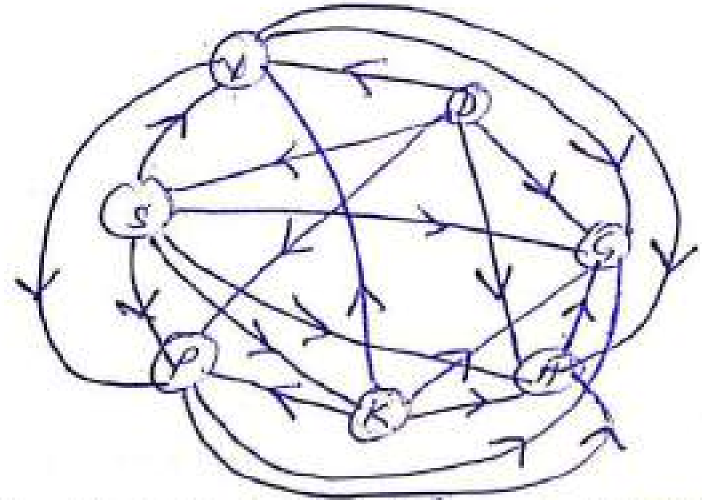
EXN° 1

① ①



G(V.U) V = {D, G, H, K, P, S, V} un sommet v est relié par un arc u à v' si le influence v'

② Non car il ∄ d'arc de v vers D.

③ et ④ à la fois

Sommet	$\Gamma^+(v)$	$\Gamma^-(v)$	$d^+(v)$	$d^-(v)$
D	G, H, P, S V	ϕ	5	0
G	ϕ	D, H, K, P, S, V	0	6
H	G	D, K, P, S, V	1	5
K	G, H, P, V	S	4	1
P	G, H	K, S, V	2	3
S	G, H, K, P, V	D	5	1
V	G, H, P	D, K, S	3	3

successeurs

$\Gamma^+(v) = \{v' \in V \,/\, \exists$ un arc u tous u tq $I(u) = v$ et $T(u) = v'\}$

c'est l'ensemble des personnes qui influence v

$\Gamma^-(v)$ = prédécesseurs de $v = \{v' \in V \,/\, \exists$ un arc u tous u tq $I(u) = v'$ et $T(u) = v\}$

c'est l'ensemble des personnes influencées par v.

Scanned with CamScanner

2

$d^+(v) = |\Gamma^+(v)|$ = nombre de personne qui influencent v

$d^+(v) = |\Gamma^-(v)|$ = nombre de personnes influencées par v.

• La personne la plus influente ~~ez~~ est v tq $d^+(v)$ est max

$$\max_{v \in V} d^+(v) = d^+(D) = d^+(S) = 5$$

donc ~~l~~ deux personnes sont les plus influentes, à savoir D et S

• La personne la plus influencée est v tq $d^-(v)$ est max

$\max d^-(v) = d^-(G) = 6$ donc G est la personne la plus influencée de ce réseau.

6. Matrice d'adjacence.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i \text{ influence } j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|ccccccc} & D & G & H & K & P & S & V \\ \hline D & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ G & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ H & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ K & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ P & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ S & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ V & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Matrice d'incidence laissez aux etudiants

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } I(u_j) = v_i \\ -1 \text{ si } T(u_j) = v_i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

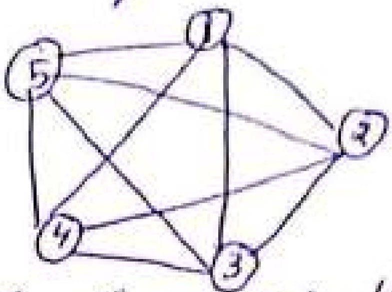
• il faut leur dire de noter les arcs et que la matrice d'incidence est pour un graphe orienté

, il faut pas la faire car on a ~~fait les exemples en cours~~.

Ex N° 2

Il faut commencer par leur dire qu'un graphe complet est un graphe où les sommets sont 2 à 2 adjacents noté K_n

1- Le Pb peut être modelisé par un graphe $G(V.E)$ où V est l'ensemble des personnes notées 1.2.3.4.5 et E est tq deux sommets de V sont adjacents ~~si~~ ssi les deux personnes correspondants se serrent les mains.



C'est un K_5 (complet d'ordre 5)

(a) et (b) à la fois

sommet	voisins $= N(v)$	$d(v) = \|N(v)\|$
1	$2,3,4,5 = V - \{1\}$	$4 = 5-1$
2	$1,3,4,5 = V - \{2\}$	$4 = 5-1$
3	$1,2,4,5 = V - \{3\}$	$4 = 5-1$
4	$1,2,3,5 = V - \{4\}$	$4 = 5-1$
5	$1,2,3,4 = V - \{5\}$	$4 = 5-1$

Si G est complet $\forall v\ N(v) = V - \{v\}$ et $N[v] =$ ~~voisin~~ ensemble des voisins fermé $= N(v) \cup \{v\}$

alors si G est complet $\forall v \in V\ N[v] = V$ et ~~...~~ $d(v) = |V| - 1$

$|V| = Card(V) =$ nbre des sommets de V.

Chaque arête est une poignée de mains donc si on compte le nbre de poignées de mains serrées par chaque personne qui n'est autre que son degré alors chaque poignées de mains sera comptée 2 fois

④

donc

2 fois le nombre de poignées de mains $= d(1) + d(2) + d(3) + d(4) + d(5)$

$= 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$

d'où nbre de poignées de mains $= \frac{20}{2} = 10$ poignées

• Ce nbre représente le nbre d'arêtes d'un graphe complet ayant 05 sommets (un K_5)

2 – Par un graphe orienté

Quand 2 personnes se serrent la mains, toujours l'une d'elles tend la mains la première on considère alors ce sens si v tend la mains avant v' alors on joint v à v' par un arc

$v \rightarrow v'$, donc v se présente à v' pour lui donner la mains

ⓐ et ⓑ en m̂ temps

Sommet	$\Gamma^+(v)$	$\Gamma^-(v)$	$d^+(v)$	$d^-(v)$
1	2, 3, 4, 5	ϕ	4	0
2	3, 4, 5	1	3	1
3	4, 5	1, 2	2	2
4	5	1, 2, 3	1	3
5	ϕ	1, 2, 3, 4	0	4

$\Gamma^+(v) =$ les personne à qui v a serré la main

$\Gamma^-(v) =$ " " qui ont serré la main à v

$d^+(v) =$ nbre de personnes à qui v a serré la main.

$d^-(v)$ " " " qui ont serré la main à v.

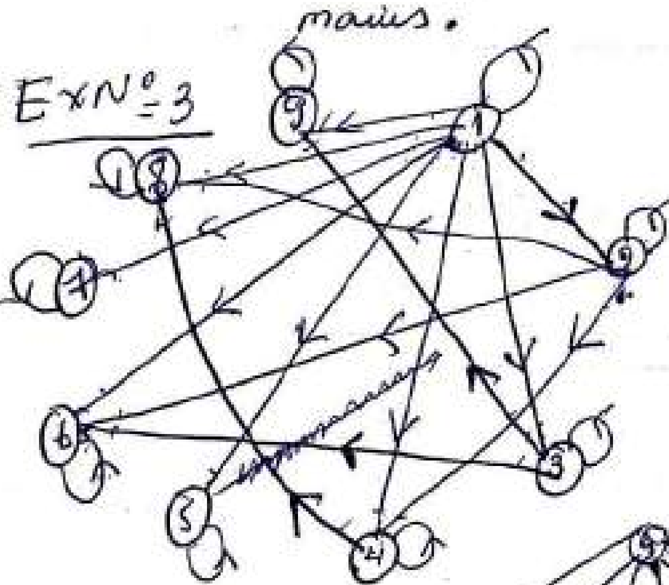
c) • v tq $d^+(v)=0$ est la personne n'ayant serré la main à personne mais tout le monde lui a serré la main c'est la personne 5

• v tq $d^-(v)=0$ est la personne à qui personne n'a serré la main mais a serré la main à tout le monde c'est 1

d) $\sum_{v \in V} d^+(v)$ = nbre de poignées de mains ~~tendues~~ serrées mais tendues pour être serrées = nbre total de poignées de ~~main~~ mains

$\sum_{v \in V} d^-(v)$ = nbre de poignées de mains serrées mais reçues pour être serrées = nbre de poignées de mains.

<EXN° 3



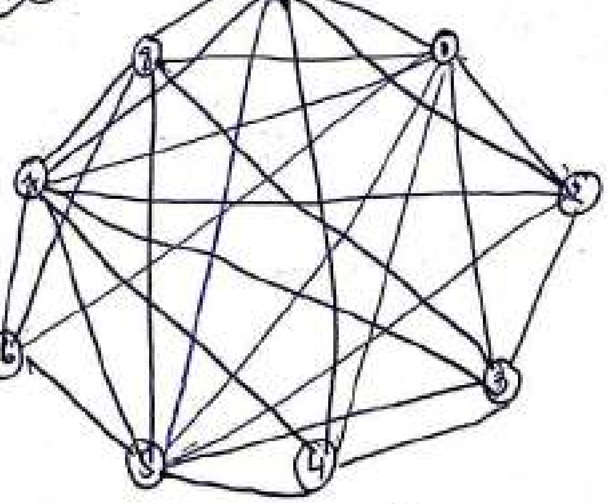
G_1

Dans R_1 $x R y$ si x divise y

Dans R_2 $x \to y$ si x, y sont premiers

car si x/y ne veut pas dire que y/x donc arc

mais si x est premier avec y alors y est premier avec x donc arête.



G_2

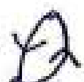
(2) Un pair est un entier multiple de 2 donc v est pair
si 2 est un diviseur de v donc $2/v$ donc $\exists$ dans G_1 un arc de 2 vers $v \Rightarrow v \in \Gamma^+(2)$
donc les pairs $= \Gamma^-(2) = \{2, 4, 6, 8\}$

Or un entier est pair ou impair donc les impairs sont le complémentaire de $\Gamma^+(2) = V - \Gamma^+(2)$
$= \{1, 3, 5, 7, 9\}$

(3) Les sommets de G_3 sont ceux de G_1
Maintenant $x R_1 y \Leftrightarrow x$ divise $y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tq $y = kx$
$\Leftrightarrow y$ est un multiple de $x \Leftrightarrow y R_3 x$

donc si $x R_1 y \Leftrightarrow y R_2 x$ d'où si $x \to y$ est un arc dans G_1
car $x R_1 y \Leftrightarrow y R_3 x$ donc $y \to x$ sera un arc dans G_3
donc G_3 est le graphe G_1 dont les arcs sont orientés dans le sens inverse

(4) Il faut d'abord remarquer que R_1, R_2 et R_3 ne sont pas d'$\Leftrightarrow$

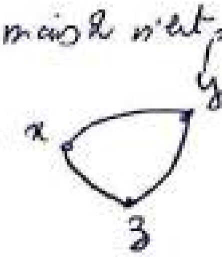
• Si R_1 est symétrique alors si $x R_1 y \Rightarrow y R_1 x$ donc dans G_1 on aura  circuit de longueur 2 entre chaque paire de sommets en relation
de m̂ pour R_3 et dans G_3

• R_2 est symétrique $x R y \Rightarrow y R x$ $\longrightarrow$ arête.

Transitivité

• R_1 est transitive $x R_1 y$ et $y R_1 z \Rightarrow x R_1 z$ dans G_1  dite orientation transitive
donc $\nexists$ aucun circuit de longueur 3 dans G_1

R_2 n'est pas transitive. 2 premier avec 5, 5 premier avec 6 mais 2 n'est pas premier avec 6

Si R_2 est transitive alors dans G_2  cycle de longueur 3

(b)

Remarquons que v est un diviseur commun de v_1 et v_2

→ Si $\exists$ un arc de v vers v_1 et de v vers v_2

dans G_1  donc $v \in \Gamma^-(v_1)$ et $v \in \Gamma^-(v_2)$

$\Rightarrow v \in \Gamma^-(v_1)$

Les diviseurs de $v_1 = \Gamma^-(v_1)$ dans G_1

donc les diviseurs commun de v_1 et $v_2 = \mathcal{E}d(v_1, v_2) = \Gamma^-(v_1) \cap \Gamma^-(v_2)$

donc $pgcd = \max\{\Gamma^-(v_1) \cap \Gamma^-(v_2)\}$ dans G_1

$= \max\{\Gamma^+(v_1) \cap \Gamma^-(v_2)\}$ dans G_2

et Remarquons que v est un multiple de v_1 si $v_1 \to v$

v_1 est un diviseur de v donc $\exists$ un arc de v_1 vers v dans G_1

donc $v \in \Gamma^+(v_1)$

donc v est un multiple commun de v_1 et v_2 $= C.M(v_1, v_2)$ si $v \in \Gamma^+(v_1) \cap \Gamma^+(v_2)$

donc $PPCM = Min\{\Gamma^+(v_1) \cap \Gamma^+(v_2)\}$ dans G_1

$= Min\{\Gamma^-(v_1) \cap \Gamma^-(v_2)\}$ dans G_2

Avec G_1

~~$PGCD(4,6,8) = Max\{\Gamma^-(4) \cap \Gamma^-(6) \cap \Gamma^-(8)\} = Max\{\ldots\}$~~

~~$= Max\{\ldots\} = Max\{1,2\} = 2$ donc $pgcd(4,6,8) = 2$~~

~~$PGCD(3,6,9) = Max\{\Gamma^-(3) \cap \Gamma^-(6) \cap \Gamma^-(9)\} = Max$~~ $\{1,3$

$pgcd(4,6,8) = Max\{\Gamma^-(4) \cap \Gamma^-(6) \cap \Gamma^-(8)\} = Max\{\{1,2,4\} \cap \{1,2,3,6\} \cap \{1,2,4,8\}\}$

$= Max\{1,2\} = 2$ donc $pgcd(4,6,8) = 2$

$pgcd(3,6,9) = Max\{\Gamma^-(3) \cap \Gamma^-(6) \cap \Gamma^-(9)\} = Max\{\{1,3\} \cap \{1,2,3,6\} \cap \{1,3,9\}\}$

$= Max\{1,3\} = 3$

$PPCM(2,4) = Min\{\Gamma^+(2) \cap \Gamma^+(4)\} = Min\{\{2,4,6,8\} \cap \{4,8\}\} = Min\{4,8\} = 4$

$PPCM(2,3) = Min\{\Gamma^+(2) \cap \Gamma^+(3)\} = Min\{\{2,4,6,8\} \cap \{3,6,9\}\} = Min\{6\} = 6$

(6) pgcd(1,2,3,4,5,6,7,8,9) = 1 car $\bigcap_{i=1}^{9} \Gamma^-(i) = \{1\}$ (8)

(7) v est premiers si les seuls diviseurs de v sont 1 et lui même donc dans G_1, v est premier si

$\Gamma^-(v) = \{1, v\}$

On a $\Gamma^-(1) = \{1\}$ premier

$\Gamma^-(2) = \{1,2\}$ premier

$\Gamma^-(3) = \{1,3\}$ premier

$\Gamma^-(4) = \{1,2,4\} \neq \{1,4\}$ non premier

$\Gamma^-(5) = \{1,5\}$ premier

$\Gamma^-(6) = \{1,2,3,6\} \neq \{1,6\}$ non premier

$\Gamma^-(7) = \{1,7\}$ premier

$\Gamma^-(8) = \{1,2,4,8\} \neq \{1,8\}$ non premier

$\Gamma^-(9) = \{1,3,9\} \neq \{1,9\}$ non premier

Donc les premiers sont 1, 2, 3, 5, 7

(8) Pour G_1, c'est une matrice d'incidence.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = I(u_j) \\ -1 & \text{si } i = T(u_j) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour G_2 c'est une matrice d'adjacence.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont adjacent} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour G_2 c'est - celle de G_2

$$\text{donc } -a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si } i = I(u_j) \\ 1 & \text{si } i = T(u_j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$ avec u_j arc de G_1

Ex N°4

G est simple pas d'arête multiple.

(1) Si G est complet $\forall v \; d(v) = n-1$

$$\Rightarrow \sum_{v \in V} d(v) = d(v_1) + \dots + d(v_n) = (n-1) + \dots + (n-1) = n(n-1)$$

Or dans le cours on a vu que $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$

donc $2m = n(n-1) \Rightarrow m = \frac{n(n-1)}{2}$

Sinon G n'est pas complet donc comme G est simple

donc $\forall v, \; d(v) \leq n-1$

$$\text{donc } 2m = \sum_{i=1}^{n} d(v_i) = d(v_1) + \dots + d(v_n) \leq (n-1) + \dots + (n-1) = n(n-1)$$

$\Rightarrow 2m \leq n(n-1) \Rightarrow m \leq \frac{n(n-1)}{2}$

(2) Soit $V_1 = \{v \in V \,/\, \text{degré de } v \text{ est pair}\}$

$V_2 = \{v \in V \,/\,$ " " " " impair $\}$

Il est clair que $V = V_1 \cup V_2$ et que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

donc $|V| = n = |V_1| + |V_2|$

$$\text{Or } 2m = \sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V_1} d(v) + \sum_{v \in V_2} d(v)$$

$$= d(v_1) + \dots + d(v_{|V_1|}) + \sum_{v \in V_2} d(v)$$

$$= 2k_1 + \dots + 2k_{|V_1|} + \sum_{v \in V_2} d(v)$$

$$\text{donc } \sum_{v \in V_2} d(v) = 2m - 2(k_1 + \dots + k_{|V_1|}) = 2(m - (k_1 + \dots + k_{|V_2|}))$$

$$= 2(k'), \; k' \in \mathbb{Z}$$

donc $\sum_{v \in V_2} d(v)$ est paire. (*) La somme d'impairs est paire si le nombre d'impairs sommés est pair

mais $\sum_{v \in V_2} d(v)$ est une somme d'impairs donc $|V_2|$ est pair car *

En effet $d(v_1) + \cdots + d(v_{|V_2|}) = (2k_1+1) + (2k_2+1) + \cdots + (2k_{|V_2|}+1)$

$= (2k_1 + 2k_2 + \cdots + 2k_{|V_2|}) + (\underbrace{1 + \cdots + 1}_{|V_2| \text{ fois}})$

$= 2(k'') + |V_2| = \sum_{v \in V} d(v) - \sum_{v \in V_1} d(v) = 2k'$

donc $|V_2| = 2k' - 2k'' = 2(k' - k'') = 2k'''$, $k''' \in \mathbb{Z}$

donc $|V_2|$ est pair

donc le nombre de sommets de degré impair qui est $|V_2|$ est pair.

③ Par L'absurde.

Supposons $\nexists$ de sommets de m̂ degré donc les degrés des sommets sont 2 à 2 $\neq$, comme on'a n sommets donc $\forall v$, $d(v) \leq n-1$ et G simple donc un seul cas est possible est que

$$\left.\begin{array}{l} d(v_1) = n-1 \\ d(v_2) = n-2 \\ \vdots \\ d(v_n) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

Contradiction du fait que $d(v_1) = n-1$ donc v_1 adjacent à tous les autres sommets donc à v_n or $d(v_n) = 0$ donc v_n n'est adjacent à aucun autre sommet donc n'est pas adjacent à v_1 Contradiction

donc $\exists$ au moins 2 sommets u et v tq $d(u) = d(v)$

④ $\forall v \in V\ d(v) \leq \Delta \Rightarrow \sum d(v) \leq n\Delta$ or $\sum d(v) = 2m$

donc $2m \leq n\Delta \Rightarrow n \geq \frac{2m}{\Delta}$.

⑤ $\forall v \in V\ d(v) \geq \delta \Rightarrow 2m = \sum_{v \in V} d(v) \geq n\delta$ (11)

d'où $m \geq \frac{n\delta}{2}$.

⑥ Par recurrence sur n

• Si G est sans arêtes le resultat est vrai G est sans K_3 et $0 \leq \frac{n^2}{4}$.

$\forall n \leq 2$ le resultat est vrai car au plus une arêtes si $n \leq 2$

donc $1 \leq \frac{2^2}{4} = 1$ vrai

Hypothese de recurrence (HR)

Supposons que le resultat est vrai pour un graphe ayant moins de n sommets $(n \geq 3)$ $n' < n$ sans K_3.

donc $m' \leq \frac{n'^2}{4}$ avec m' nbre d'arête de G ayant $n' < n$ sommets

Montrons alors le resultat pour un graphe G à n sommets sans K_3

• Si G est sans arêtes le resultat est vrai

$0 \leq \frac{n^2}{4}$

• Supposons alors que G possède au moins une arête (u,v)

et Considerons le graphe G' obtenu en supprimant de G L'arete (u,v) et le sommets u, v

notons:

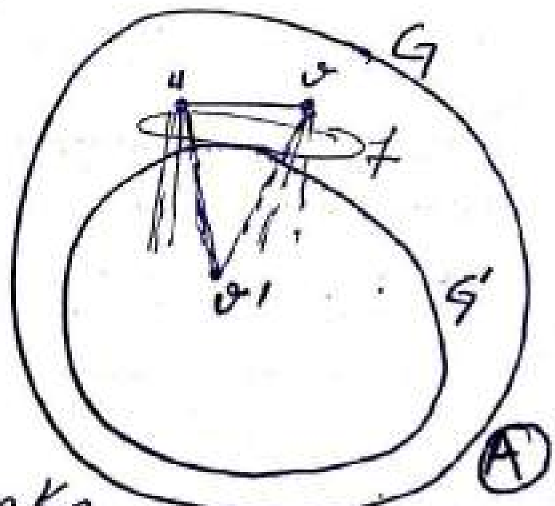
m = nbre d'arête de G

n = " de sommets de G

m' = nbre d'arête de G'

n' = " de sommets de G

f = nbre d'arêtes liants u et v au sommets de G'



G' est sans K_3 car G est sans K_3

Il est clair que $m = m' + f + 1$

et $n = n' + 2 \Rightarrow n' = n - 2 < n$

Comme G' a $n' < n$ sommets donc d'après HR

$$m' \leq \frac{(n')^2}{4} \quad \ldots\ldots (1)$$

Comme G est sans K_3 donc $\forall v'$ un sommet de G', v' est lié à plus un des sommets u et v, jamais ~~les deux~~ les deux au même temps car sinon on forme un K_3 avec les sommets u, v et v' voir figure (A)

donc $f \leq n'$ $\ldots (2)$

donc $m = m' + f + 1 \leq \frac{(n')^2}{4} + n + 1 = \frac{n'^2 + 4n + 4}{4}$

$$= \frac{(n'+2)^2}{4} = \frac{n^2}{4}$$

d'où $m \leq \frac{n^2}{4}$ donc le resultat est vrai pour un graphe G ayant n sommets sans K_3

Finalement si G est sans K_3 $m \leq \frac{n^2}{4}$

(4) Si G est sans K_4 alors $m \leq \frac{n^2}{3}$

<u>Par recurrence sur n:</u>

- Si $n \leq 3$ le resultat est vrai car au max on aura $m = 3 \leq \frac{9}{3} = 3$ vrai

- <u>HR</u> Supposons vrai pour un graphe sans K_4 ayant moins de n sommets.

- Montrons le resultat pour un graphe G sans K_4 ayant n sommets.

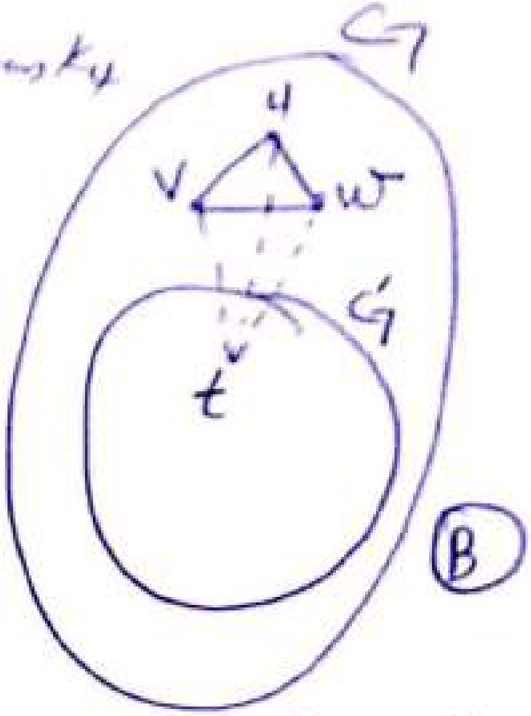
• Si G est sans arêtes le résultat est vrai $0 \leq \frac{n^2}{3}$.

• Si G est sans K_3 le résultat est vrai car d'après ⑥ $m \leq \frac{n^2}{4} < \frac{n^2}{3}$

Supposons alors que G possède au moins un K_3 et soient (u, v, w) ses sommets

Considérons alors le graphe G' obtenu en supprimant de G le K_3 et les sommets u, v et w

donc G' est sans K_4 car G est sans K_4



Comme dans ⑥ notons

n :
m :
n' :
m' :
f :

Il est clair que $n' = n - 3$ — ①

et $m = m' + f + 3$ — ②

Comme G' a $n' < n$ sommets sans K_4 donc d'après L'HR $m' \leq \frac{(n')^2}{3}$ ... ③

Comme G est sans K_4 donc $\forall t$ un sommet de G' t est relié à au plus 2 sommets du K_3 (u, v, w) sinon on forme un K_4 avec (u, v, w) et t voir Ⓑ

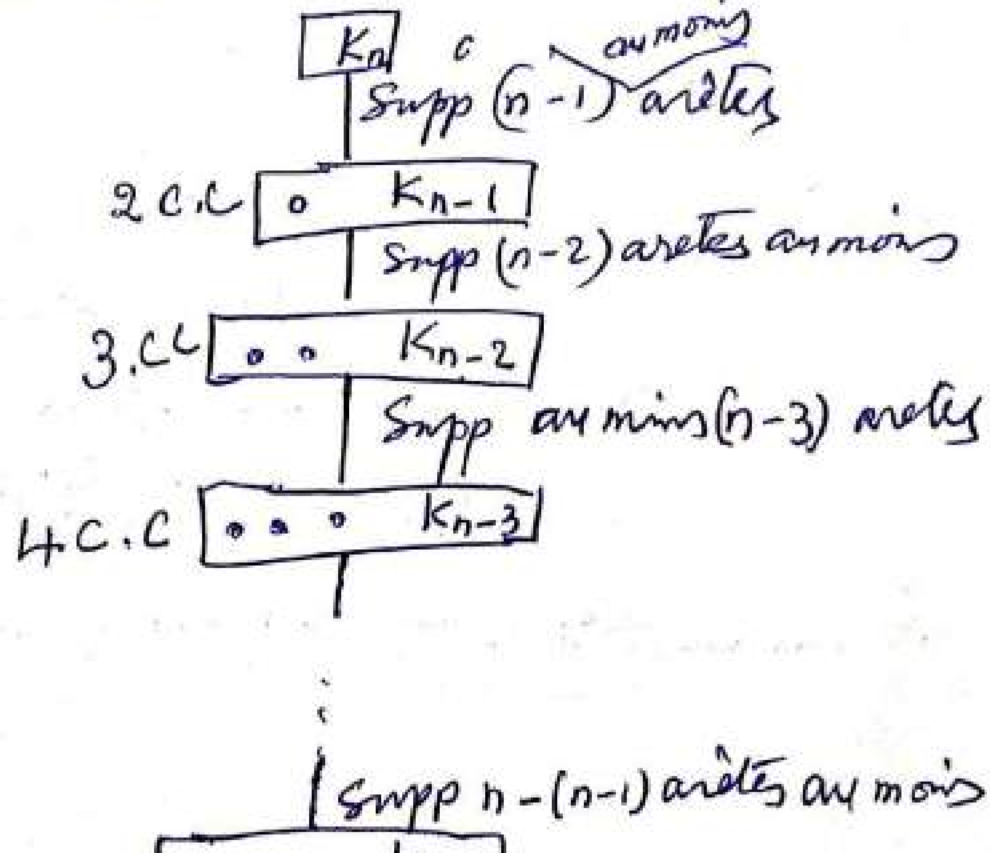
donc $f \leq 2n'$ — ④

d'où de (1) à (4)

$$m = m' + 7 + 3 \leq \frac{n'^2}{3} + 2n + 3 = \frac{n'^2 + 6n + 9}{3}$$
$$= \frac{(n'+3)^2}{3} = \frac{n^2}{3}$$

Donc $m \leq \frac{n^2}{3}$ d'où le résultat.

(8) Si G est complet (donc un K_n) donc pour avoir 2 C.C il faut au moins supprimer $(n-1)$ arêtes de G. On obtient un sommet isolé et un K_{n-1}, puis pour avoir 3.C.C on supprime de K_{n-1} au moins $(n-2)$ arêtes on obtient 2 sommets isolés et un K_{n-2} donc on supprime au moins $(n-3)$ arêtes pour avoir 4 C.C et un K_{n-3} ainsi de suite jusqu'à avoir p. C. C.



Donc en demarrant d'un complet K_n le nombre d'arêtes à la fin est

$$m = \frac{n(n-1)}{2} - (n-1) - (n-2) - \dots - (n-(p-1))$$

or si G n'est pas forcement un K_n donc $m \leq \frac{n(n-1)}{2}$ on obtient alors

$$m \leq \frac{n(n-1)}{2} - \left[(n-1)+(n-2)+\dots+(n-p+1)\right]$$

or $(n-1)+\dots+(n-p+1)$ est la somme des termes succesifs d'une suite arithmetique de raison -1

donc $(n-1)+\dots+(n-p+1) = \frac{p-1}{2}\left((n-1)+(n-p+1)\right)$

$p-1$ est le nbre de termes de $(n-1)$ à $n-p+1$
$= (n-1)-(n-p+1)+1$
$= p-1$ termes

donc $m \leq \frac{n(n-1)}{2} - \frac{p-1}{2}(2n-p)$

$$= \frac{1}{2}\left[n(n-1) - (p-1)(2n-p)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[n^2 - n - 2np + p^2 + 2n - p\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[n^2 + n - np - np + p^2 - p\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[n(n+1-p) - p(n-p+1)\right]$$

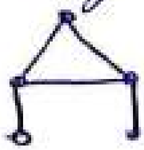
$$= \frac{1}{2}\left[(n-p+1)(n-p)\right] = \frac{(n-p)(n-p+1)}{2}$$

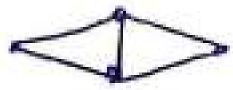
donc $m \leq \frac{(n-p)(n-p+1)}{2}$ ✓

⑨ $d(v) \leq n-1$ 16

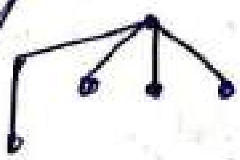
ⓐ Non car on a 7 sommets donc on ne peut pas avoir un sommets de degré 7 de plus ∄ de sommets de mê degré donc d'après ③ impossible donc ① ne peut former un graphe. (∄ ∃ d'autres raison)

ⓑ non, on a $n=7$ et deux ~~degré~~ sommets u et v sont de degrés 6 donc $d(u)=6$ et $d(v)=6$ or dans ce cas u est relié à tous les autres sommets mê à v ainsi que v est relié à tous les autres mê à u, donc dans ce cas ∀ un sommet son degré est ≥ 2 donc 1 ne peut être un degré.

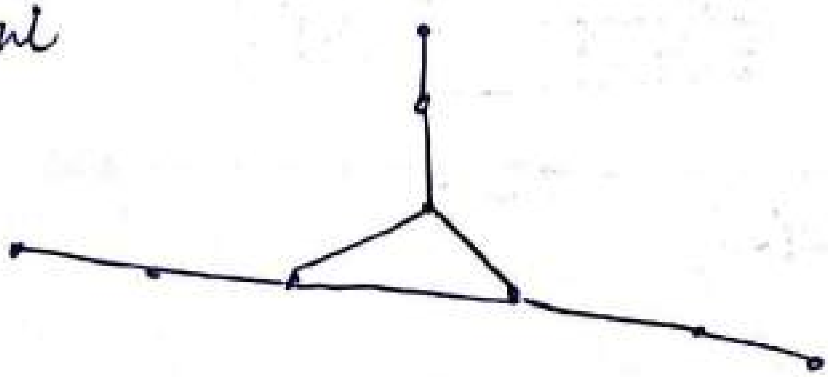
ⓒ oui on a 

ⓓ oui on a 

ⓔ non. Par l'absurde. donc $2m = \sum d(v) = 16 \Rightarrow m = 8$ donc en supprimant les 4 sommets de degré 1 on supprime alors au plus 4 arêtes donc il reste 3 sommets et au moins 4 arêtes ce qui est impossible dans un graphe simple.

ⓕ oui 

ⓗ oui



Fin