'est une approche de commande Avancée [5]. Cette commande est plus utilisée principalement dans les raffineries de pétrole, dans l'industrie de l'automobile, dans défense, dans métallurgie, et autres domaines [8,9]. L'idée de la commande prédictive est déjà introduite dans la commande optimale [7] et à [8] avec sa forme de commande prédictive basée sur un modèle en utilisant une méthode de programmation linéaire.

Le terme commande prédictive ne désigne pas une stratégie de commande spécifique mais un ensemble d'algorithmes qui utilisent explicitement le modèle du système dans un problème d'optimisation, à résoudre, pour déterminer la commande à appliquer.

La commande prédictive basée sur le modèle présente des avantages qui ont fait d'elle une approche de commande attractive. Parmi ces avantages, on peut citer [1,2]:

- Elle permet de respecter les différentes contraintes sur les états, les commandes et les sorties,
- Elle évite les variations excessives pour les variables de commandes,
- Elle peut s'appliquer à des systèmes avec ou sans retard,
- Son réglage est aisé et son principe est intuitif,
- Elle est assez robuste aux erreurs du modèle,
- Elle est applicable sur une large classe de systèmes stables, instable en boucle ouverte, à phase minimale et avec retard.

Le but de la stratégie est de faire coïncider la sortie du processus avec une consigne dans le future et sur un horizon fini.

## I.2 Commande prédictive généralisée (GPC)

La commande prédictive généralisée, 'GPC', (Generalized Predictive Control) est le nom employé par Clarke [7], Mohtadi et Tuffs dans leur formulation proposée de la commande prédictive à base de modèle. L'appellation GPC a été depuis largement adoptée comme une dénomination d'une classe de méthodes de contrôles prédictifs à caractères adaptatifs [12].

La GPC est une structure complète qui s'assure de fournir un système corrigé stable pour un jeu de paramètres élaboré. Cette méthodologie permet de résoudre des problèmes de

- Processus à déphasage non minimal
- Système intrinsèquement instable ou possédant des pôles mal amortis
- Système avec retard variables ou inconnus
- Système d'ordre inconnu. [20]

La commande prédictive c'est la résolution répétée à chaque pas de temps d'un problème de commande optimale : 'comment aller de l'état actuel à un objectif de manière optimale en satisfaisant des contraintes' [13], [14].

La GPC est basée sur le modèle du processus utilisé dans le but de prédire le comportement du processus. Le régulateur prédictive GPC calcul la séquence de la commande future qui résulte de la sortie prédite du processus. Le premier élément de la séquence de commande est seulement appliqué, et le reste rejeté car une autre séquence est prête à l'instant futur et ceci est connu par le principe de l'horizon mobile.

### **I.3 Principe de la commande prédictive**

Le principe de la commande prédictive consiste à créer pour le système à commander un effet anticipatif par rapport à une trajectoire à suivre connue à l'avance, en se basant sur la prédiction du comportement futur du système et en minimisant l'écart de ces prédictions par rapport à la trajectoire au sens d'une certaine fonction coût, tout en respectant des contraintes de fonctionnement. Cette idée est simple et pratiquée de façon assez systématique dans la vie quotidienne. Par exemple, le conducteur d'un véhicule connaît la trajectoire de référence désirée à l'avance (la route) sur un horizon de commande fini (son champ visuel), et en prenant en compte les caractéristiques de la voiture (modèle mental du comportement du véhicule), il décide quelles actions (accélérer, freiner ou tourner le volant) qu'il faut réaliser afin de suivre la trajectoire désirée. Seule la première action de conduite est exécutée à chaque instant, et la procédure est répétée à nouveau pour les prochaines actions. [22]

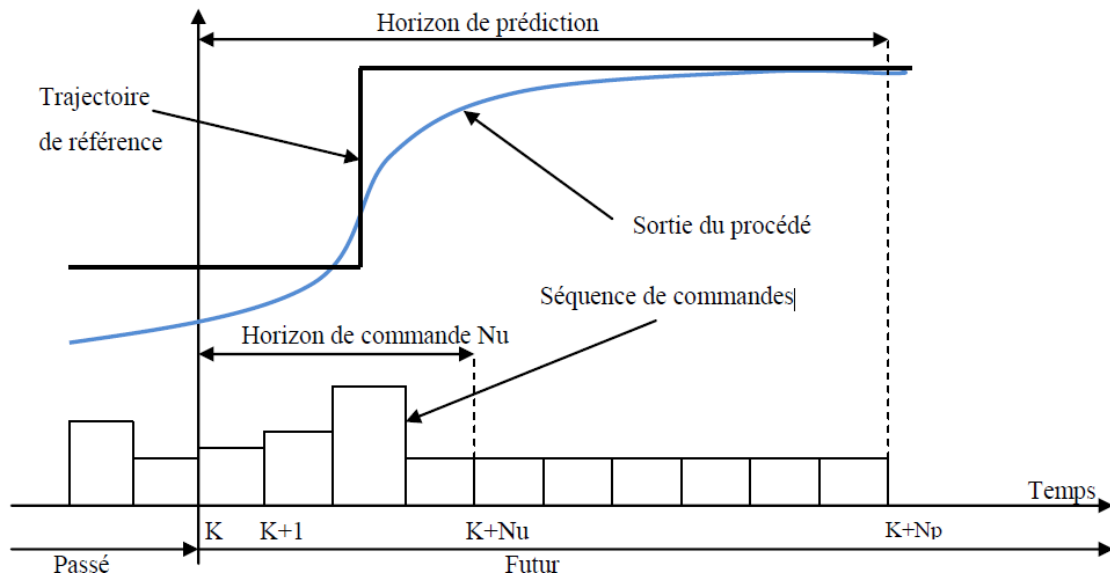
La commande MPC (Model Predictive Control) présente un certain nombre d'avantages par rapport aux autres méthodes, parmi lesquels on trouve :

- Empêcher tout mouvement excessif des variables d'entrée.

- Elle peut être utilisée pour commander une grande variété de processus, ceux qui sont avec des dynamiques simples à ceux plus complexes, par exemple, les systèmes à retard, ou instable.
- Le réglage de ses paramètres relativement facile la rend accessible aux personnes avec des connaissances limitées en automatique.
- Le cas multivariable se traite facilement.
- Son caractère prédictif permet de compenser les retards et les temps morts.
- Le traitement de contraintes imposées sur le système à commander peut être inclus dans l'obtention de la loi de commande.
- Elle est très performante lorsque les consignes ou trajectoires à suivre sont connues à l'avance (ce qui est le cas dans plusieurs processus industriels comme les machines numériques et les robots). [21]

La détermination de la loi de commande prédictive se fait par résolution, d'un problème de commande optimale à horizon fini comme il est illustré dans la figure suivante. À partir d'une trajectoire de référence à suivre connue à l'avance, en faisant à chaque période d'échantillonnage, les étapes suivantes :

1. Calculer les prédictions des variables de sortie  $\hat{y}$  sur un horizon de prédiction sur la sortie  $N_p$ .
2. Minimiser un critère à horizon fini en fonction de : erreurs de prédictions futures, écarts entre la sortie prédite du système et la consigne future.
3. Obtenir une séquence de commandes future sur un horizon de commande inférieure ou égale à  $N_p$ .
4. Appliquer uniquement la première valeur de cette séquence sur le système.
5. Répéter ces étapes à la période d'échantillonnage suivante, selon le principe de l'horizon fuyant. [18] L'ensemble est résumé sur la figure suivante :



**Figure 1.1** : principe de la commande prédictive

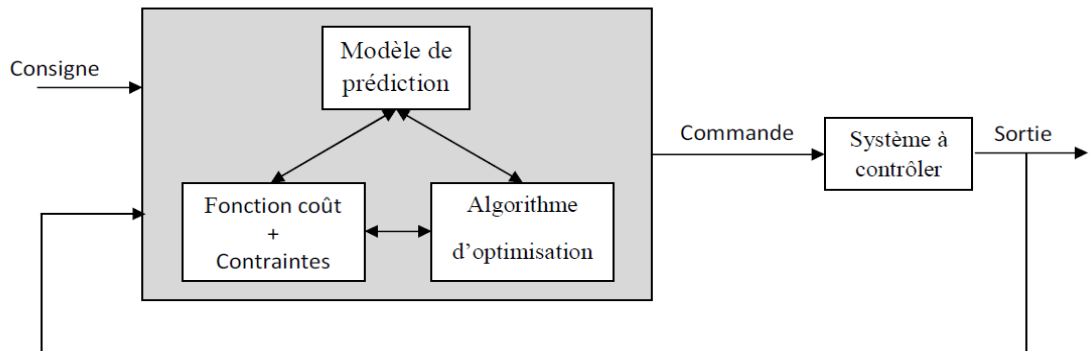
#### I.4 Éléments d'une commande prédictive

Tous les algorithmes MPC possèdent des éléments communs et différentes options peuvent être choisies pour chacun de ces éléments, donnant lieu à différents algorithmes. Ces éléments sont :

- modèle de prédiction,
- fonction objectif,
- algorithmes pour l'obtention du droit de contrôle.

#### I.5 Modèle du système

Le modèle comprend généralement deux parties: le modèle du système et le modèle de perturbation. Le modèle de processus représente généralement les relations entrées-sorties du système, et le modèle de perturbation est souvent utilisé pour représenter la perturbation ou simplement utilisé pour approximer les erreurs de modélisation. Il existe différentes formes des modèles utilisés dans les MPC, mais ils doivent être toujours de nature discrète puisque la commande prédictive est une commande numérique. Les formes couramment utilisées sont du type entrée-sortie, elles sont présentées ci-après.



**Figure 1.2** : stratégie de la commande prédictive

### I.5.1 Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle est donnée comme suit

$$y_t = \sum_{i=1}^{\infty} f_i u_{t-i}$$

Où  $f_i$  représentent les coefficients de la réponse impulsionnelle (les valeurs de la sortie, aux instants d'échantillonnage, lorsque l'entrée est une impulsion de Dirac).

Souvent, cette somme est tronquée et la seule valeur considérée est  $N_s$ , où  $N_s$  est le temps de stabilisation du processus, c'est-à-dire à partir de  $N_s+1$ , les réponses impulsionnelles sont approximativement nulles. Dans ce cas, on a

$$y_t = \sum_{i=1}^{N_s} f_i u_{t-i} = (f_{1z^{-1}} + f_{2z^{-2}} + \dots + f_{N_s z^{-N_s}}) u_t$$

### I.5.2 Réponse indicielle

Supposant que nous avons un système SISO discret linéaire invariant dans le temps (LTI) avec une entrée  $u(t)$  et sortie  $y(t)$  ( $t \in \mathbb{Z}$ ). La réponse indicielle du système est générée

par un échelon unitaire avec  $U(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ 1 & \forall t \geq 0 \end{cases}$

$$y_t = \sum_{i=1}^{\infty} g_j \Delta u_{t-i}$$



Avec  $y_t$  la sortie du modèle et  $g_i$  les coefficients de la réponse impulsionnelle

$\Delta u_{t-i}$  est l'incrément de commande d'où:  $\Delta u_t = u_t - u_{t-1}$

- **Fonction de transfert**

$$y_t = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u_t$$

- **Modèle d'état**

$$x_{t+1} = Ax_t + B u_t$$

$$y_t = Cx_t + D u_t$$

## I.6 Fonction objectif

Dans le cas général la commande prédictive consiste à minimiser une fonctionnelle  $J$  appelée critère de performance, fonction coût ou fonction objectif.

Les algorithmes MPC proposent différentes fonctions coûts pour l'obtention de la loi de commande. L'objectif général est :

- la sortie future déterminée doit être suivie d'un signal de référence sur l'horizon considéré
- l'effort de contrôle nécessaire à faire devrait être considéré ainsi dans la fonction objectif.

L'expression générale pour une telle fonction objective est :

$$J = \sum_{j=N_1}^{N_2} [r_{t+j} - \hat{y}(t+j|t)]^T Q_j [r_{t+j} - \hat{y}(t+j|t)] + \sum_{j=1}^{N_u} [\Delta u_{t+j-1}]^T R_j [\Delta u_{t+j-1}] \quad (1.1)$$

Où  $R_j$  et  $Q_j$  sont les matrices de pondération. D'autres paramètres sont discutés ci-après. [19]

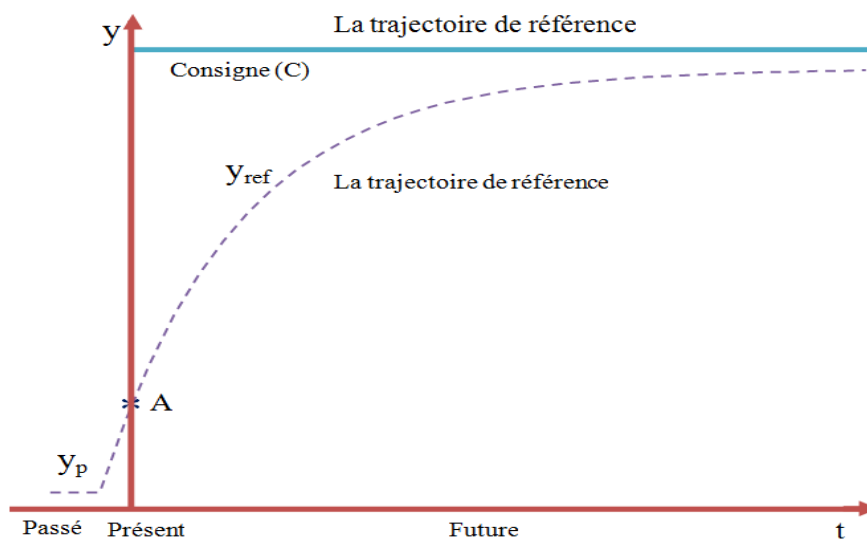
### I.6.1 Horizon de prédiction et de commande

La prédiction commence à l'instant  $N_1$  et  $N_2$  représente l'horizon de prédiction maximale,  $N_u$  est l'horizon de commande.  $N_2 - N_1 + 1$  détermine la fenêtre de prédiction dans laquelle la sortie doit suivre la consigne. Donc, prendre une grande valeur de  $N_1$  implique que ce n'est pas important s'il y a des erreurs dans les premiers instants jusqu'à  $N_1$ . Prendre une

grande valeur de  $N_2 - N_1 + 1$  implique que les erreurs de sortie sont préoccupés par un horizon infini. [18]

### I.6.2 Trajectoire de référence

La consigne est l'objectif final de la commande. Mais cette spécification n'est pas suffisante et il convient de définir comment atteindre cette consigne. La trajectoire de référence est le chemin futur que l'on souhaiterait idéalement que le processus régulé emprunte afin d'atteindre la consigne imposée. C'est elle qui va imposer la dynamique de la boucle fermée. La trajectoire de référence fixe souvent a priori le temps de réponse en boucle fermée (TRBF). Le TRBF est un paramètre de réglage qui est déterminé par la bonne connaissance du procédé. En fait à partir d'un point mesuré en sortie de procédé (point A sur la figure (1)), on peut appliquer la trajectoire de référence ( $y_{ref}$ ) en fonction du temps futur.



**Figure 1.3** : trajectoire de référence

### I.7 Contraintes

Les contraintes caractérisent en général les limitations physiques sur la commande, sur l'état ou sur la sortie du système. Elles sont introduites pour éviter des changements brusques pour la commande. Pour certains systèmes, des contraintes sur les sorties (prédites) doivent être respectées pour des raisons économiques ou de sécurité. Généralement, les contraintes sont instantanées et s'expriment par des inégalités de la forme :

$$\begin{aligned}
 U_{min} &\leq U_t \leq U_{max} && \forall t \\
 y_{min} &\leq \hat{y}(t + j|t) \leq y_{max} && N_1 \leq j \leq N_2 \forall t
 \end{aligned}$$

## I.8 Prédiction

Dans la commande prédictive, un modèle du système n'est pas utilisé pour la conception de la loi de commande, mais il est utilisé pour prédire l'évolution future des sorties du système.

Ces prédictions seront utilisées par la suite pour la détermination de la variable de commande en résolvant un problème d'optimisation.

Comme exemple, considérons le modèle suivant :

$$y(k) = -a y(k-1) + b \Delta u(k-1) \quad (1.2)$$

Les deux premières prédictions futures de la sortie sont données comme suit :

$$\hat{y}(k+1|k) = -a y(k) + b \Delta u(k) \quad (1.3)$$

$$\hat{y}(k+2|k) = -a \hat{y}(k+1|k) + b \Delta u(k+1)$$

$$\hat{y}(k+2|k) = -a(-a y(k) + b \Delta u(k)) + b \Delta u(k+1)$$

$$\hat{y}(k+2|k) = a^2 y(k) - ab \Delta u(k) + b \Delta u(k+1) \quad (1.4)$$

Les autres prédictions sont déterminées de la même manière en utilisant le modèle sous forme matricielle. Les deux premières prédictions sont données

Comme suit:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(k+1|k) \\ \hat{y}(k+2|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ a^2 \end{bmatrix} y(k) + \begin{bmatrix} b & 0 \\ -ab & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Les prédictions (1.3) sont composées de deux termes. Le second terme du côté droit de l'équation (1.3) dépend des entrées futures. Par contre le premier terme dépend seulement des sorties précédentes ou également des entrées précédentes selon la nature système. Ainsi, les prédictions peuvent être décomposées en général en deux parties :

$$\hat{y}(k+j|k) = \hat{y}_{libre}(k+j) + \hat{y}_{forcée}(k+j) \quad (1.4)$$

La réponse libre,  $\hat{y}_{libre}(k+j)$ , correspond à la prédiction de la sortie lorsque la commande est maintenue constante à sa valeur actuelle  $u(k)$  le long de l'horizon de prédiction  $N_p$ . Par contre la réponse forcée  $\hat{y}_{forcée}(k+j)$  correspond à la prédiction de la sortie due aux actions futures  $u(k+j)$ ,  $j=1, \dots, N_p$ . [18]

**I.9 Conclusion**

Dans ce chapitre, on a présenté des généralités sur la commande prédictive. On a axé la présentation sur les différents éléments de la commande prédictive, c'est-à-dire le modèle de prédiction, la fonction objectif, les contraintes, les horizons de commande et de prédiction.

## II.1 Introduction

La commande par matrice dynamique ‘DMC’ (Dynamic Matrix Control) a été développée par Cutler et Ramaker de la société ‘Shell Oil Co’ vers l’année 1980. Cette méthode est largement acceptée et utilisée par les industriels, en particulier dans le secteur de la pétrochimie [15, 16,17]. C'est un algorithme basé sur le modèle de la réponse indicielle. Cependant, l’algorithme DMC est très efficace pour éliminer les erreurs d’état stable.

À nos jours la commande par matrice dynamique est quelque chose plus qu’une commande et une partie de son succès est due à son application facile à des systèmes multivariables avec prise en charge des contraintes.

## II.2 Modèle de la réponse indicielle

Supposant que nous avons un système au repos SISO discret linéaire invariant dans le temps (LTI) avec une entrée  $\Delta u$  donnée par :

$$\{0, s_1, s_2, \dots, s_N, s_{N+1}\}$$

Ici nous supposons que le système est résolu exactement après N échelon. La réponse indicielle  $\{s_1, s_2, \dots, s_N\}$  constitue un modèle complet du système qui nous permet de calculer sa sortie pour toute séquence de l’entrée comme suit

$$y(k) = \sum_{l=1}^N s_l \Delta u(k-l) + s_{N+1} u(k-N-1) \quad (2.1)$$

$$\text{Où : } \quad \Delta u(k-l) = u(k-l) - u(k-l-1)$$

$$\text{Notez que, lorsque : } \quad s_N = s_{N-1} \quad (2.2)$$

Est équivalent à :

$$y(k) = \sum_{l=1}^{N-1} s_l \Delta u(k-l) + s_{N+1} u(k-N) \quad (2.3)$$

La réponse indicielle du modèle (2.1) peut être utilisée uniquement dans le cas des processus

stables. Pour un processus MIMO avec  $m$  entrées et  $r$  sorties, on obtient une matrice du coefficient de la réponse indicielle.

$$\begin{bmatrix} s_{11l} & s_{12l} & \dots & s_{1ml} \\ s_{21l} & s_{22l} & \dots & s_{2ml} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{r1l} & s_{r2l} & \dots & s_{rml} \end{bmatrix}$$

Où  $s_{ijl}$  est le  $l$ -ième coefficient de la réponse indicielle relative à la  $j$ -ième entrée jusqu'à la  $i$ -ième sortie

Les fonctions d'identification disponibles dans la boîte à outils Matlab MPC sont conçues pour un système Multi-Entrée-Une Seule Sortie (MISO) systèmes.

$$\tilde{y}_l = \begin{bmatrix} y_i(1) \\ y_i(2) \\ y_i(3) \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \tilde{u} = \begin{bmatrix} u_1(1) & u_2(1) & \dots & u_m(1) \\ u_1(2) & u_2(2) & \dots & u_m(2) \\ u_1(3) & u_2(3) & \dots & u_m(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Et les coefficients de la réponse indicielle sont résumés dans la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} s_{i11} & s_{i21} & \dots & s_{iml} \\ s_{i12} & s_{i22} & \dots & s_{i2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{i1l} & s_{i2l} & \dots & s_{iml} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{bmatrix}$$

Pour l'estimation des coefficients de la réponse indicielle on écrit le modèle SISO sous la forme :

$$\Delta y(k) = \sum_{l=1}^N h_l \Delta u(k-l)$$

et estimé premièrement le coefficient  $h_1$ .

$$\Delta y(k) = y(k) - y(k-1),$$

$$h_l = s_1 - s_{l-1}, s_l \text{ Est donne par :}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k \Delta u_{t-k}$$

### II.3 Modèle de prédiction

Le modèle utilisé pour la prédiction dans l'algorithme DMC est la réponse indicielle.

Considérons la réponse indicielle du système :

$$y_t = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \Delta u_{t-k}$$

Qu'on peut mettre sous la forme suivante :

$$y_t = \sum_{k=1}^{N_s} g_k \Delta u_{t-k} + \sum_{k=N_s+1}^{\infty} g_k \Delta u_{t-k} \quad (2.4)$$

Où le second terme de l'équation ci-dessus représente la réponse due à des mesures de commande qui ont été prises à partir de l'infini jusqu'à  $t - N_s - 1$ , et  $y$  compris  $N_s$  qui est le temps de stabilisation en termes d'échantillons. En notant le deuxième terme par  $Z_t$  ; l'équation (2.4) s'écrit

$$y_k = \sum_{k=1}^{N_s} g_k \Delta u_{t-k} + z_t$$

Ainsi, on remarque bien que la réponse indicielle infinie (2.4) du système fait intervenir une réponse indicielle finie qu'on peut exploiter pour l'étape de prédiction c'est-à-dire :

$$\hat{y}(t+p|t) = \sum_{k=1}^{N_s} g_k \Delta u_{t+p-k} + z_{t+p} \quad (2.5)$$

Comme cela a été indiqué précédemment, la réponse du système prédite par le modèle peut être divisée en deux parties : libre et forcée. Ainsi, l'équation (2.5) peut être décomposé en deux termes : le premier terme contient les actions de commande futures ( $\Delta u_t, \Delta u_{t+1}, \dots$ ) et le second terme contient les actions de commande passées ( $\Delta u_{t-1}, \Delta u_{t-2}, \dots$ ) ce qui donne

$$\hat{y}(t+p|t) = \sum_{k=1}^p g_k \Delta u_{t+p-k} + \sum_{k=p+1}^{N_s} g_k \Delta u_{t+p-k} + z_{t+p}$$



Cette dernière équation peut être arrangée pour faire apparaître les deux termes de la sortie (forcée et libre) comme suit :

$$\hat{y}(t+p|t) = \sum_{k=1}^p g_k \Delta u_{t+p-k} + y_{t+p}^*$$

Où le terme

$$y_{t+p}^* = \sum_{k=1}^{N_s} g_k \Delta u_{t+p-k} + z_{t+p} \quad (2.6)$$

Représente le terme libre :

$$y_{f,t+p} = y_{t+p}^*$$

Le terme restant représente le terme forcé qui est l'évolution de la réponse du système à partir de l'instant  $t$  dû à l'application des actions de la commande futures.

Le critère considéré dans un algorithme DMC consiste à minimiser la différence entre la consigne désiré et la sortie prédite par le modèle le long de l'horizon de prédiction  $N_p$ ,

Les sorties prédites sont données comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+1|t) &= y_{t+1}^* + g_1 \Delta u_t \\ \hat{y}(t+2|t) &= y_{t+2}^* + g_2 \Delta u_t + g_1 \Delta u_{t+1} \\ \hat{y}(t+3|t) &= y_{t+3}^* + g_3 \Delta u_t + g_2 \Delta u_{t+1} + g_1 \Delta u_{t+2} \\ &\dots \\ \hat{y}(t+Nu|t) &= y_{t+Nu}^* + g_{Nu} \Delta u_t + g_{Nu-1} \Delta u_{t+1} + \dots + g_1 \Delta u_{t+Nu-1} \quad (2.7) \\ &\vdots \\ \hat{y}(t+N_p|t) &= y_{t+N_p}^* + g_{N_p} \Delta u_t + g_{N_p-1} \Delta u_{t+1} + \dots + g_1 \Delta u_{t+N_p-1} \end{aligned}$$

Notons que  $\Delta u_{t+Nu} = \Delta u_{t+Nu+1} = \dots = \Delta u_{t+Nu-1} = 0$  car l'action de commande est maintenue constante à partir de l'instant  $k = Nu$

Les prédictions (2.7) peuvent être écrites sous la forme matricielle comme suit :

$$\hat{y} = y^* + G \Delta u$$

Avec :

$$\hat{y} \triangleq \begin{bmatrix} \hat{y}(t+1|t) \\ \hat{y}(t+2|t) \\ \vdots \\ \hat{y}(t+N_p|t) \end{bmatrix}, y^* \triangleq \begin{bmatrix} y_{t+1}^* \\ y_{t+2}^* \\ \vdots \\ y_{t+N_p}^* \end{bmatrix}, \Delta u \triangleq \begin{bmatrix} \Delta u_t \\ \Delta u_{t+1} \\ \vdots \\ \Delta u_{t+N_u-1} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{N_u} & s_{N_u-1} & s_{N_u-2} & \dots & s_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{N_p} & s_{N_p-1} & s_{N_p-2} & \dots & s_{N_p-N_u+1} \end{bmatrix}$$

G est appelée matrice dynamique. [19]

#### II.4 Synthèse d'un correcteur DMC

L'objectif consiste à poursuivre une trajectoire de référence, le long de l'horizon de prédiction, donnée comme suit :

$$y^d = \begin{bmatrix} y^d(k+1) \\ y^d(k+2) \\ \vdots \\ y^d(k+N_p) \end{bmatrix}$$

Ainsi pour déterminer la séquence des commandes à appliquer, il suffit de résoudre à chaque instant k, le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{\Delta u} J(\Delta u) = (y^d - \hat{y})^T Q (y^d - \hat{y})$$

Sujet à :

$$\hat{y} = y^* + G \Delta u$$

En substituant  $\hat{y}$  dans le critère J, il vient :

$$\min_{\Delta u} J(\Delta u) = (y^d - y^* - G \Delta u)^T Q (y^d - y^* - G \Delta u)$$

La solution optimale est obtenue comme suit :

$$\nabla_{\Delta u} j(\Delta u) = -2G^T Q^T (y^d - y^* - G\Delta u) = 0$$

Ce qui donne :

$$\Delta u = (G^T Q^T G)^{-1} G Q^T (y^d - y^*)$$

## II.5 Perturbations dans DMC

Jusqu'à maintenant, nous n'avons pas inclus un terme de perturbation dans le modèle DMC. Il a été supposé que la perturbation reste constante le long de l'horizon de prédiction, c'est à dire la perturbation est supposée du type échelon. Alternativement, on peut considérer que le modèle de perturbation est spécifié comme  $\frac{1}{1-z^{-1}}$

Avec la prise en considération de la perturbation, la réponse libre, exprimée par l'équation (2.6), a maintenant une durée supplémentaire de cette perturbation  $v_{t+p}$ , c'est à dire

$$y_{t+p}^* = z_{t+p} + \sum_{k=p+1}^{N_s} g_k \Delta u_{t+p-k} + v_{t+p}$$

Maintenant, pour la perturbation de type échelon, comme supposé dans DMC, nous pouvons la calculer comme suit :

$$v_{t+p} = v_t = y_t - \hat{y}(t | t-1)$$

Ou, la première étape de prédiction  $\hat{y}(t | t-1)$  est donnée par :

$$\hat{y}(t | t-1) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \Delta u_{t-k}$$

Par conséquent

$$v_{t+p} = v_t = y_t - \sum_{k=1}^{\infty} g_k \Delta u_{t-k}$$

Comme

$$z_t = \sum_{k=N_s+1}^{\infty} g_k \Delta u_{t-k}$$

$$z_{t+p} = \sum_{i=N_s+1}^{\infty} g_i \Delta u_{t+p-i}$$

Par conséquent

$$y_{t+p}^* = \sum_{i=N_s+1}^{\infty} g_i \Delta u_{t+p-i} + \sum_{k=p+1}^{N_s} g_k \Delta u_{t+p-k} + y_t - \sum_{k=1}^{\infty} g_k \Delta u_{t-k}$$

$$y_t + \sum_{k=p+1}^{N_s} g_k \Delta u_{t+p-k} + \sum_{i=N_s+1}^{\infty} g_i \Delta u_{t+p-i} - \sum_{k=1}^{\infty} g_k \Delta u_{t-k}$$

$$y_t + \sum_{i=p+1}^{\infty} g_i \Delta u_{t+p-i} - \sum_{k=1}^{\infty} g_k \Delta u_{t-k}$$

Par le changement d'indice de variable  $j = k-p$ , c'est à dire,  $k = j+p$  dans le second terme sur le côté droit de l'équation ci-dessus (2.8), nous obtenons

$$y_{t+p}^* = y_t + \sum_{j=1}^{\infty} g_{j+p} \Delta u_{t-j} - \sum_{k=1}^{\infty} g_k \Delta u_{t-k}$$

En changeant l'indice de variable de  $j$  par  $k$  dans le second terme du coté droit de l'équation (2.8) à nouveau, nous obtenons

$$y_{t+p}^* = y_t - \sum_{k=1}^{\infty} (g_k - g_{k+p}) \Delta u_{t-k}$$

L'état stable est atteint après  $N_s$  échantillons, alors

$$g_{N_s+1} = g_{N_s+2} = \dots = g_{N_s+\infty}$$

Par conséquent, nous pouvons écrire l'expression générale pour la réponse libre de DMC [18]

$$y_{t+p}^* = y_t - \sum_{k=1}^{N_s} (g_k - g_{k+p}) \Delta u_{t-k}$$

## II.6 DMC sans contrainte

Poursuivre la trajectoire de consigne le long de l'horizon de prédiction donné comme suit :

$$r = \begin{bmatrix} r_{t+1} \\ r_{t+2} \\ \vdots \\ r_{t+N_2} \end{bmatrix}$$

Pour déterminer la séquence des commandes à appliquer, il suffit de résoudre à chaque instant  $k$  le problème de minimisation suivant :

$$\min_{\Delta u} J(\Delta u) = (r - \hat{y})^T Q (r - \hat{y})$$

Sujet à :

$$\hat{y} = y^* + G \Delta u$$

Où  $Q$  est une matrice de pondération. En substituant  $\hat{y}$  dans le critère  $J$ , il vient :

$$\min_{\Delta u} J(\Delta u) = (r - y^* - G \Delta u)^T Q (r - y^* - G \Delta u)$$

La solution optimale est obtenue comme suite :

$$\frac{\partial J}{\partial \Delta u} = -2 G^T Q^T (r - y^* - G \Delta u) = 0$$

Ce qui donne :

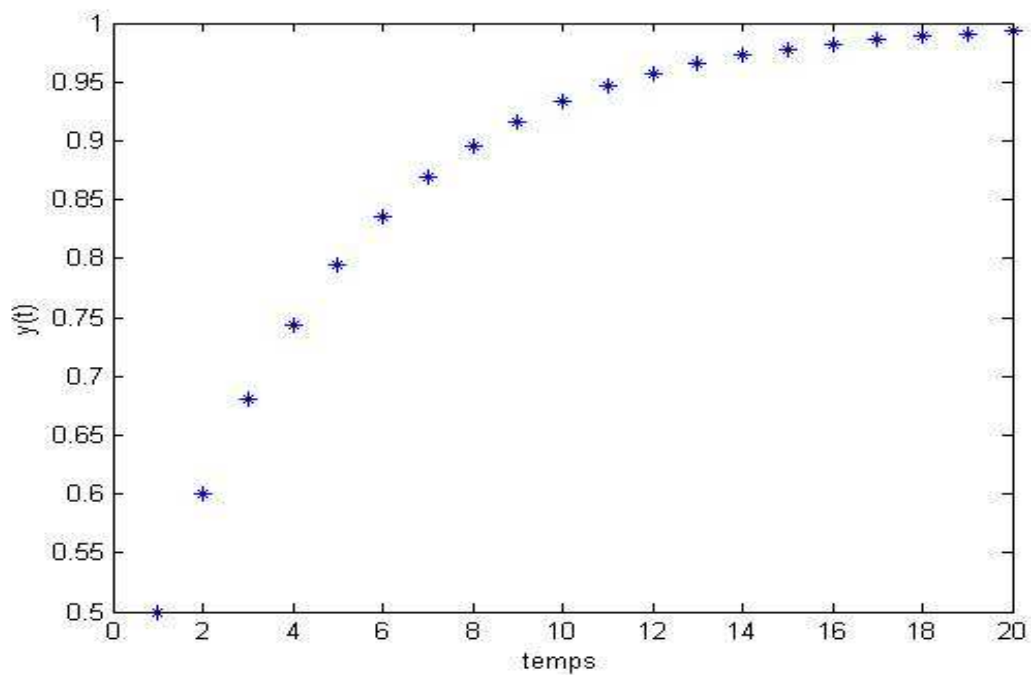
$$\Delta u = (G^T Q^T G)^{-1} G Q^T (y^d - y^*)$$

## II.7 Exemple illustratif

Pour l'évaluation des performances de la commande par matrice dynamique 'DMC', on prend le modèle du premier ordre suivant :

$$y(k+1) = (1 - dt) \times y(k) + dt \times u(k)$$

Une condition initiale  $y(1) = 0$  ;  $dt = 1$  ;  $u(k) = 1$  ;  $n = 20$



**Figure 2.1** : La réponse indicielle de processus de 1<sup>er</sup> ordre

Les coefficients de la réponse indicielle du système avec  $dt=1$  sont les suivants :

$y_1=0.5000$	$y_2=0.6000$	$y_3=0.6800$	$y_4=0.7440$	$y_5=0.7952$	$y_6=0.8362$
$y_7=0.8689$	$y_8=0.8951$	$y_9=0.9161$	$y_{10}=0.9329$	$y_{11}=0.9463$	$y_{12}=0.9571$
$y_{13}=0.9656$	$y_{14}=0.9725$	$y_{15}=0.9780$	$y_{16}=0.9824$	$y_{17}=0.9859$	$y_{18}=0.9887$
$y_{19}=0.9910$	$y_{20}=0.9928$				

**Tableau 2.1.** Les coefficients de la réponse indicielle du processus de 1er ordre.

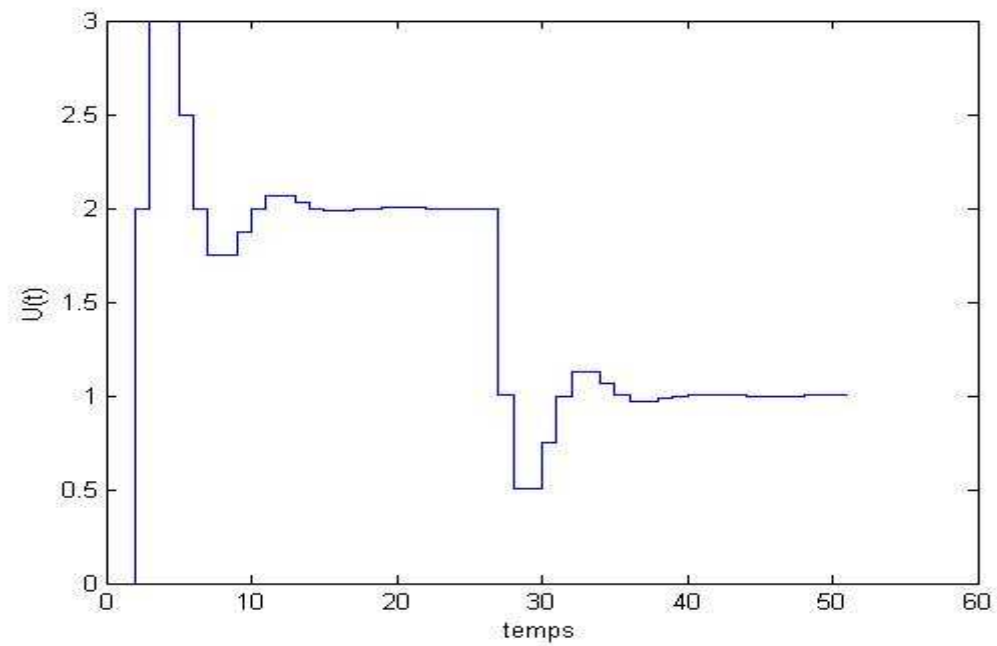
Pour un horizon de prédiction égale à 10 et un horizon de commande égale à 5, la matrice dynamique est obtenue à partir des coefficients de la réponse indicielle comme suit :

$$G = \begin{bmatrix} 0.50 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.60 & 0.50 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.68 & 0.60 & 0.50 & 0.00 & 0.00 \\ 0.74 & 0.68 & 0.60 & 0.50 & 0.00 \\ 0.79 & 0.74 & 0.68 & 0.60 & 0.50 \end{bmatrix}$$

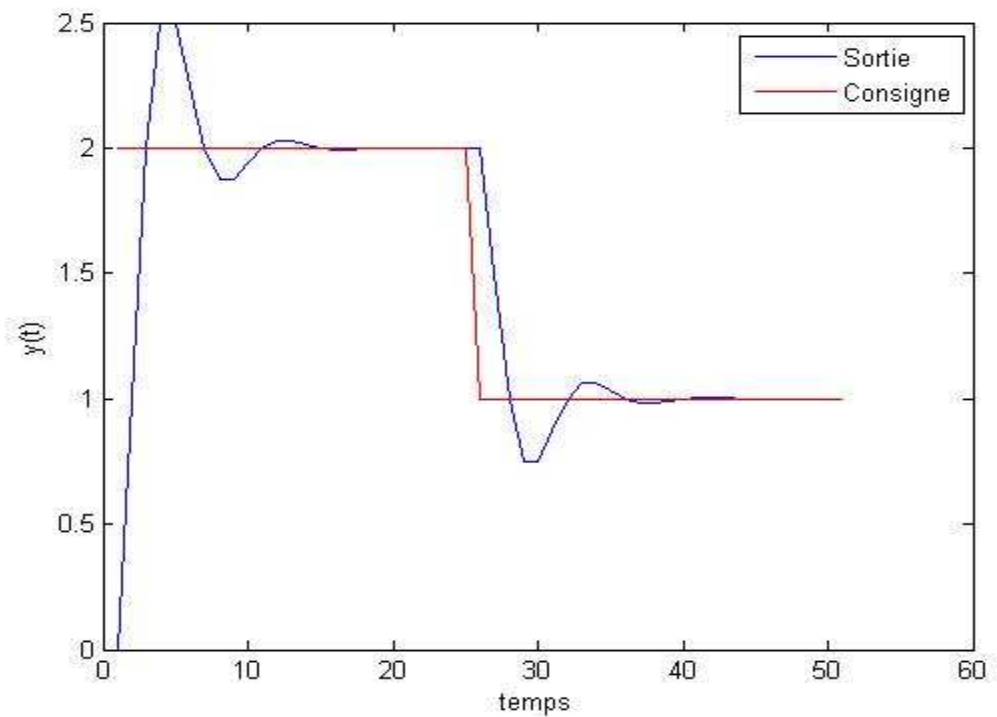
Nous calculons la matrice  $((G^T G)^{-1} G^T (r - y(k)))$  et d'après la notion de l'horizon mobile, seul le premier élément de la commande est calculé et appliqué pour donner la commande  $u(t)$ , et à l'instant  $t+1$  tous le calcul est répété pour avoir  $u(t+1)$ .

Alors la première ligne qui présente le vecteur  $K$  est donnée par :

$$[0.000 \quad 2.000 \quad 3.000 \quad 3.000 \quad 2.500 \quad 2.000 \quad 1.750 \quad 1.750 \quad 1.875]$$



**Figure 2.2 :** la commande du processus



**Figure 2.3 :** la sortie du processus

La figure (2.3) représente le résultat de simulation du processus 1<sup>er</sup> ordre, pour une consigne  $r$  égale à 2,  $t \leq 25$  et pour une consigne égale à 1, pour  $t > 25$  la sortie rejoint sa référence avec



Léger dépassement qui peut être annulé en modifiant les paramètres de réglage de l'algorithme.

## II.8 Étude de l'influence des paramètres de réglage

**II.8.1 Horizon de commande  $N_u$**  : il représente le nombre d'actions futures calculées par optimisation du critère pour réduire les erreurs de prédictions. La valeur de ce paramètre influe sur le temps de calcul de la solution optimale. L'augmentation de ce paramètre permet d'accélérer le système, comme le principe de commande prédictive consiste à appliquer seulement la première commande, alors il est inutile de prendre une valeur supérieure à 5.

**II.8.2 Horizon de prédiction  $N_p$**  : il représente le nombre de prédictions utilisées dans le critère à optimiser. L'augmentation de  $N_p$  revient à considérer plus de prédictions, par conséquent la sortie sera bien amortie et les commandes seront de faibles amplitudes, mais leur traitement nécessite un temps de calcul important.

Ainsi, pour le réglage des paramètres d'une commande prédictive, on s'intéresse en particulier à l'ajustement de  $N_u$  et  $N_p$ .

## II.9 Conclusion

L'objectif de la commande DMC est de maintenir la sortie le plus proche possible de la référence désirée dans le sens de moindre carrée. Ainsi les variables manipulées sont choisies pour minimiser une fonction objectif quadratique qui traduit les objectifs de poursuite et de minimisation de l'énergie.

### III.1 Introduction

L'optimisation intervient dans de nombreux domaines : en recherche opérationnelle (problème de transport, économie,...). En analyse numérique (approximation résolution de système linéaires, non linéaires...) en automatique (modélisation de systèmes, filtrage...) en ingénierie (dimensionnement de structures, conception optimale de systèmes (réseaux, ordinateurs...))

Dans ce chapitre, on présente les méthodes de recherche de l'optimum en présence de contraintes de type inégalité et mixtes. Puis on s'intéresse à leur application dans une stratégie de commande par matrice dynamique (DMC) avec contraintes.

### III.2 Fonction soumise à des contraintes du type inégalité

On cherche l'optimum d'une fonction  $f(x)$  de  $R$  soumise à des contraintes d'inégalité  $h_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, q$  c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} & \min_x f(x) \\ & \text{sujet à:} \\ & h_j(x) = 0, j = 1, \dots, q \end{aligned}$$

Les contraintes d'inégalité sont du type inférieur ou égal ( $\leq$ ). Si des contraintes du type supérieur ou égal ( $\geq$ ) sont présentes, il suffit de les exprimer par leur opposé pour se ramener au cas étudié.

### III.3 Utilisation de fonctions d'écart

L'idée principale consiste à introduire des fonctions dites d'écart  $E(x_j), j = n + 1, \dots, n + q$  positives telles que les contraintes du type inégalité  $h_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, q$  : soit transformées en contraintes du type égalité  $g_j(x) = 0, j = 1, \dots, q$  On a ainsi remplacé le problème avec les contraintes du type inégalités par un autre problème avec des contraintes du type égalité dans lequel on a  $(n + q)$  inconnues  $x_i$  et  $q$  variables d'écarts.

Plusieurs choix de fonctions d'écart sont possibles, par exemple les variables  $x_i, i = n + 1, \dots, n + q$  positives telles que :  $g_j(x) = h_j(x) + x_{n+j}, j = 1, \dots, q$ .

Une fois les contraintes sont du type égalités, on peut chercher la solution du problème avec la méthode de Lagrange décrite dans la section II. 6 dans le cas d'une optimisation quadratique.

### III.4 Paramètres de Kuhn-Tucker

D'après Kuhn-Tucker, les conditions nécessaires (non suffisantes) à l'optimum en un certain point d'une fonction  $f(x)$  soumise à  $q$  contraintes d'inégalité  $h_j(x) \leq 0$  sont les suivantes : Si en un point  $x$ ,  $f(x)$  admet un minimum relatif dans  $D$  défini par des relations de Contraintes inégalité :  $h_j(x) \leq 0$ , il existe des paramètres (paramètres de Kuhn-Tucker)

$\mu_j \geq 0$  tels que la fonction Lagrangienne suivante :

$$L(x, \mu) = f(x) + \sum_{j=1}^q \mu_j h_j(x)$$

Vérifie :

1.  $\nabla_x L(x, \mu) = 0$

Contraintes	Problème	
	Minimum	Maximum
$h_j(x) \leq 0$	$\nabla_x L(x, \lambda) = 0$ $\nabla_\lambda L(x, \lambda) \leq 0$ $\mu_j h_j(x) = 0$ $\mu_j \geq 0$	$\nabla_x L(x, \lambda) = 0$ $\nabla_\lambda L(x, \lambda) \leq 0$ $\mu_j h_j(x) = 0$ $\mu_j \leq 0$
$h_j(x) \geq 0$	$\nabla_x L(x, \lambda) = 0$ $\nabla_\lambda L(x, \lambda) \geq 0$ $\mu_j h_j(x) = 0$ $\mu_j \leq 0$	$\nabla_x L(x, \lambda) = 0$ $\nabla_\lambda L(x, \lambda) \geq 0$ $\mu_j h_j(x) = 0$ $\mu_j \geq 0$

**Tableau 3.1** : conditions de Kuhn-Tucker

2.  $\nabla_x L(x, \mu) \leq 0$
3.  $\mu_j h_j(x) = 0; j = 1, \dots, q$
4.  $\nabla_x^2 L(x, \mu) \geq 0$ . (Semi-définie positive)

### Remarque

Lorsque le sens des inégalités des contraintes change, le signe des  $\mu_j$  correspondant change. Il en est de même si au lieu d'un minimum on cherche un maximum. Dans ce dernier cas, la matrice  $\Delta_x^2 L(x, \mu)$  doit être semi-définie négative. Les différents cas possibles sont résumés dans le Tableau 2.

### III.5 Fonction soumise à des contraintes mixtes

Dans le cas où il y a simultanément des contraintes de type inégalité et égalité, on introduit un paramètre pour chaque contrainte. Seuls les paramètres relatifs aux contraintes inégalités sont soumis à des conditions de signe ( $\mu_j \geq 0$ ) et doivent s'annuler lorsque la contrainte correspondante n'est pas saturée. On a coutume d'appeler :

- Multiplicateurs de Lagrange ( $\lambda_i$ ) ceux relatifs aux contraintes égalités ( $g_j(x)$ )
- Paramètres de Kuhn-Tucker ( $\mu_j$ ) ceux relatifs aux contraintes inégalités ( $h_j(x)$ )

La fonction de Lagrange s'écrit :

$$\begin{aligned} L(x, \lambda, \mu) &= f(x) + \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^q \mu_j h_j(x) \\ &= f(x) + \lambda^T g(x) + \mu^T h(x) \end{aligned}$$

Par exemple pour le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} &\min_x f(x) \\ &\text{sujet à:} \\ &g(x) = 0 \\ &h(x) \leq 0 \end{aligned}$$

On a les conditions de Kuhn-Tucker suivante :

$$\begin{aligned} \nabla_{(x,\lambda)} L(x, \lambda, \mu) &= \begin{cases} \nabla_x L(x, \lambda, \mu) = 0 \\ \nabla_\lambda L(x, \lambda, \mu) = 0 \end{cases} \\ \nabla_\mu L(x, \lambda, \mu) &\leq 0 \\ \mu_j h_j(x) &= 0 \\ \mu_j &\geq 0 \end{aligned}$$

### III.6 Programmation quadratique (QP)

La programmation quadratique est un problème d'optimisation. La fonction objectif est quadratique et les contraintes sont linéaires. Sous forme mathématique, on a :

$$\min_x \left( \frac{1}{2} x^T Q x + r x \right)$$

Sujet à :

$$\begin{aligned} Ax - b &= 0 \text{ (} p \text{ contraintes du type égalité)} \\ Cx - d &\leq 0 \text{ (} q \text{ contraintes du type inégalité)} \end{aligned}$$

Avec  $Q$  est une matrice constante symétrique ( $Q = Q^T$ ) de dimension  $n \times n$  et définie positive. Les matrices  $A$  et  $C$  sont constantes et de dimension  $p \times n$  et  $q \times n$  respectivement.  $r$ ,  $b$  et  $d$  sont des vecteurs constants de dimension  $1 \times n$ ,  $1 \times p$  et  $1 \times q$  respectivement.

#### Remarque

Si  $x$ ,  $b$  deux vecteurs et  $C$  est une matrice symétrique ( $C^T = C$ ) de dimensions appropriées, alors

- $f(x) = x^T C x \Rightarrow \nabla_x f(x) = 2C x$
- $f(x) = b x \Rightarrow \nabla_x f(x) = b^T$
- $[bC]^T = C^T b^T$

1. Si le problème est sans contraintes ( $p = q = 0$ ), alors le point critique est :

$$\nabla_x f(x) = Qx + r^T = 0 \Rightarrow x = Q^{-1} r^T$$

Pour étudier la nature du point critique :

$$\nabla_x^2 f(x) = Q^T = Q$$

Donc, il suffit d'étudier les valeurs propres de la matrice ou les déterminants pris en chaînes de la matrice  $Q$ .

2. Si le problème est avec contrainte égalité ( $p \neq 0$ ;  $q = 0$ , on applique la méthode des multiplicateurs de Lagrange, alors :

$$L(x, \lambda) = \frac{1}{2} x^T Q x + r x + \lambda^T (A x - b)$$

Le point critique est donné par :

$$\nabla_x L(x, \lambda) = Q x + A^T \lambda + r^T = 0$$

$$\nabla_\lambda L(x, \lambda) = A x - b = 0$$

$$\begin{bmatrix} Q & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r^T \\ b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -r^T \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -Q^{-1}(r^T + A^T \lambda) \\ \lambda = -[A Q^{-1} A^T]^{-1}(b + A Q^{-1} r^T) \end{cases}$$

3. Dans le cas des contraintes du type inégalité et égalité, on applique les conditions de Kuhn-Tucker. [23]

### III.7 DMC avec contraintes

Les méthodes d'optimisation avec contraintes sont utilisées pour résoudre le problème de commande prédictive avec contrainte sur la commande. Pour évaluer les performances de l'algorithme DMC avec contraintes, nous proposons d'étudier la commande d'un système du premier ordre avec retard. Considérons le procédé décrit par la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{12.8e^{-s}}{16.7s + 1}$$

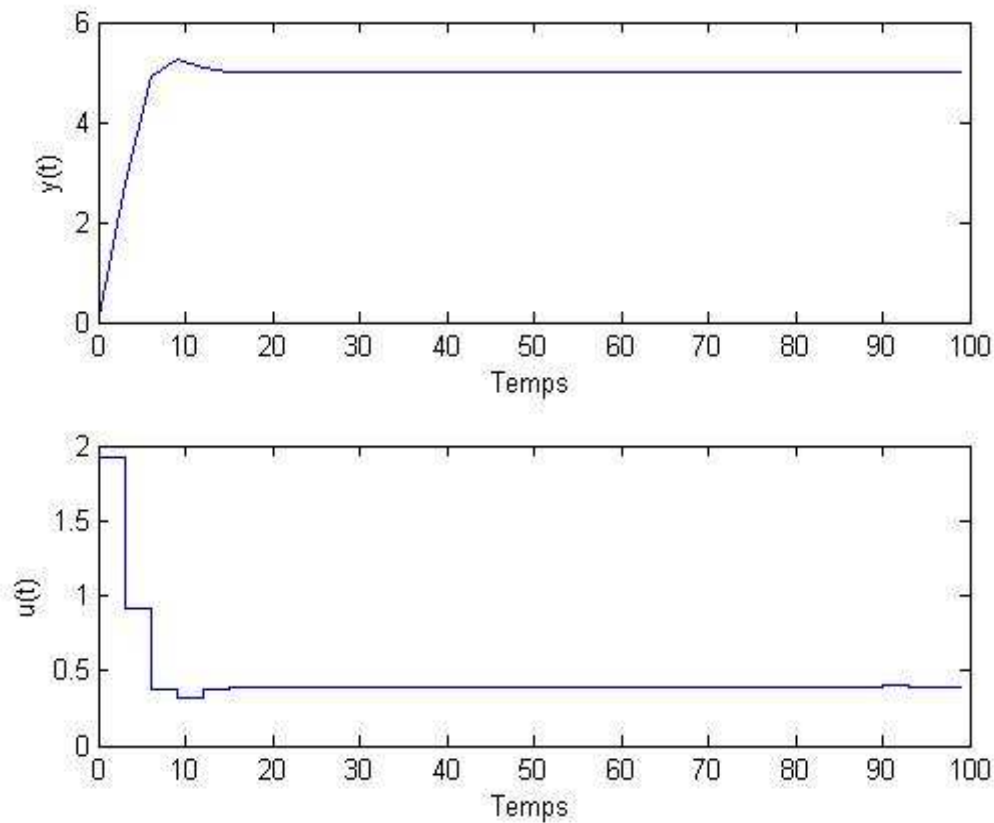
La consigne désirée est  $r = 5$ , un horizon de commande  $M = 2$ , un horizon de prédiction  $P = 6$ ,  $\delta = 3$ , temps final de simulation = 100 et la contrainte sur la variable de commande donnée comme suit  $-\infty \leq U \leq 100$

$y_1 =$ 0.0000	$y_2 =$ 2.9930	$y_3 =$ 5.0467	$y_4 =$ 5.2141	$y_5 =$ 5.0444	$y_6 =$ 4.9885	$y_7 =$ 4.9929	$y_8 =$ 4.9995	$y_9 =$ 5.0006	$y_{10} =$ 5.0002
$y_{11} =$ 5.0000	$y_{12} =$ 5.0000	$y_{13} =$ 5.0000	$y_{14} =$ 5.0000	$y_{15} =$ 5.0000	$y_{16} =$ 5.0000	$y_{17} =$ 5.0000	$y_{18} =$ 5.0000	$y_{19} =$ 5.0000	$y_{20} =$ 5.0000
$y_{21} =$ 5.0000	$y_{22} =$ 5.0000	$y_{23} =$ 5.0000	$y_{24} =$ 5.0000	$y_{25} =$ 5.0000	$y_{26} =$ 5.0000	$y_{27} =$ 4.9978	$y_{28} =$ 4.9951	$y_{29} =$ 4.9953	$y_{30} =$ 4.9996
$y_{31} =$ 5.0088	$y_{32} =$ 4.9988	$y_{33} =$ 4.9994	$y_{34} =$ 5.0004						

**Tableau 3.2 : Les coefficients de la réponse indicielle du processus**

La réponse de ce système est donnée par la figure (3.2) d'après cette dernière, on constate que la sortie suit la consigne imposée.

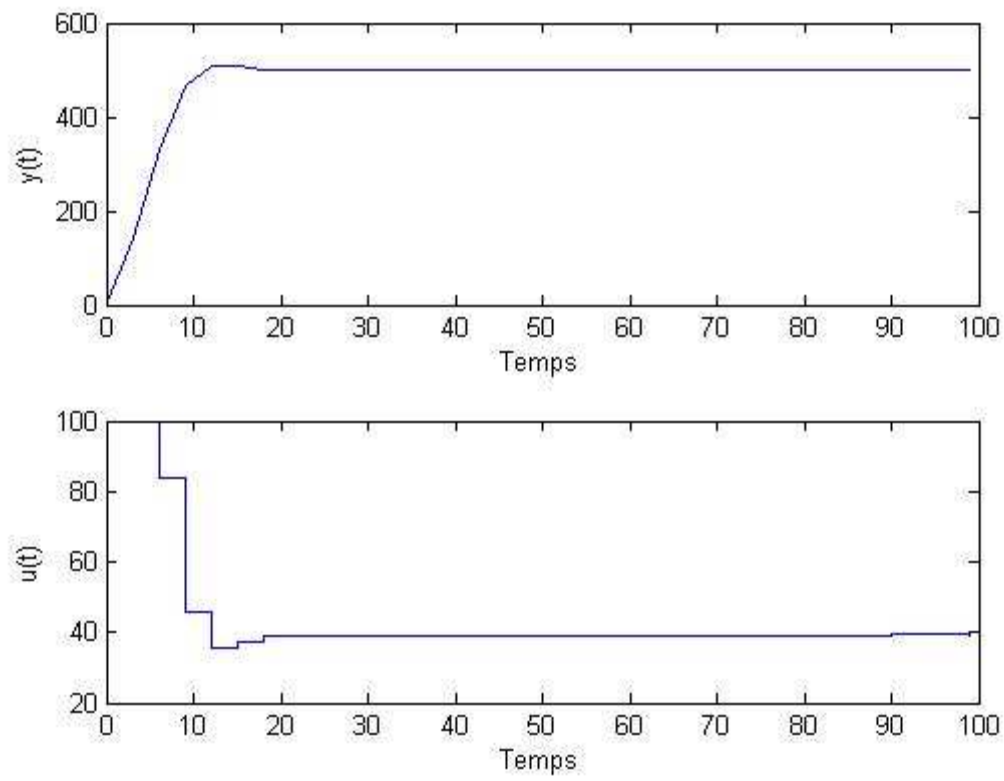




**Figure3.1** : Sortie et commande du système

La figure 3.1 représente la sortie et la commande respectivement, on remarque que l'algorithme DMC assure la poursuite de la consigne et la commande reste dans le domaine admissible définie par la contrainte.

On refait une autre simulation dans laquelle on va imposer une consigne importante qui est  $r = 500$  et la contrainte sur la variable de commande est donnée comme suit  $-\infty \leq u \leq 600$ , la réponse de ce système est donnée par la figure 3.2, on conclut que la sortie suit la consigne imposée.



**Figure3.2** : Sortie et commande du système.

### III.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un aperçu général sur l'optimisation en présence de contraintes du type inégalités. On a aussi présenté deux méthodes de résolution de ce type de problème d'optimisation, en l'occurrence la méthode des fonctions d'écart et la méthode des paramètres de Kuhn-Tucker. Ensuite, on a insisté sur le cas de l'optimisation quadratique utilisée dans le cas de la commande DMC.

## IV.1 Introduction

Une colonne est une unité de séparation physico-chimique utilisée en sciences de l'ingénieur, en chimie et en biologie. Il s'agit en général d'un tube au sein duquel des échanges de matière (à la base de la séparation) et d'énergie (chaleur) s'effectuent entre une phase liquide descendante et une phase gazeuse montante. La colonne permet de séparer un ou plusieurs composés d'un mélange. Le principe de séparation est variable et utilise différents moyens. On désigne ces unités en fonction de leur principe de séparation, ex : colonne de distillation.

La colonne de distillation est l'un des systèmes multivariables complexes dont le modèle est non linéaire. Toutefois, phénomène d'interactions entre les boucles de commande reste le problème majeur sur lequel des travaux de recherches sont axés ces dernières années, car il influe directement sur la qualité des produits et l'énergie consommée par la colonne, ainsi sur le fonctionnement. Dans ce chapitre nous allons appliquer l'algorithme DMC pour la commande d'une colonne de distillation.

## IV.2 Généralité sur le fonctionnement des colonnes de distillation

Les colonnes à distiller sont des unités très fréquentes dans les industries chimiques, pétrochimique, voir métallurgiques. Sur le plan économique les colonnes de distillation consomment une grande partie de l'énergie totale d'une usine. L'optimisation de leur conception et de leur fonctionnement est donc un objectif primordial.

Le but de la colonne de distillation est de séparer une alimentation complexe en produits de compositions différentes ou de purifier des produits intermédiaires ou finaux. Le principe de la distillation repose sur la différence de volatilité existante entre les différents composants chimiques, et grâce à la succession des plateaux empilés, la colonne de distillation permet une meilleure séparation des produits.

Si l'on considère un mélange binaire de deux constituants et que l'on chauffe le contenu de ce mélange, il s'établit un équilibre régi par la thermodynamique entre le liquide et la vapeur qui sont alors à des compositions différentes : la vapeur est plus riche en composant le plus volatil (léger) et le liquide plus riche en composant le moins volatil (lourd). En première approximation, le composant le plus volatil est celui qui possède la masse molaire la plus faible.

On constate que l'on réalise alors par cet équilibre une opération de séparation appelée flash, qui peut être vue comme l'opération qui se passe au niveau de chaque plateau d'une colonne de distillation [24].

### **IV.3 Principe de fonctionnement**

La distillation est un procédé permettant la séparation des constituants d'un mélange en fonction de leur température en exploitant la différence de volatilité de ces constituants.

Le principe de fonctionnement de la colonne à distiller est basé sur l'échange de chaleur entre une source froide (le condensateur) et une source chaude (le rebouilleur).

Ainsi la distillation met en œuvre un contre courant de liquide et de vapeur conduisant à un échange de constituant tel que, les plus volatiles s'accumulent dans la vapeur et seront éliminés au niveau de la source froide, alors que les éléments lourds passent en phase liquide et sont soutirés au niveau de la source chaude.

### **IV.4 Présentation de la colonne de distillation**

Le schéma synoptique d'une colonne de distillation est donné par la figure (4.1)

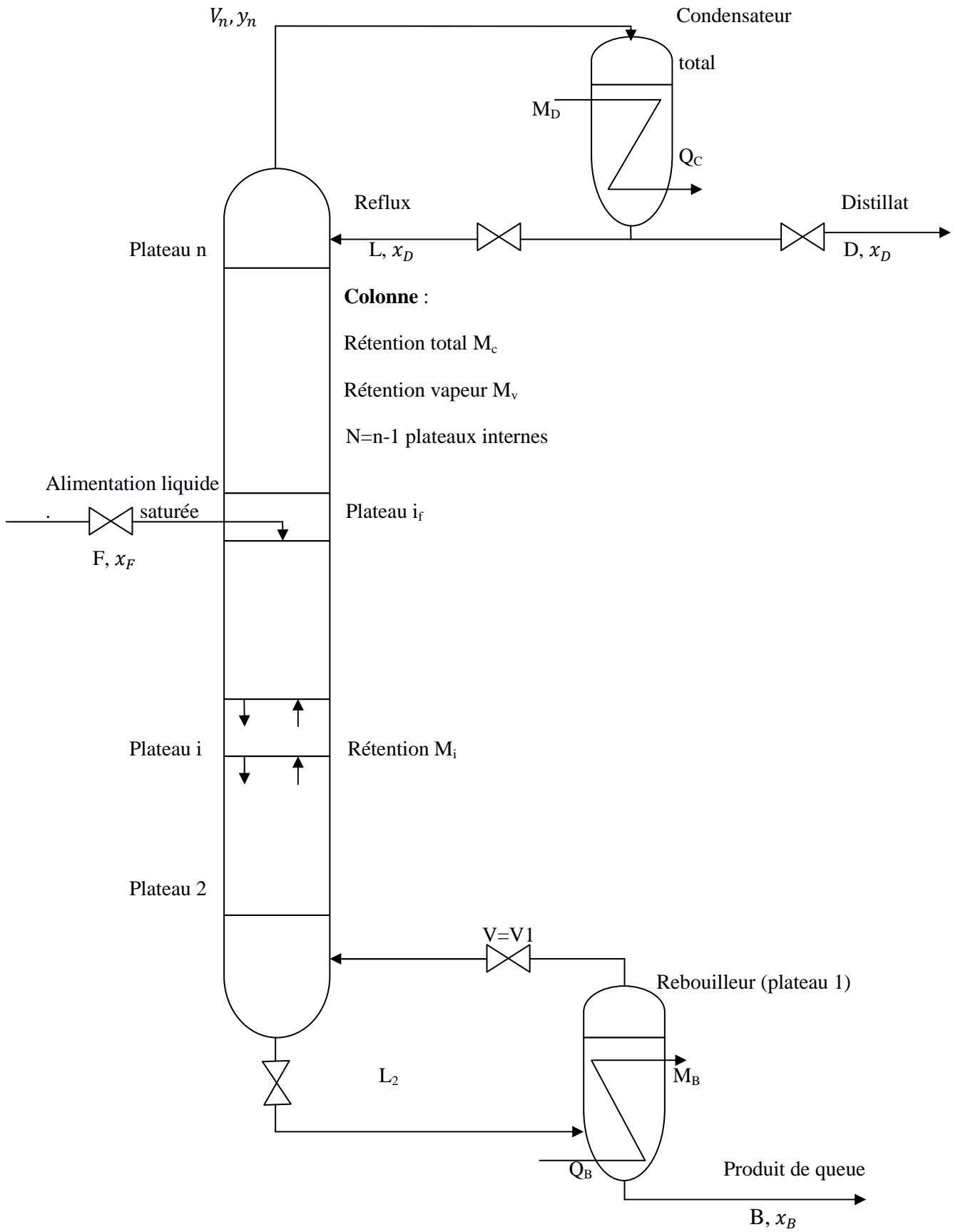


Figure 4.1: colonne de distillation

Après avoir passé en revue la définition et le principe de fonctionnement d'une colonne de distillation, nous pouvons à présent faire un schéma de cette dernière.

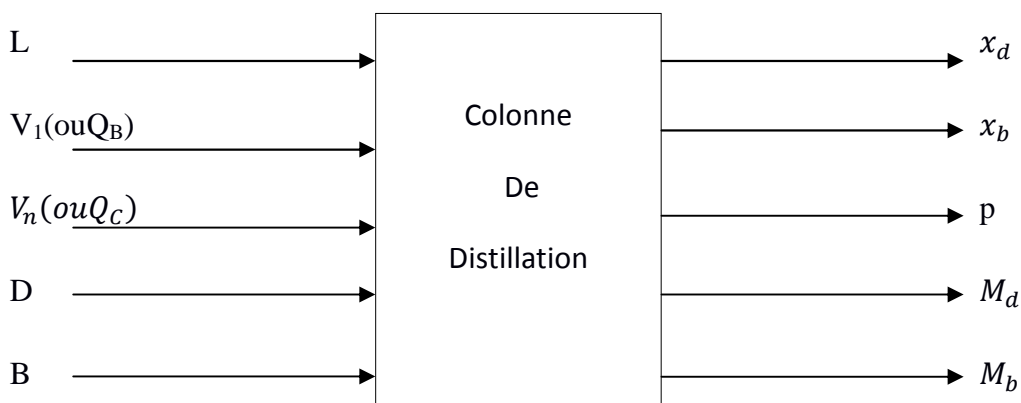
La colonne de distillation représentée par la figure (4.1) est alimentée par une charge  $x_F$ , elle est constituée de N plateaux avec des composés liquides et vapeur. La vapeur sortante de haut de la colonne est entièrement condensée dans le condensateur total, le condensat s'accumulera dans le ballons séparateur de volume de rétention (hold up) et de composition ( $x_D$ ), le liquide sortant du ballon séparateur est a son point d'ébullition le distillat produit est récupéré par un débit (D) (mole/sec). En bas de la colonne le résidu produit est recueilli a un débit (B) et le composition ( $x_B$ ) une partie du liquide résidu est réchauffée dans un rebouilleur, cette dernière est transformée en vapeur, et injectée au niveau du plateau.

$Q_B$  : l'énergie nécessaire à l'opération de séparation.

$Q_C$  : la chaleur absorbée au niveau du condensateur total.

#### IV.5 Modèle de la colonne de distillation étudiée

L'objectif le plus courant pour l'ingénieur en charge du procédé est de maintenir les compositions de tête et de queue de la colonne à une spécification désirée.



**Figure 4.2** : schéma bloc d'une colonne de distillation

Une colonne à distiller typique figure(4.1) peut être schématisée comme un bloc figure (4.2) qui possède cinq variables de commande ( $u$ ) correspondant aux cinq vannes (débits de distillat  $D$ , débit de résidus  $B$ , du reflux  $L$ , de vapeur au bouilleur  $V_1$  et de vapeur condensée en tête  $V_n$ ) et de cinq sorties commandés regroupées dans le vecteurs ( $y$ ) qui sont : rétention ou rebouilleur  $M_b$  et au condensateur  $M_d$ , et la pression  $P$  qui doivent être commandées soigneusement pour maintenir la stabilité de l'opération. En fait, même des colonnes binaires dont la pression et les niveaux sont commandés peuvent présenter des états stationnaires multiples. Il reste deux degré de liberté pour les compositions de tête et de queue (le distillat  $x_d$  et le résidu  $x_b$ ) et deux variables d'entrée : le débit de flux  $L$  et le débit de vapeur au rebouilleur  $y_d$ . [24]

Le modèle de la colonne étudiée est à deux entrées et deux sorties, il est donné sous la forme matrice de transfert  $G(s)$  comme suit :

$$\begin{bmatrix} x_d \\ x_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12.8}{16.7s+1} e^{-s} & \frac{-18.9}{21.0s+1} e^{-3s} \\ \frac{6.6}{10.9s+1} e^{-7s} & \frac{-19.4}{14.4+1} e^{-3s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_d \\ f_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{0.07}{14.4s+1} e^{-5s} \\ \frac{1.30}{12.0s+1} e^{-3s} \end{bmatrix} x_f$$

$x_d$  : est le distillat.

$x_b$  : est le résidu.

$f_d$  : est le reflux liquide.

$f_v$  : est le reflux vapeur.

$x_f$  : est l'alimentation qui représente la perturbation.

#### IV.6 Analyse des interactions par la RGA :

La colonne de distillation est un procédé multivariable caractérisé par le phénomène d'interaction ou de couplage. De ce fait la synthèse d'un système de commande assurant les performances désirées est une étape très délicate et compliquée compte tenu des exigences pratiques, telle que l'évolution des sorties indépendamment les unes et les autres.



L'analyse des interactions dans un procédé multivariable permet de choisir une configuration de commande dont les interactions entre les boucles de cette dernière sont très faibles, en vue d'une commande multiboucle.

Ainsi, plusieurs méthodes d'analyse des interactions ont été développées permettant le choix de la meilleure configuration de commande. On va s'intéresser essentiellement à la méthode de la Matrice des Gains Relatif (**RGA**).

#### IV.7 Méthode de la Matrice des Gains Relatif

RGA (Relative Gain Array) a été introduite par Bristol en 1966[26]. Cette méthode est assez facile à mettre en œuvre, et pour cette raison, elle est fréquemment employée en génie des procédés. Elle permet de dégager une configuration de commande avec un faible niveau d'interaction.

Pour déterminer la formule générale de la Matrice des Gains Relatifs, considérons le cas le plus simple à étudier, celui d'un procédé à deux commandes et deux sorties.

Le calcul de la RGA est basé sur la matrice des gains statiques du procédé. Chaque élément de la RGA est déterminé par l'expression suivante :

$$\lambda_{ij} = \frac{\left(\frac{\partial y_i}{\partial u_j}\right)_{u_{k=0, k \neq j}}}{\left(\frac{\partial y_i}{\partial u_j}\right)_{u_{k=0, k \neq i}}}$$

Le numérateur représente le gain statique en boucle ouverte entre  $u_j$  et  $y_i$  et le dénominateur c'est le gain statique entre  $u_j$  et  $y_i$  lorsque les sorties sont contrôlées par des correcteurs parfaits. Le gain relatif  $\lambda_{ij}$  indique si le gain d'une boucle ouverte  $[u_j - y_i]$  change lorsque toutes les autres boucles sont fermées [27].

### IV.8 Calcul de la Matrice des Gains Relatifs

La matrice des Gains relatifs se calcule directement en utilisant la matrice des gains statiques  $k_s$  comme suit :

$$RGA = k_s * [k^{-1}_s]^T$$

Avec :

$$RGA = [\lambda_{ij} : i, j = 1, \dots, m]$$

$$k_s = [k_{s_{ij}} : i, j = 1, \dots, m].$$

Où :

$k_s$ : est la matrice des gains statiques du procédé déterminée comme suit :

$$k_s = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

.\* : est le produit de Hadamard (annexe) [28]

$K_{s_{ij}}$ : est le gain statique entre  $u_j$  et  $y_i$

### IV.9 Interprétation de la Matrice des Gains Relatifs

Si les éléments de la diagonale de la RGA ( $\lambda_{ij} : i = j$ ) sont proche de 1, alors le niveau d'interaction dans le procédé est très faible. Dans le cas contraire (inférieur ou supérieur à 1) les interactions sont fortes.

Pour une matrice  $2 \times 2$  si  $\lambda_{11}=1$ , alors  $\lambda_{22}=1$  et  $\lambda_{12}=\lambda_{21}=0$ . C'est le cas de non interaction complète, par conséquent l'entrée  $u_1$  peut commander la sortie  $y_1$  et l'entrée  $u_2$  commande la sortie  $y_2$ . Si  $\lambda_{12} = 1$ ,  $y_2$  doit être commandée par  $u_1$  et  $y_1$  par  $u_2$ .

Si  $\lambda_{ij}$  est négatif, la réponse de la boucle correspondante peut changer de sens de variation (procédé à réponse inverse), si les autres boucles sont fermées. En plus la boucle

elle-même peut être instable ou le procédé global devient instable si jamais la boucle considérée s'ouvre, d'où le couple correspondant ne doit pas être choisi dans la configuration de commande.

Le choix de la configuration de commande porte sur les couples ayant un gain relatif  $\lambda_{ij}$  proche de 1. [25]

## IV.10 Limitation de la Matrice des Gains Relatifs

La méthode de la Matrice des Gains Relatifs suppose que les correcteurs sont parfaits ce qui n'est pas le cas pratiquement. Donc la RGA n'est valable que pour les procédés qui travaillent autour de la fréquence nulle.

### IV.10.1 Analyse des interactions dans la colonne de distillation

Pour le modèle de la colonne de distillation, il vient

- La matrice des gains statiques :

$$Ks = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

$$k_s = \begin{bmatrix} 12.80 & -18.9 \\ 6.6 & -19.4 \end{bmatrix}$$

- L'inverse de la matrice  $k_s$  :

$$(k_s)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1570 & -0.1529 \\ -0.0534 & -0.1036 \end{bmatrix}$$

- La transposée de la matrice  $(k_s)^{-1}$  :

$$[(k_s)^{-1}]^T = \begin{bmatrix} 0.1570 & -0.0534 \\ -0.1529 & -0.1036 \end{bmatrix}$$

- La matrice des gains relatifs :

$$RGA = k_s \cdot [(k_s)^{-1}]^T$$

$$RGA = \begin{bmatrix} 2.0096 & -1.0092 \\ -1.0091 & 2.0098 \end{bmatrix}$$

L'examen de la RGA obtenue, montre que les interactions entre les variables de la colonne de distillation sont fortes. On constate aussi que  $\lambda_{21}$  est négatif d'où le couple correspondant ne doit pas être choisi dans la configuration de commande.

On conclut que les interactions sont fortes ce qui rend la commande de la colonne difficile. Pour surmonter cette difficulté, on propose d'appliquer la commande DMC avec contraintes pour commander la colonne et améliorer ces performances.

#### IV. 11 Commande DMC de la colonne de distillation

L'objectif de la commande consiste à assurer une poursuite de consigne et de minimiser l'énergie consommée par la colonne. De plus, pour assurer une sécurité de fonctionnement et une qualité pour les produits finaux, on impose les contraintes suivantes :

1. sur le reflux vapeur

$$0 \leq f_v \leq 1$$

2. sur le reflux liquide

$$0.2 \leq f_d \leq 1.25$$

3. distillat

$$0.5 \leq x_d \leq 1.25$$

4. résidu

$$0.75 \leq x_b \leq 2$$

Les consignes désirées sont :

1. distillat  $x_d^d = 1$

2. résidu  $x_b^d = 1$

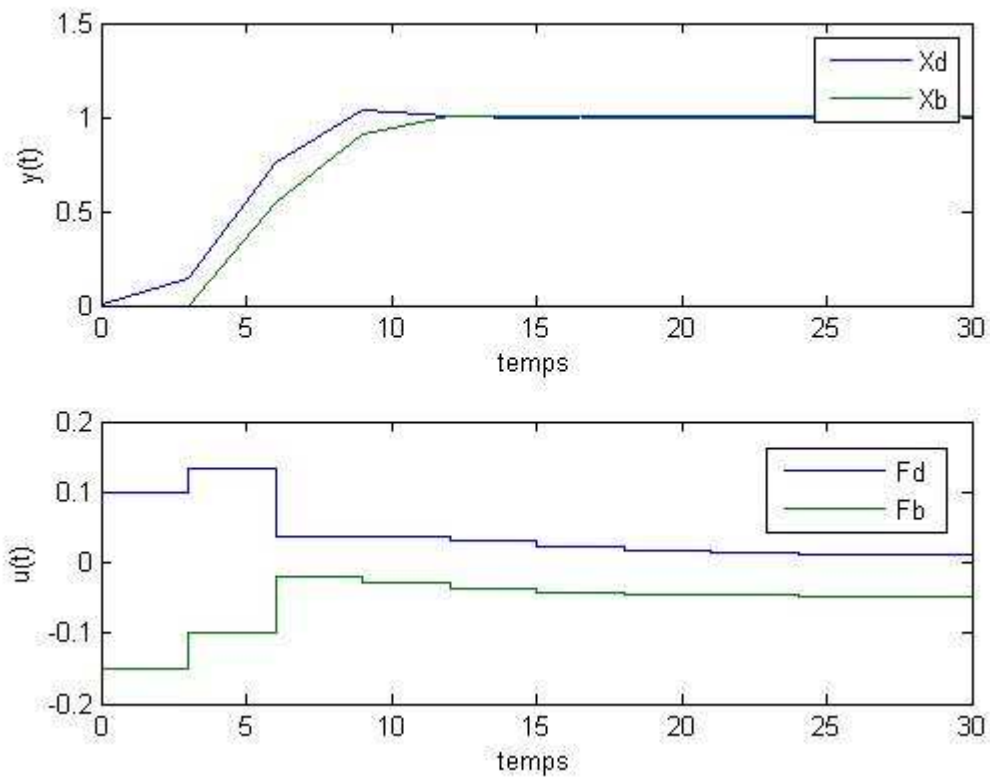
Pour les paramètres du correcteur DMC, on choisi

Horizon de commande  $M=2$

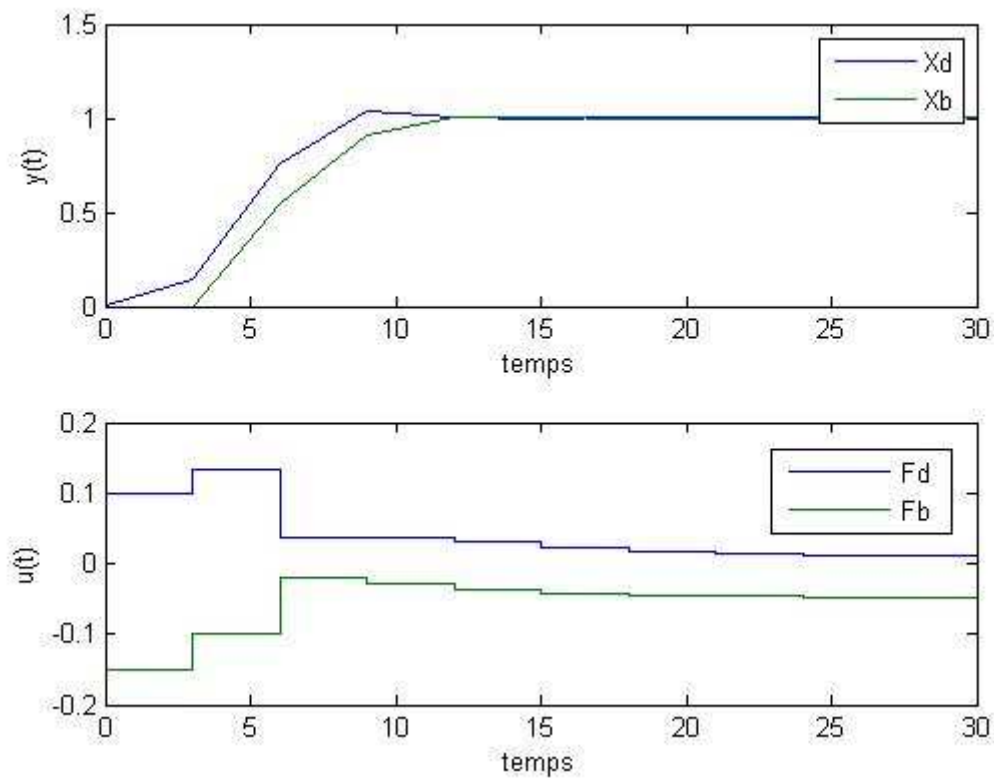
Horizon de prédiction  $P=6$

Période d'échantillonnage  $\delta=3$

Les résultats de simulation sont donnés par les Figures (4.3) et (4.4)



**Figure 4.3** : commande et sortie de la colonne de distillation



**Figure 4.4** : commande et sortie de la colonne de distillation

On constate que les sorties suivent les consignes imposées tout en respectant les limites imposées pour garantir la qualité des produits. Aussi, les contraintes sur la commande sont respectées.

On remarque aussi que la commande DMC assure de bonnes performances malgré les fortes interactions entre les variables de la colonne ceci est justifié par la qualité du régime transitoire.

## IV.12 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté un aperçu général sur la colonne de distillation et son principe de fonctionnement suivi d'un exemple de modèle de cette dernière. Par la suite, nous avons procédé à l'analyse des interactions entre les variables de la commande en utilisant la matrice des gains relatifs (RGA). On a constaté que les interactions sont fortes ce qui complique la commande de la colonne. Dans cette optique, nous avons adopté la commande DMC avec des contraintes sur les variables de commande et de sortie pour commander la colonne. Les Résultats de simulation obtenus montrent clairement l'apport de la commande DMC sur le plan performances.

Pour l'analyse des interactions entre les variables d'un procédé physique nous avons présenté la méthode de la RGA.



## A. 1 Liste des variantes de la commande prédictive

Toutes les variantes de stratégies de commande prédictive sont aujourd'hui regroupées sous le terme générique MPC. La liste ci-dessous propose un aperçu des plus « classiques » :

- **DMC** (Dynamic Matrix Control) proposée par Shell utilise l'incrément de commande à la place de la commande dans le critère de performance pour un horizon fini de prédiction; cet algorithme est appliqué à des systèmes multivariables linéaires sans contraintes; l'erreur de poursuite est minimisée en spécifiant le comportement futur des sorties ; les commandes optimales sont calculées par la méthode des moindres carrés.

- **GPC** (Generalized Predictive Control) Cette méthode la plus connue, basée sur un modèle de type CARIMA, introduit un horizon de prédiction sur la commande, agit conformément au principe de l'horizon fuyant et peut être appliquée aux systèmes à non minimum de phase, aux systèmes instables en boucle ouverte, aux systèmes avec retards purs variables.

Garder la simplicité, un manque de rigueur en performance et surtout dans la garantie des contraintes est associé à cet algorithme.

- **MPC** (Model Predictive Control) formulée dans l'espace d'état par utilise le formalisme de la représentation d'état pour faciliter l'analyse de la stabilité et de la robustesse.

## A. 2 Produit de Hadamard

Le produit de Hadamard de deux matrices A et B de dimensions (m,n) est donné comme suit :

$$C = A.* B = [C_{ij}=A_{ij}*B_{ij} \ i=1,\dots,m, \ j=1,\dots,n]$$

Ou

$A_{ij}$  : est l'élément (i,j) de la matrice A

$B_{ij}$  : est l'élément (i,j) de la matrice B

$C_{ij}$  : est l'élément (i,j) de la matrice C

## **BIBLIOGRAPHIE**

- [1].Flaus, J.-M. (1994). La Régulation Industrielle : Régulateurs PID, Prédicatifs et Flous. Hermès.Gevers, M. (1996). Identification for Control. *Annual Reviews in Control*, Vol. 20, pp. 95–106.
- [2].Huang, B., and Kadali, R. (2008). Dynamic Modeling, Predictive Control and Performance Monitoring : a Data-Driven Subspace Approach. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Vol. 374, Springer.
- [3].Camacho, E. F. et Bordons, C. (1998). *Model Predictive Control in the Process Industry*. Springer, London.
- [4].Cannon, M. (2004). Efficient Nonlinear Model Predictive Control Algorithms. *Annual Reviews in Control*, vol. 28, pp. 229–237.
- [5].Tatjewski, P. (2007). *Advanced Control of Industrial Processes : Structures and Algorithms*. Springer.
- [6].Cutler, C.R. and Ramaker, B.L. (1979). Dynamic Matrix Control. A Computer Control Algorithm. *AIChE 86<sup>th</sup> National Meeting*, USA.
- [7].Clarke, D. W., Mohtadi, C. et Tuffs, P. S. (1987). Generalized Predictive Control. Part I. The Basic Algorithm, *Automatica*, Vol. 23, pp. 137–148.
- [8].Qin, S. J., and T. A. Badgwell, “A survey of industrial model predictive control technology”, *Control Eng. Practice*, 11, 733, (2003).
- [9]. Richalet J., Parisse B., “Initiation à la commande prédictive ”, ADERSA, (2001).
- [10]. Bellman R.E., “Dynamic programming”, Princeton University Press, (1957).
- [11]. Propoi, A.I., “Use of linear programming methods for synthesizing sample-data automatic systems nonlinear predictive controller”. *Automation and Remote Control*, vol.24, pages 837-844, 1963.
- [12]. David W. Clarke, “Self-Tuning Control -The Control Handbook- Section 53”,Department of Engineering Science, Parks Road, Oxford, U.K.
- [13]. Nicolas Petit, ‘Commande Predictive’, Ecole Centrale Paris, 2006.
- [14]. Enso Ikonen, Kaddour Najim, “Advanced Process Identification and Control”,Marcel Dekker, New York.Bsel, 1ere edition, (2002).

- [15]. E.F. Camacho and C. Bordons, "Model Predictive Control", Springer-Verlag London, 2ème édition, (2003).
- [16]. E.F. Camacho, "Constrained Generalised Predictive Control", IEEE Transaction. On Automatic Control, AC-38, pp.327-332, (2), (1993).
- [17]. Adam Besenyei and Péter I. Simon, "Asymptotic output controllability via dynamic matrix control", Differential Equations & Applications, Volume 4, 521–538, Number 4 (2012).
- [18]. Biao Huang and Ramesh Kadali. Dynamic Modeling, Predictive Control and Performance Monitoring: A Data-driven Subspace Approach. Springer-Verlag, London, 2008.
- [19] Piotr Tatjewski. Advanced Control of Industrial Processes : Structures and Algorithms. Springer-Verlag, London, 2007.
- [20]. Ramdani Ammar. "Commande prédictive des systèmes dynamiques : étude comparative avec les régulateurs classiques", Automatisation et Electrification des Procédés Industriels, Faculté des Hydrocarbures et de la Chimie, UMBB, 2014.
- [21]. Abdallah Bezzini. "Commande Prédictive Non Linéaire en Utilisant Les Systèmes Neuro-Flous et les Algorithmes Génétiques", Département Génie Electrique, Faculté des Sciences et de la technologie, Université Mohamed Khider – Biskra, 2013.
- [22]. Patrick B., Didier D., "La commande prédictive", Technip, (1996).
- [23]. A. Maldi. Cours Optimisation et Commande Optimale. Département Automatique, Faculté de Génie Electrique et de l'Informatique, UMM, TO.
- [24]. Ait kaid S., Hadj belkacem F. "commande multiboucle d'une colonne de distillation", Département Electronique, Faculté de Génie Electrique et de l'Informatique, UMM, TO, (2009).
- [25]. Belkassam S., Achili B. "Réduction des Interactions Dans un Systeme Multivariable Basee sur l'Interaction Matricielle : Application pour la Commande d'une Colonne de Distillation", Département Automatique, Faculté de Génie Electrique et de l'Informatique, UMM, TO, (2002).
- [26] Skogestad, S. and Postlethwaite I., "multivariable feedback control, Analysis and Design". John Wiley & sons, 1998
- [27] Mcavoy, T.J., "Interaction analysis". Instrument society of america, 1983.
- [28] Bronson, R. "calcul matriciel" serie schaum, éditions mcGraw-hill, 1994.