Département Génie Civil
S3 Académique (Sections A & B)

Juin 2022

Examen de Probabilités/Statistique

(Durée 1 h 30)

Exercice 1

Le tableau suivant représente la répartition d'un échantillon d'étude constitué de 91 pièces suivant le nombre d'essais de traction (X) et le nombre d'essais de cisaillement (Y).

$X\ /\ Y$	1	2	3	4
2	4	12	8	2
4	2	6	4	1
6	6	18	12	3
8	2	6	4	1

1. Déterminer les distributions marginales de X et Y.
2. Les deux variables sont-elles indépendantes ? Justifier.
3. Déterminer la distribution conditionnelle de $Y/X = 6$.
4. Déterminer le coefficient de corrélation $\rho(X, Y)$. Conclure.
5. Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X.

Exercice 2

On sait qu'à une date donnée, 3% d'une population est atteinte de la maladie COVID 19. On dispose de tests de dépistage de la maladie :

- Si la personne est malade, alors le test est positif avec une probabilité de 95%.
- Si la personne est saine, alors le test est positif avec une probabilité de 10%.

1. Quelle est la probabilité pour qu'une personne soit malade si son test est positif ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'une personne soit saine si son test est positif ?
3. Quelle est la probabilité pour qu'une personne soit malade si son test est négatif ?
4. Quelle est la probabilité pour qu'une personne soit saine si son test est négatif ?

Exercice 3

La fréquence d'apparition chez l'homme d'un caractère génétique A est de 0,1 et celle d'un caractère B est de 0,3. La probabilité d'observer l'un ou l'autre de ces caractères chez un même individu est de 0,37.

1. Calculer la probabilité d'apparition des deux caractères chez un même individu.
2. Les deux caractères sont ils indépendants ?

Exercice 4

Soit f une fonction réelle définie par :

$$f(x) = \begin{cases} k(9 - x^2) & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. Trouver la valeur de k pour que la fonction f soit une densite de la variable aléatoire X.
2. Calculer l'espérance mathématique ainsi que la variance de X.
3. Déterminer la fonction de répartition.

Dept. GC.
S3 Académique

Examen Proba/Stat.
– Corrigé Type –

Juin 2021

Exo 1 : (10 pts)

1- Distribution marginale de X : 0,5

X	n_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
2	26	52	104
4	13	52	208
6	39	234	1404
8	13	104	832
Total	91	442	2548

Distribution marginale de Y : 0,5

Y	n_j	$n_j y_j$	$n_j y_j^2$
1	14	14	14
2	42	84	168
3	28	84	252
4	7	28	112
Total	91	210	546

2) $f_{ij} = f_{i\cdot} \cdot f_{\cdot j} \quad \forall i, j$ (1)

$f_{x=2,\, y=1} = \frac{4}{91}$

$f_{x=2} = \frac{26}{91}$, $f_{y=1} = \frac{14}{91}$

$f_{x=2,\, y=1} = \frac{4}{91} \neq \frac{26}{91} \times \frac{14}{91}$

$\neq f_{x=2} \cdot f_{y=1}$

$\Rightarrow$ X et Y ne sont pas indépendantes.

3) Distribution condit. de $Y / X=6$: (1)

Y	1	2	3	4	Σ
$f_{Y/X=6}$	$\frac{6}{39}$	$\frac{18}{39}$	$\frac{12}{39}$	$\frac{3}{39}$	1

4) Coefficient de corrélation $\rho(X,Y)$:

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \, \sigma_Y}$$

$\bar{X} = \frac{\sum n_i x_i}{N} = \frac{442}{91} = \frac{34}{7} = 4,85$. (1)

$V(X) = \frac{\sum n_i x_i^2}{N} - \bar{X}^2 = \frac{2548}{91} - (4,85)^2$

$= 4,08$

$\Rightarrow \sigma_X = \sqrt{4,08} \simeq 2,02$. (1)

$\bar{Y} = \frac{\sum n_j y_j}{N} = \frac{210}{91} = \frac{30}{13} = 2,30$. (1)

$V(Y) = \frac{\sum n_j y_j^2}{N} - \bar{Y}^2 = \frac{546}{91} - (2,3)^2$

$= 0,67$

$\Rightarrow \sigma_Y = \sqrt{0,67} \simeq 0,82$. (1)

$Cov(X,Y) = \frac{1}{N} \sum \sum n_{ij} x_i y_j - \bar{X}\,\bar{Y}$

$= \frac{1020}{91} - \frac{34}{7} \cdot \frac{30}{13}$ (1)

$= 0$.

(1) $\Rightarrow \rho(X,Y) = 0 \Rightarrow$ Il n'y a pas de liaison entre X et Y.

5) Droite de régression de Y en X :

$Y = aX + b$ (1)

$a = \frac{Cov(X,Y)}{V(Y)} = 0$

$b = \bar{Y} - a\bar{X} = \frac{30}{13} = 2,30$

$\Rightarrow \boxed{Y = 2,30}$

Exo 2 : (4 pts)

Soient les évènements :

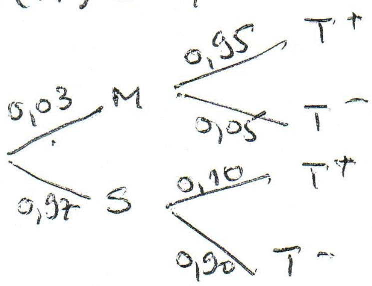
M = " La personne est atteinte de la maladie COVID "

S = " La personne est saine "

T^+ = " La personne testée positive "

T^- = " La " " négative "

$P(M) = 0{,}03$



1) $P(M/T^+) = \dfrac{P(T^+/M) \cdot P(M)}{P(T^+)}$

1

$= \dfrac{P(T^+/M) \cdot P(M)}{P(T^+/M) \cdot P(M) + P(T^+/S) \cdot P(S)}$

$= \dfrac{0{,}95 \cdot 0{,}03}{0{,}95 \cdot 0{,}03 + 0{,}10 \times 0{,}97}$

$P(M/T^+) = 0{,}227$.

2) $P(S/T^+) = \dfrac{P(T^+/S) \cdot P(S)}{P(T^+)}$

1

$= \dfrac{0{,}10 \cdot 0{,}97}{0{,}1255}$

$= 0{,}773$.

ou

$P(S/T^+) = 1 - P(M/T^+)$

3) $P(M/T^-) = \dfrac{P(T^-/M) \cdot P(M)}{P(T^-)}$

1

$= \dfrac{P(T^-/M) \cdot P(M)}{P(T^-/M) \cdot P(M) + P(T^-/S) \cdot P(S)}$

$= \dfrac{0{,}05 \times 0{,}03}{0{,}9 \times 0{,}97 + 0{,}05 \times 0{,}03}$

$= 0{,}0017$

4) $P(S/T^-) = 1 - P(M/T^-)$

$= 0{,}998$.

1

Exo 3 (2 pts)

Soient les évènements :

A : " L'homme a 1 caractère gén. A "

B : " " " " " " " B "

$P(A) = 0{,}1$

$P(B) = 0{,}3$

$P(A \cup B) = 0{,}37$

1

1) $P(A \cap B) = ?$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Rightarrow P(A \cap B) = -P(A \cup B) + P(A) + P(B)$

$= -0{,}37 + 0{,}1 + 0{,}3$

$\boxed{P(A \cap B) = 0{,}03}$

2) $P(A \cap B) = 0{,}03$

1

$P(A) \cdot P(B) = 0{,}1 \times 0{,}3 = 0{,}03$

$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$\Rightarrow$ A et B sont indépendants.

Exo 4 : (04,5)

$$f(x) = \begin{cases} k(9 - x^2) & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{3} f(x)\,dx + \int_{3}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{0}^{3} k(9 - x^2)\,dx = 1$

1

$\Rightarrow k\left[9x - \dfrac{x^3}{3}\right]_0^3 = 1$

$\Rightarrow \boxed{k = \dfrac{1}{18}}$

2) Espérance mathématique :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_0^3 x\, f(x)\, dx = \int_0^3 \frac{1}{18}(9x - x^3)\, dx$$

$$= \frac{1}{18}\left[\frac{9x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^3$$

$$E(X) = \frac{9}{8}.$$

1

Variance :

$$\cancel{V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) - E \int_0^3 x^2 f(x)\, dx}$$

$$V(X) = \int_0^3 x^2 f(x)\, dx - E(X)^2 = \int \frac{1}{18}(9x^2 - x^4)\, dx - \left(\frac{9}{8}\right)^2$$

$$= \frac{1}{18}\left[\frac{9x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^3 - \left(\frac{9}{8}\right)^2$$

1

$$V(X) = \frac{171}{320}$$

3) Fonction de répartition :

si $x < 0$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = 0.$$

si $0 \leq x < 3$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\, dt + \int_0^x f(t)\, dt$$

$$= \int_0^x \frac{1}{18}(9 - t^2)\, dt = \frac{1}{18}\left[9t - \frac{t^3}{3}\right]_0^x$$

$$F(x) = \frac{1}{18}\left[9x - \frac{x^3}{3}\right]$$

si $x \geq 3$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_0^3 f(t)\, dt = 1$$

1,5

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{18}\left[9x - \frac{x^3}{3}\right] & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$