Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou
Faculté du Génie de la Construction
Département de Génie Mécanique

Année universitaire 2025/2026
Date: 22/01/2026
Semestre d'études : S3

Feuille de notes 2ème Année ING G.M

Matière : M.R.

☒ Examen
☐ Rattrapage

Groupe 01

salle : E02

Département Génie Mécanique

N°	Nom	Prénom	Date de Naissance	Signature	Notes/
1	ABKARI	MOHAMED AMINE	30/10/2004		00,7
2	AKHAM	Melissa	03/02/2006		03,2
3	AMMOURI	IMANE	07/08/2006		00,5
4	AMMOURI	LITICIA	04/05/2006		00,5
5	AZIZ	FERIEL	02/11/2004		01,2
6	BEN AMER	HELENA	16/04/2006		00,7
7	BENAMOR	ABDERRAHMANE	24/01/2004		02,0
8	BENCHABANE	LYES	22/07/2006		00,25
9	BOUBAKOUR	SANDRA	07/05/2005		
10	BOUBERKA	NASSIMA	08/01/2005		
11	BOUSSAID	AGHILES AMEJTOUH	09/02/2005		01,00
12	BOUSSOUAR	MAROUA	14/01/2007		01,25
13	BOUZID	BOUCHRA	16/02/2007		
14	CHABNI	YACINE	06/03/2006		00,25
15	CHEKHAR	MOHAND IDRIS	21/07/2006		01,75
16	CHERIFI	LIZA	16/05/2004		00,75
17	DEBIANE	MERIEM	23/01/2007		07,25
18	DEGHAIMI	MASSINISSA	08/07/2006		00,50
19	DJOUDER	RAYANE	17/09/2006		01,00
20	ELHADJEN	ABDELHAK	01/11/2003		02,00
21	HADJ TAYEB	AMINE	03/06/2005		

Enseignant: LAMROUS

Date d'affichage : 02/02/2026

Date et la salle de consultation :

MERCREDI : Le 04/02/2026
à 12H30 → 13H00
Dans la salle E04

Le Chef de département :

Département de Génie Mécanique
Section Suivi
des Enseignements de Licence

Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou
Faculté du Génie de la Construction
Département de Génie Mécanique

Année universitaire 2025/2026
Date: ...... / ...... /2026
Semestre d'études : S3

Feuille de notes 2ème Année ING G-M

Matière : ....

Examen
Rattrapage

Groupe 02

Salle : E04

Département Génie Mécanique

N°	Nom	Prénom	Date de Naissance	Signature	Notes/20
1	HENINE	RAOUIA	27/06/2005		01
2	IOUALALEN	ANAIS	06/12/2005		01
3	KANA	AKSEL	13/07/2006		01
4	LAOUADJI	ABDELLAH	26/11/2006		08
5	LASSOUANE	MASSI	15/08/2006		05
6	MEHRI	KENZA	12/06/2005		01
7	MIRAOUI	MOHAMED	02/03/2006		03
8	MOUCHACHE	RABAH	08/07/2006		10
9	MOUSSOUS	KARIM	14/04/2003		02
10	NECHAK	MASTEN MOULOUD	06/03/2006		03
11	OUCHENE	ABDE REZAK	23/08/2005		04
12	OUHADJ	KATIA	20/04/2006		03
13	OUMEZZAOUCHE	TINHINANE	22/08/2005		00
14	RABAHALLAH	SARA	28/08/2002		00
15	SADOUDI	MOHAMED	10/02/2005		01
16	SEBOUAI	AHMED	24/08/2006		02
17	SEGGAR	SARA	18/03/2006		10
18	SETBEL	ABDENOUR	22/05/2005	ABS	
19	SMAIL	AHMED	21/06/2006		01
20	YAHIAOUI	ABDELHAK	03/01/2007		05
21	ZEKHMI	KARIM	20/11/2003		01

Enseignant: LAMROUS

Date d'affichage : 02/02/2026

Date et la salle de consultation :
Mercredi le 04/02/2026
à 12H30 → 13H00
Dans la salle E04

Le Chef de département :

Département de Génie Mécanique
Section Suivi
des Enseignements de Licence

Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou
Faculté du génie de la construction
Département de Mécanique

Jeuddi 22 Janvier 2026

Examen final de mécanique rationnelle
Sections Ingéniorat semestre S_3 - Durée : 2h30mn

Exercice 1 (8 points) : (1 point par question)

Un disque homogène, de masse m, de rayon a, de centre C, est posé sans vitesse initiale sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Le disque est mis en mouvement gravitaire dans le plan OXY. f est le coefficient de frottement disque-plan et $\omega(t)$ est sa vitesse angulaire. On pose $0I=x(t)$

Le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe CZ est $I_{CZ} = \frac{ma^2}{2}$

1) **Cas du roulement sans glissement :**

   a) Ecrire la condition de roulement sans glissement en I et en déduire la relation entre ω et $\dot{x}$ la vitesse du centre C.

   b) Représenter les forces extérieures qui s'appliquent sur le disque.

   c) Appliquer les théorèmes généraux au disque et déterminer les trois équations différentielles de son mouvement.

   d) Résoudre ces équations et déterminer l'accélération $\ddot{x}$ du centre C ainsi que les forces de frottement de glissement T et de pression N, exercées par le plan sur le disque.

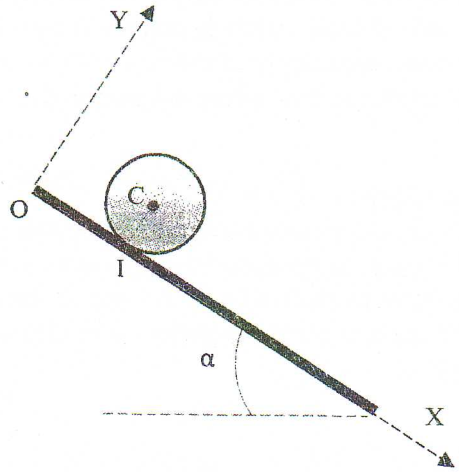
   e) Quelle condition doit vérifier la force de frottement de glissement T pour que le disque ne glisse pas sur le plan ? En déduire dans ce cas la valeur minimale du coefficient de frottement f.

2) **Cas du roulement avec glissement :**

   f) On se place dans le cas où la condition de non glissement n'est pas vérifiée. Déterminer à partir de la loi de Coulomb du frottement de glissement la nouvelle valeur de T.

   g) Résoudre avec cette valeur de T le système d'équations de la question c et déterminer la nouvelle valeur de $\ddot{x}$ et celle de l'accélération angulaire $\dot{\omega}$ du disque.

   h) En déduire les expressions en fonction du temps de la vitesse du point C et de la vitesse angulaire du disque. Calculer alors la vitesse de glissement au point de contact I.



12- En déduire que la force $T_{21}=0$ si on suppose que la vitesse angulaire du disque $\dot{\varphi}$ est constante.

13- Représenter les forces extérieures exercées sur le cerceau et appliquer le théorème du moment dynamique en O'.

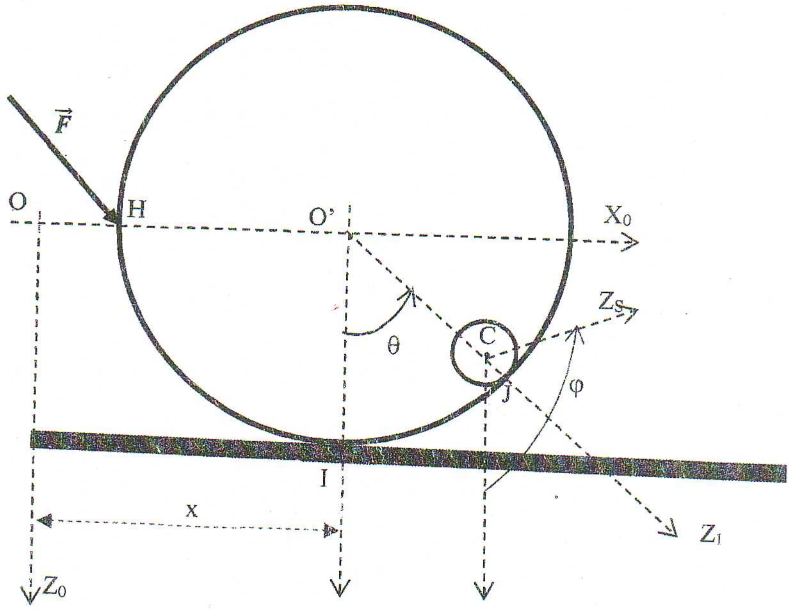
14- Montrer que lorsque $\dot{\varphi}$ est constante et en absence de frottement en I ($T_0=0$), la composante verticale de la force F est nulle ($F_z=0$).

15- En se plaçant dans le cas où $\dot{\varphi}$ est constante et contact en I sans frottement, et en supposant en plus que $\ddot{x}$ =g et θ constant, déterminer

a) F_x et N_0. (On utilisera les résultats de la question 11)

b) L'accélération du centre C du disque en fonction de g en projection sur R_0. (On utilisera les résultats de la question 1)

16- Représenter dans ce cas les forces extérieures exercées sur le disque et appliquer le théorème de la résultante dynamique. En déduire la valeur de l'angle θ et celle de la composante N_{21}.



Nom et Prénom : Groupe :

Module de Mécanique Rationnelle **Examen Final** **22/01/ 2026**

FEUILLE DE REPONSE **Note : /20**

Exercice 1 :

I- Cas du roulement sans glissement :

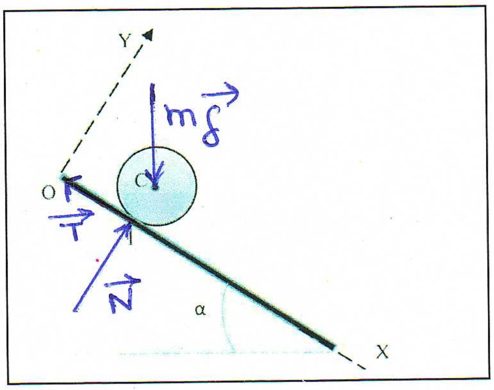
a) Ecrire la condition de roulement sans glissement en I et en déduire la relation entre ω et $\dot{x}$ la vitesse du centre C.

1pt

$\vec{V}(I\in D/R) = \vec{V}(I\in \text{plan}/R) = 0 = \vec{V}(C\in D/R) + \vec{\Omega}(D/R)\wedge\vec{CI}$

$= \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_R + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix}_R \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{Bmatrix}_R = \begin{Bmatrix} a\omega+\dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \dot{x}+a\omega=0 \Rightarrow \boxed{\dot{x}=-a\omega}$

b) Représenter les forces extérieures qui s'appliquent sur le disque.



1pt

c) Appliquer les théorèmes généraux au disque et déterminer les trois équations différentielles de son mouvement.

TRD : $m\vec{g}+\vec{T}+\vec{N} = m\vec{\gamma}(C/R) \Rightarrow \begin{cases} mg\sin\alpha - T = m\ddot{x} & (1) \\ N - mg\cos\alpha = 0. & (2) \end{cases}$

TMD : $\vec{\mathcal{M}}_C(ext) = \vec{\delta}_C(D/R) \Rightarrow \vec{CI}\wedge\vec{T} = \dfrac{d^R\vec{\sigma}_C(D/R)}{dt} = \dfrac{d^R}{dt}(I_{Cz}\dot{\omega}.\vec{z}_0)$

1pt

$\vec{CI}\wedge\vec{T} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} -T \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -aT \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{Cz}.\dot{\omega} \end{Bmatrix} \Rightarrow T = -\dfrac{I_{Cz}}{a}\dot{\omega}$

ou encore : $T = -\dfrac{ma\dot{\omega}}{2} = \dfrac{m\ddot{x}}{2}.$

d) Résoudre ces équations et déterminer l'accélération $\ddot{x}$ du centre C ainsi que les forces de frottement de glissement T et de pression N, exercées par le plan sur le disque.

③ dans ① donne : $mg\sin\alpha - \frac{m\ddot{x}}{2} = m\ddot{x} \Rightarrow \boxed{\ddot{x} = \frac{2}{3}g\sin\alpha}$

donc $\boxed{T = \frac{mg\sin\alpha}{3}}$ et $\boxed{N = mg\cos\alpha}$

1pt

e) Quelle condition doit vérifier la force de frottement de glissement T pour que le disque ne glisse pas sur le plan ? En déduire dans ce cas la valeur minimale du coefficient de frottement f.

$T \leq fN \Rightarrow \frac{mg\sin\alpha}{3} \leq f\,mg\cos\alpha \Rightarrow \boxed{f \geq \frac{1}{3}\operatorname{tg}\alpha}$

1pt

II- Cas du roulement avec glissement :

f) Déterminer à partir de la loi de Coulomb du frottement de glissement la nouvelle valeur de T

1pt Dans ce cas $f < \frac{1}{3}\operatorname{tg}\alpha$ et le disque glisse sur le plan $\Rightarrow \boxed{T = fN = f\,mg\cos\alpha}$

g) Déterminer la nouvelle valeur de $\ddot{x}$ et celle de l'accélération angulaire $\dot{\omega}$ du disque.

② $\Rightarrow mg\sin\alpha - f\,mg\cos\alpha = m\ddot{x} \Rightarrow \boxed{\ddot{x} = (\sin\alpha - f\cos\alpha)g}$ 1pt

et $T = -\frac{ma\dot{\omega}}{2} = f\,mg\cos\alpha \Rightarrow \boxed{\dot{\omega} = -\frac{2fg\cos\alpha}{a}}$

h) En déduire les expressions en fonction du temps de la vitesse du point C et de la vitesse angulaire du disque. Calculer alors la vitesse de glissement au point de contact I :

$\ddot{x} = (\sin\alpha - f\cos\alpha)g = cste \Rightarrow \dot{x} = (\sin\alpha - f\cos\alpha)gt$

$\dot{\omega} = -\frac{2fg\cos\alpha}{a} = cste \Rightarrow \omega = -\frac{2fg\cos\alpha}{a}t$ 1pt

$\Rightarrow V_g(I) = \vec{V}(I\in D/R) = \begin{cases} \dot{x} + a\omega \\ 0 \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} (\sin\alpha - 3f\cos\alpha)gt \\ 0 \\ 0 \end{cases}$

Exercice 2 :

12 pts

I- Calculs de cinématique :

1- Etablir les expressions de la vitesse et de l'accélération absolues des points O' et C en fonction des paramètres x et θ.

$\vec{V}(O'\in S_2/R_0) = \frac{d^{R_0}\vec{OO'}}{dt} = \left\{\begin{matrix}\dot{x}\\0\\0\end{matrix}\right._{R_0}$; $\vec{\gamma}(O'\in S_2/R_0) = \frac{d^{R_0}\vec{V}(O'/R_0)}{dt} = \left\{\begin{matrix}\ddot{x}\\0\\0\end{matrix}\right._{R_0}$; $\vec{V}(C\in S_1/R_0) = \vec{V}(O'/R_0) + \vec{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\vec{O'C}$

$\Rightarrow \vec{V}(C\in S_1/R_0) = \left\{\begin{matrix}\dot{x}\\0\\0\end{matrix}\right._{R_0} + \left\{\begin{matrix}0\\\dot{\theta}\\0\end{matrix}\right._{R_0} \wedge \left\{\begin{matrix}2a\sin\theta\\0\\2a\cos\theta\end{matrix}\right._{R_0} = \left\{\begin{matrix}\dot{x} + 2a\dot{\theta}\cos\theta\\0\\-2a\dot{\theta}\sin\theta\end{matrix}\right._{R_0}$

1pt

et $\vec{\gamma}(C\in S_1/R_0) = \frac{d^{R_0}\vec{V}(C\in S_1/R_0)}{dt} = \left\{\begin{matrix}\ddot{x} + 2a(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)\\0\\-2a(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\end{matrix}\right._{R_0}$

2- Déterminer la position du centre de masse G du système et déduire de la question précédente la vitesse et l'accélération de ce point.

$\vec{OG} = \frac{m\vec{OO'} + m\vec{OC}}{2m} = \frac{\vec{OO'} + \vec{OC}}{2} \Rightarrow \vec{V}(G/R_0) = \frac{d\vec{OG}}{dt} = \frac{\vec{V}(O'/R_0) + \vec{V}(C/R_0)}{2}$

1pt

$\Rightarrow \vec{V}(G/R_0) = \left\{\begin{matrix}\dot{x} + a\dot{\theta}\cos\theta\\0\\-a\dot{\theta}\sin\theta\end{matrix}\right.$ et $\vec{\gamma}(G/R_0) = \left\{\begin{matrix}\ddot{x} + a(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)\\0\\-a(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\end{matrix}\right.$

3- Déterminer la vitesse de glissement $\vec{V_g}(I)$ du cerceau sur l'axe OX_0 et la vitesse de glissement $\vec{V_g}(J)$ du disque sur le cerceau.

$\vec{V_g}(I) = \vec{V}(I\in S_2/R_0) - \cancel{\vec{V}(I\in R_0/R_0)}^{\,0} = \vec{V}(O'\in S_2/R_0) = \dot{x}\,\vec{x_0}$ (S_2 est en translation)

$\vec{V_g}(J) = \vec{V}(J\in S_2/R_0) - \vec{V}(J\in S_1/R_0)$ avec $\left\{\begin{matrix}\vec{V}(J\in S_2/R_0) = \dot{x}\,\vec{x_0}\\\vec{V}(J\in S_1/R_0) = \vec{V}(C\in S_1/R_0) + \vec{\Omega}(S_1/R_0)\wedge\vec{CJ}\end{matrix}\right.$

D'où $\vec{V}(J\in S_1/R_0) = \left\{\begin{matrix}\dot{x} + 2a\dot{\theta}\cos\theta\\0\\-2a\dot{\theta}\sin\theta\end{matrix}\right._{R_0} + \left\{\begin{matrix}0\\\dot{\varphi}\\0\end{matrix}\right._{R_0} \wedge \left\{\begin{matrix}a\sin\theta\\0\\a\cos\theta\end{matrix}\right._{R_0} = \left\{\begin{matrix}\dot{x} + a(2\dot{\theta} + \dot{\varphi})\cos\theta\\0\\-a(2\dot{\theta} + \dot{\varphi})\sin\theta\end{matrix}\right._{R_0}$

$\Rightarrow \vec{V_g}(J) = \left\{\begin{matrix}-a(2\dot{\theta} + \dot{\varphi})\cos\theta\\0\\a(2\dot{\theta} + \dot{\varphi})\sin\theta\end{matrix}\right._{R_0}$

1pt

II- Calculs de cinétique:

4- Déterminer la quantité de mouvement du cerceau (S_1) et son moment cinétique au point O'.

$\vec{P}(S_2/R_0) = m\vec{V}(O'\in S_2/R_0) = m\dot{x}\,\vec{x_0}$

$\vec{\sigma}_{O'}(S_2/R_0) = J_{O'}(S_2)\,\cancel{\vec{\Omega}(S_2/R_0)}^{\,0} = 0$

0,5

10- Appliquer le théorème de la résultante dynamique au système et déduire les deux équations du mouvement du système en projection sur les axes du repère R_0.

$$\vec{F} + \vec{R_{02}} + 2m\vec{g} = 2m\,\vec{\gamma}(G/R_0) = 2m \frac{d^{R_0}\vec{V}(G/R_0)}{dt}$$

donc $\vec{\gamma}(G/R_0) = \begin{cases} \ddot{x} + a(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) \\ 0 \\ -a(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) \end{cases}$

1pt

ce qui donne : $\begin{cases} x_0 : & F_x - T_0 = 2m[\ddot{x} + a(\ddot{\theta}\cos - \dot{\theta}^2\sin\theta)] \\ z_0 : & 2mg + F_z - N_0 = -2ma(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) \end{cases}$

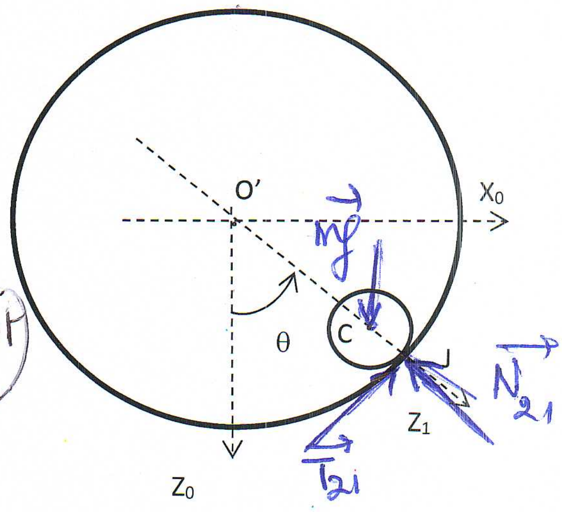
11- Représenter les forces extérieures exercées sur le disque et appliquer le théorème du moment dynamique au point C.

$\vec{\mathcal{M}}_C(ext \to S_1) = \vec{\delta}_C(S_1/R_0) = \frac{ma^2\ddot{\varphi}}{2}\vec{y}_{0,2}$

$\Rightarrow \vec{CJ} \wedge \vec{T_{21}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{Bmatrix}_{R_1} \wedge \begin{Bmatrix} T_{21} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_1} = -aT_{21}\vec{y}_{0,1}$

1pt

Donc $T_{21} = -\frac{ma\ddot{\varphi}}{2}$.



12- En déduire que la force $T_{21}=0$ si on suppose que la vitesse angulaire du disque $\dot{\varphi}$ est constante.

Si $\dot{\varphi} = cte \Rightarrow \ddot{\varphi} = 0 \Rightarrow \boxed{T_{21} = 0}$

1pt

13- Représenter les forces extérieures exercées sur le cerceau et appliquer le théorème du moment dynamique en O'.

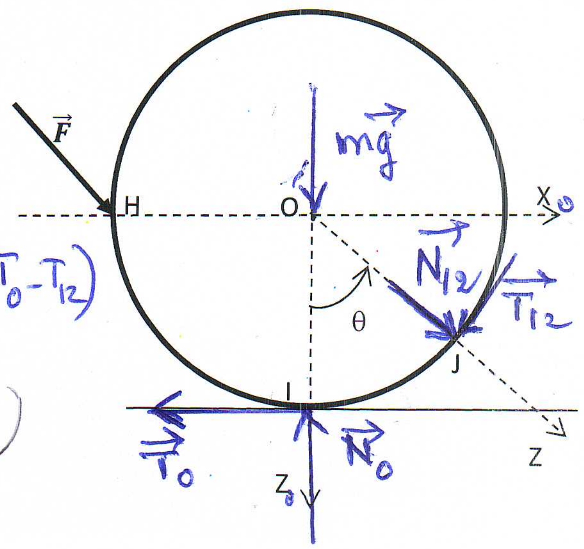
$\vec{\mathcal{M}}_{O'}(ext \to S_2) = \vec{\delta}_{O'}(S_2/R_0) = 0$

$= \vec{O'H} \wedge \vec{F} + \vec{O'J} \wedge \vec{T_{12}} + \vec{O'I} \wedge \vec{T_0}$

$= \begin{Bmatrix} -3a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_0} \wedge \begin{Bmatrix} F_x \\ 0 \\ F_z \end{Bmatrix}_{R_0} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3a \end{Bmatrix}_{R_1} \wedge \begin{Bmatrix} -T_{12} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_1} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3a \end{Bmatrix}_{R_0} \wedge \begin{Bmatrix} -T_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3a(F_z - T_0 - T_{12}) \end{Bmatrix}$

$\Rightarrow \boxed{F_z - T_0 - T_{12} = 0}$

1pt



14- Montrer que lorsque $\dot{\varphi}$ est constante et en absence de frottement en I (T_0=0), la composante verticale de la force F est nulle (F_z=0).

Si $\dot{\varphi}$ = cste ⇒ $\ddot{\varphi} = 0$ ⇒ $T_{12} = 0$; Si $T_0 = 0$ (Pas de frottement en

⇒ $\boxed{F_z = 0}$

1 pt

15- En se plaçant dans le cas où $\dot{\varphi}$ est constante et contact en I sans frottement, et en supposant en plus que $\ddot{x}$ =g et θ constant, déterminer

a) F_x et N_0. (On utilisera les résultats de la question 11)

avec $T_{12} = 0$; $T_0 = 0$; $\ddot{x} = g$ et $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ ⇒

$\boxed{F_x = 2m\ddot{x}}$ et $\boxed{N_0 = 2mg}$

1 pt

b) L'accélération du centre C du disque en fonction de g en projection sur R_0. (On utilisera les résultats de la question 1)

$$\vec{\gamma}(C/R_0) = \frac{d^{R_0}\vec{V}(C/R_0)}{dt} = \begin{cases} \ddot{x} + 2a(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) \\ -2a(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) \end{cases}$$

Si θ = cste et $\ddot{x} = g$ ⇒ $\vec{\gamma}(C/R_0) = \ddot{x}\,\vec{x}_0 = g\,\vec{x}_0$

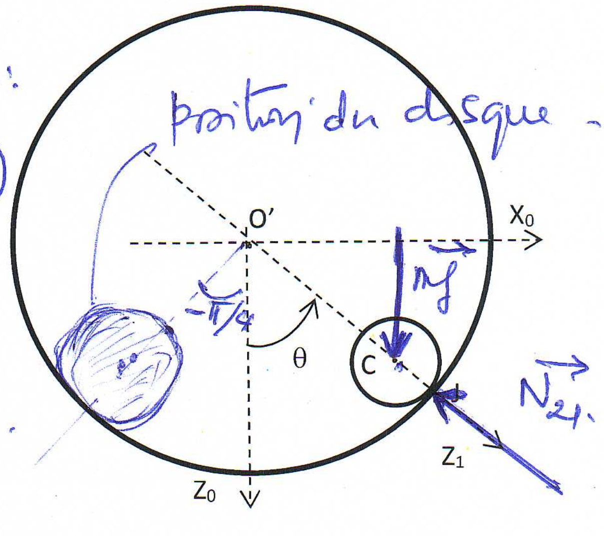
16- Représenter dans ce cas les forces extérieures exercées sur le disque et appliquer le théorème de la résultante dynamique. En déduire la valeur de l'angle θ et celle de la composante N_{21}.

TRD appliqué à S_1 s'écrit :

$$m\vec{g} + \vec{N}_{21} = m\vec{\gamma}(C/R_0)$$

En projection sur R_0 :

$$\begin{cases} x_0 : \; -N_{21}\sin\theta = m\ddot{x} = mg \\ mg - N_{21}\cos\theta = 0 \end{cases}$$



1 pt

⇒ $\boxed{N_{21} = \dfrac{mg}{\cos\theta}}$ et $\tan\theta = -1$ ⇒ $\boxed{\theta = -\pi/4}$