



## Travaux pratiques de mécanique et de Vibrations et ondes

Domaine : sciences techniques

Filière : génie mécanique, génie-civil & génie électrique

Année universitaire : 2018/2019

**TP1** : Moments d'inertie et mouvement de torsion

**TP2** : Oscillations libres et forcées. Pendule de pohl

**TP3** : Pendule réversible

**TP4** : Oscillations libres de pendules couplés

**TP5** : Résonance de tension d'un circuit RLC série

**TP6** : Analyse de Fourier



**Travaux pratiques de vibrations et ondes**  
**TP N°1 : Moments d'inertie et mouvements de torsion**

**1. Principe**

Différents corps exécutent autour de leur axe de centre de gravité des mouvements oscillants de torsion. On mesure la durée des oscillations ce qui permet la détermination du moment d'inertie.

**objectifs**

- Déterminer la constante de torsion d'un ressort en spirale.
- Déterminer le moment d'inertie d'un disque, d'un cylindre creux, d'un cylindre plein, d'une sphère et d'une barre.
- Déterminer le moment d'inertie de deux points matériels en fonction de la distance verticale à l'axe de rotation. Le centre de gravité se trouve sur l'axe de rotation.
- Vérification du théorème de Steiner (théorème des axes parallèles) en déterminant le moment d'inertie d'un disque en fonction de la distance verticale de l'axe de rotation au centre de gravité.

**1. Aperçu théorique**

Tout point matériel de masse  $m$  animé d'un mouvement circulaire de rayon  $r$  est soumis à une accélération  $\vec{\gamma}$  non nulle (car la vitesse n'est pas constante en module et en direction) et par suite, à une force  $\vec{F} = m\vec{\gamma}$  non nulle et dont la direction est située dans le plan de la trajectoire. La composante tangentielle de la force s'écrit :

$$F_t = m \frac{dv}{dt} = mr \frac{d\omega}{dt}$$
$$rF_t = mr^2 \frac{d\omega}{dt}$$

Les divers points, d'un solide en rotation autour d'un axe  $\Delta$ , ont même vitesse angulaire  $\omega$  et même accélération angulaire  $\frac{d\omega}{dt}$ . En écrivant pour chaque point du solide en rotation la relation précédente et en sommant sur tous les points, on obtient :

$$\sum rF_t = (\sum mr^2) \frac{d\omega}{dt}$$

La quantité positive  $J = \sum mr^2$  est par définition le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe  $\Delta$ . Il caractérise la répartition de la masse du solide par rapport cet axe. Le mouvement de rotation d'un solide est influencé par son moment d'inertie. Ce dernier caractérise l'inertie du système à modifier sa vitesse angulaire. Exemple: le mouvement d'un patineur lorsque celui-ci effectue une figure de toupie :

- si les bras du patineur sont écartés alors le moment d'inertie est important et le patineur tourne moins vite ;
- si les bras sont le long du corps alors le moment d'inertie est faible et la vitesse de rotation du patineur augmente.

Remarque : la masse joue un rôle analogue dans les mouvements de translation.

$\sum r F_i$  est le moment résultant ou couple par rapport à l'axe des forces appliquées. On le représente par  $\vec{M}$ . La relation fondamentale de la dynamique s'écrit dans le cas de rotation :

$$\vec{M} = J \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Les moments d'inertie d'un corps par rapport aux axes de coordonnées cartésiennes sont données par :

$$J_x = \int_m (y^2 + z^2) dm = \int_v (y^2 + z^2) \rho dv = \iiint (y^2 + z^2) \rho dx dy dz$$

$$J_y = \int_m (x^2 + z^2) dm = \int_v (x^2 + z^2) \rho dv = \iiint (x^2 + z^2) \rho dx dy dz$$

$$J_z = \int_m (x^2 + y^2) dm = \int_v (x^2 + y^2) \rho dv = \iiint (x^2 + y^2) \rho dx dy dz$$

où  $m$ ,  $\rho$  et  $v$  sont respectivement la masse, la densité et le volume du corps.  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont les coordonnées d'une particule élémentaire de volume  $dv$  et de masse  $dm$ .

Selon le théorème de Steiner (théorème des axes parallèles), le moment d'inertie  $J_\Delta$  d'un corps par rapport à un axe arbitraire  $\Delta$  est égal à la somme du moment d'inertie  $J_{\Delta'}$  de ce corps par rapport à un axe  $\Delta'$  parallèle à  $\Delta$  et passant par le centre d'inertie du corps et du produit de la masse du corps par le carré de la distance  $a$  entre les axes  $\Delta$  et  $\Delta'$  :

$$J_\Delta = J_{\Delta'} + ma^2$$

Expression de quelques moments d'inertie :

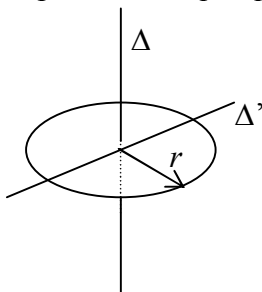


Figure 1a

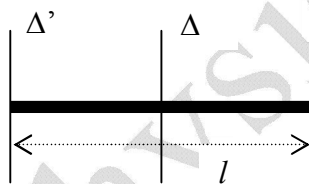


Figure 1b

Disque (figure 1a)

$$J_\Delta = m \frac{r^2}{2}$$

$$J_{\Delta'} = m \frac{r^2}{4}$$

Tige (figure 1b)

$$J_\Delta = m \frac{l^2}{12}$$

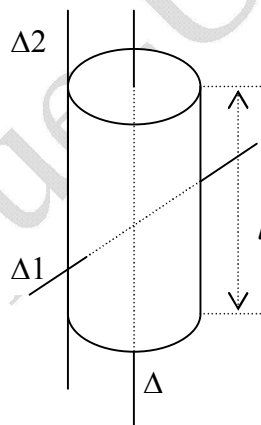


Figure 1c

Cylindre creux (figure 1c)

$$J_{\Delta'} = m \frac{l^2}{3}$$

Cylindre plein (figure 1c)

$$J_\Delta = m \frac{r^2}{2}$$

$$J_{\Delta 1} = m \left( \frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{12} \right)$$

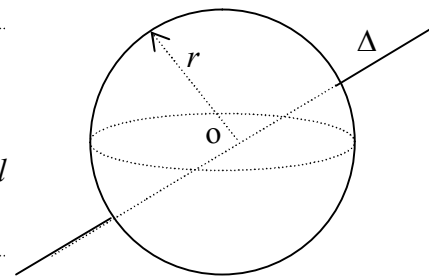


Figure 1d

Sphère creuse (figure 1d)

$$J_{\Delta 2} = \frac{3}{2} mr^2$$

$$J_\Delta = \frac{2}{3} mr^2$$

Sphère pleine (figure 1d)

$$J_\Delta = \frac{2}{5} mr^2$$

Un pendule de torsion est constitué par un corps oscillant homogène, suspendu en un point O à un ressort spiral de constante de torsion  $C$ . Le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe de rotation est  $J$ . Si on fait tourner, dans le plan horizontal, le corps d'un angle  $\theta$ , il sera soumis à un couple de torsion :  $M_r = -C\theta$  et si on le lâche, il sera équilibré par le couple d'inertie  $M_i = J\ddot{\theta} = J \frac{d\omega}{dt}$ .

D'où d'après la loi fondamentale de la dynamique :

$$J\ddot{\theta} + C\theta = 0$$

En introduisant la pulsation  $\omega_0 = \sqrt{\frac{J}{C}}$ , l'équation du mouvement devient  $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ . Sa solution est :  $\theta = a \cos(\omega_0 t + \varphi)$  et sa période est  $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}}$ . Ainsi si on mesure la durée de l'oscillation, on peut déterminer le moment d'inertie du corps par la relation :

$$J = \frac{CT^2}{4\pi^2}$$

## 2. Manipulation

### 2.1 Matériel utilisé

- Axe de rotation
- Différents corps : sphère, disque, cylindre creux, cylindre plein, barre avec masses mobiles et disque avec trous diamétraux.
- Dynamomètre 2,5 N
- Barrière lumineuse à fourchette.
- Compteur électronique digital à 4 décades.
- Divers supports et câbles de connexion.

### 2.2 Mode opératoire de la barrière optique à fourche

La barrière optique à fourche permet de commander électroniquement des compteurs, des horloges et d'autres appareils électroniques. Dans notre cas, elle est raccordée à un compteur numérique à 4 décades réglé à la fonction chronomètre. La diode lumineuse s'allume lorsque la diode photo-électrique est obscurcie. Le récepteur est placé dans un petit orifice pour le protéger des lumières parasites. En un endroit quelconque entre la source de lumière et le récepteur, il suffit d'un corps d'un diamètre efficace de moins de 1 mm pour obscurcir le récepteur et à proximité immédiate de l'orifice du récepteur un diamètre de 0,3 mm suffit. La sensibilité de réponse optimale est réglée automatiquement lors de l'enclenchement de l'appareil et chaque fois que l'on actionne la touche « SET ».

Le mode opératoire de branchement de la barrière optique au compteur numérique à 4 décades réglé à la fonction chronomètre se fait comme suit :

- Visser la tige de 25cm à la barrière à fourche de telle façon que cette barrière montée sur une embase, le faisceau lumineux est verticale.
- Alimenter la barrière à fourche en connectant respectivement les bornes « 5V » et «  $\perp$  » de la barrière à fourche aux bornes rouge et bleu « 5V / 1A » du compteur numérique.
- Court-circuiter les douilles supérieures des bornes « Start/Stop » et « Stop » du compteur numérique à 4 décades.
- Connecter l'une de ses douilles court-circuitées à la borne « Out » de la barrière à fourche.
- Allumer le compteur et sélectionner le mode « TIMER » en utilisant le bouton « FUNKTION » et le mode « [ ] » en utilisant le bouton « TRIGGER ».

- Le compteur est apte à prendre des mesures en actionnant le bouton « START ».
- Vérifier le bon fonctionnement de l'ensemble en coupant deux fois le faisceau lumineux.
- La remise à zéro est obtenue en actionnant le bouton « RESET » du compteur.

### **2.3 Mesure de la constante de torsion du ressort en spirale**

La mesure de la constante de torsion est réalisée selon le montage de la figure ci-dessous et selon le mode opératoire suivant :

- Monter l'axe de rotation sur un trépied.
- Fixer la barre (sans les masses) en son milieu sur l'axe de rotation.
- Placer la barrière lumineuse à fourche de telle façon que la barre immobile interrompe le rayon lumineux. Le LED d'affichage de la barrière lumineuse s'allume.
- Tourner la barre de  $\theta = 180^\circ$ . En cette position, la barre interrompe à nouveau la barrière lumineuse et la diode lumineuse d'affichage s'allume à nouveau.
- A l'aide d'un dynamomètre placé perpendiculairement à la barre, mesurer la force  $F$  nécessaire pour écarter la barre et mesurer aussi le bras de levier (distance entre le dynamomètre et l'axe de rotation).
- Refaire les deux dernières opérations pour  $\theta = 2\pi$  et  $3\pi$ . Attention : ne jamais subir au ressort une rotation au-delà de  $\pm 720^\circ$ .
- Dédire le moment de torsion puis la constante de torsion.



### **4.4 Mesure du moment d'inertie de différents corps**

Dans cette partie, on mesure la période des oscillations de différents corps afin de déterminer le moment d'inertie en utilisant la relation entre le moment d'inertie  $J$ , la période des oscillations  $T$  et la constante de torsion  $C$  du ressort en spirale. La manipulation est réalisée selon le mode opératoire suivant :

- Fixer le cylindre plein sur l'axe de rotation (figure ci-dessus).
- Mettre en place un écran fixé par collage sur le cylindre (exemple du scotch non transparent).

- Le cylindre étant en position de repos, placer la barrière lumineuse de telle façon que l'écran coupe le faisceau lumineux.
- Tourner le cylindre de  $180^\circ$ .
- Actionner le bouton « RESET » puis le bouton « START » du compteur numérique et lâcher le cylindre.
- Relever la valeur indiquée par le compteur numérique. Cette valeur représente la durée d'une demi-oscillation.
- Refaire la mesure en tournant le cylindre de  $180^\circ$  dans le sens opposé. La période des oscillations étant ainsi la somme des deux durées mesurées.
- Déduire la valeur du moment d'inertie du cylindre plein.
- Refaire la même expérience en remplaçant le cylindre par un cylindre creux, puis par une sphère, puis par un disque et en enfin par la barre métallique sans les masses (Remarque : un écartement de  $90^\circ$  au lieu de  $180^\circ$  est recommandé pour la barre métallique).
- Comparer les valeurs expérimentales du moment d'inertie des différents corps aux valeurs calculées en utilisant les caractéristiques ci-dessous :

Corps	Dimensions	Masse
Cylindre plein	$r = 4,95 \text{ cm}$	$m = 367 \text{ g}$
Cylindre creux	$r_{int} = 4,6 \text{ cm}$ et $r_{ext} = 5 \text{ cm}$	$m = 372 \text{ g}$
Sphère	$r = 7 \text{ cm}$	$m = 761 \text{ g}$
Disque	$r = 10,8 \text{ cm}$	$m = 284 \text{ g}$
Barre sans masses	$L = 60 \text{ cm}$	$m = 133 \text{ g}$

- Conclure

#### **4.5 Mesure du moment d'inertie de deux masses identiques en fonction de leur distance à l'axe de rotation**

- Fixer la barre métallique sur l'axe de rotation (Le centre de gravité de la barre doit être sur l'axe de rotation).
- Glisser de chaque côté de la barre une des deux masses de 441g.
- Placer ces masses de façon équidistantes, à une distance de  $a = 5 \text{ cm}$  de l'axe (distance vis à vis).
- Mesurer la période des oscillations et déduire le moment d'inertie  $J$  du système barre – masses.
- Refaire la manipulation pour  $a = 10, 15, 20$  et  $25 \text{ cm}$ .
- Dresser un tableau de mesures et tracer la courbe  $J = f(a^2)$ .
- Déduire la masse des deux masses utilisées et conclure.

#### **4.6 Vérification du théorème de Steiner**

- Fixer le disque circulaire avec trous diamétraux sur l'axe de rotation. Ce disque est placé de telle façon que l'axe de rotation passe par le centre de gravité ( $a = 0$ ).
- Après avoir écarté le disque de  $180^\circ$ , mesurer la période des oscillations et déduire le moment d'inertie.
- Refaire la même expérience en déplaçant l'axe de rotation de  $a = 3, 6, 9$  et  $12 \text{ cm}$  par rapport à l'axe passant par le centre de gravité du disque.
- Dresser un tableau de mesures et tracer la courbe  $J = f(a^2)$ .
- Le théorème de Steiner est-il vérifié ?



**Travaux pratiques de vibrations et ondes**  
**TP N°2 : Oscillations libres et forcées. Pendule de Pohl**

**1. Principe**

Dans le cas d'un système oscillant librement, la décroissance de l'amplitude des oscillations est fortement dépendante de degré de l'amortissement. En régime permanent de cas de système soumis à une excitation sinusoïdale, l'amplitude des oscillations est liée à la fréquence et à l'amplitude de l'excitation et aussi au degré d'amortissement. On relève lors de cette séance de travaux pratiques, les courbes caractéristiques des oscillations libres ainsi que de la courbe de résonance d'oscillations forcées d'un pendule de torsion de Pohl.

**Objectifs**

- Mesurer l'amplitude des oscillations d'un pendule de torsion en fonction du temps pour divers degrés d'amortissement.
- Déterminer la constante d'atténuation et le décrément logarithmique pour ces divers degrés d'amortissement.
- Visualiser la résonance et étudier son « intensité » en fonction de l'amortissement.

**2. Aperçu théorique**

**2.1 Oscillateurs linéaires amortis en régime libre**

Dans le cas d'oscillations d'un pendule soumis à l'action d'un couple de rappel  $-C\theta$  et d'un couple freinage proportionnel à la vitesse  $-f\dot{\theta}$ , le mouvement de ce système oscillant obéit à l'équation différentielle suivante :

$$I\ddot{\theta} + f\dot{\theta} + C\theta = 0$$

$\theta$  est l'angle de rotation,  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$  est la vitesse angulaire,  $\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$  est l'accélération angulaire,  $f$  est la constante de proportionnalité de l'amortisseur et  $I$  est le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe de rotation.

Si on pose  $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{I}}$  pulsation propre de l'oscillateur et  $\alpha = \frac{f}{2I}$  coefficient d'amortissement, l'équation différentielle devient :

$$\ddot{\theta} + 2\alpha\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. Sa solution est de la forme  $\theta = Ae^{rt}$  et dépend du discriminant  $\Delta' = \alpha^2 - \omega_0^2$  de l'équation caractéristique :

$$r^2 + 2\alpha r + \omega_0^2 = 0$$

1<sup>er</sup> cas :  $\Delta' < 0 \Rightarrow \alpha < \omega_0$

L'amortissement est faible, l'équation caractéristique admet 2 racines complexes :

$$r = -\alpha \pm j\omega \quad \text{avec } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

La solution  $\theta = e^{-\alpha t} (A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{-j\omega t})$  peut se mettre sous la forme :  $\theta = ae^{-\alpha t} \cos(\omega t - \varphi)$

C'est une sinusoïde amortie : le régime est oscillatoire amorti.

2<sup>ème</sup> cas :  $\Delta' > 0 \Rightarrow \alpha > \omega_0$

L'amortissement est fort. L'équation caractéristique a deux racines réelles  $r = -\alpha \pm \beta$  avec  $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ . La solution est de la forme :  $\theta = e^{-\alpha t} (A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t})$ .

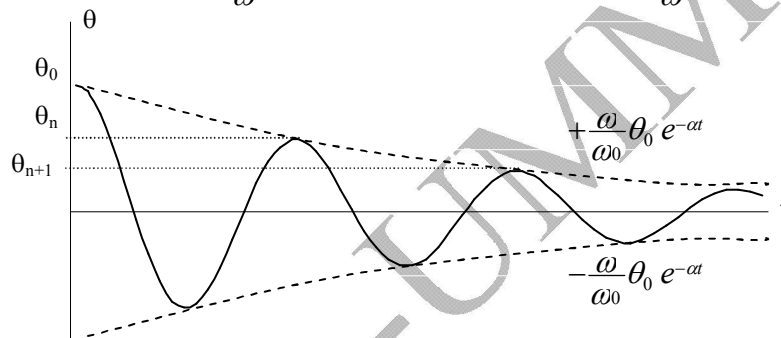
Il n'y a plus d'oscillations, le régime est apériodique.

3<sup>ème</sup> cas :  $\Delta' = 0 \Rightarrow \alpha = \omega_0$

Le coefficient  $\alpha$  est égal à la pulsation propre de l'oscillateur, c'est le régime critique. L'équation caractéristique admet une racine double  $r = -\alpha$ . La solution devient alors :  $\theta = e^{-\alpha t} (a + bt)$ .

En régime oscillatoire et lorsque l'amortissement est faible, l'équation du mouvement s'écrit :  $\theta = a e^{-\alpha t} \cos(\omega t - \varphi)$ . Les constantes  $a$  et  $\varphi$  sont déterminées à partir des conditions initiales. On peut choisir par exemple à  $t = 0$ ,  $\theta = \theta_0$  et  $\dot{\theta} = 0$ . Dans ce cas l'oscillateur est dévié d'un angle  $\theta_0$  puis abandonné à lui-même sans vitesse initiale. Avec ces conditions l'équation du mouvement devient :

$$\theta = \theta_0 \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\alpha t} \cos(\omega t - \varphi) \quad \text{avec } \tan \varphi = \frac{\alpha}{\omega}$$



La courbe qui représente cette fonction est une sinusoïde amortie comprise entre deux exponentielles d'équation :  $\theta = \pm \theta_0 \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\alpha t}$ . Le mouvement est pseudo périodique, car, en raison de l'amortissement, il ne se reproduit pas de la même façon au bout d'un temps  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . L'intervalle  $T$  séparant deux amplitudes consécutives est constant.  $T$  est la pseudo période. Le rapport de deux amplitudes consécutives est :

$$\frac{\theta_n}{\theta_{n+1}} = e^{\alpha T} = e^{\delta}$$

où  $\delta = \alpha T = \text{Log} \left( \frac{\theta_n}{\theta_{n+1}} \right)$  est le décrément logarithmique. L'oscillateur effectue un certain nombre d'oscillations et finit par s'immobiliser à sa position d'équilibre.

## 2.2 Oscillateurs amortis en régime forcé

Le pendule est en plus soumis à l'action d'un couple périodique  $M_a = M_0 \cos(\omega_a t)$ , l'équation différentielle régissant l'oscillateur devient :

$$\ddot{\theta} + 2\alpha\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = F_0 \cos(\omega_a t)$$

où  $F_0 = \frac{M_0}{I}$  et  $\omega_a$  est la pulsation imposée. La solution générale de cette équation est la somme de la solution sans second membre et d'une solution particulière avec second membre.



La première n'intervient que durant le régime transitoire, quant à la seconde, elle représente l'évolution de l'oscillateur lorsque le régime permanent est établi.

En régime permanent, le système oscille à la pulsation imposée  $\omega_a$  avec une amplitude  $\theta_a$  et un déphasage  $\psi$  par rapport à l'excitation  $M_a$  :

$$\theta(t) = \theta_a \cos(\omega_a t - \psi)$$

$$\theta_a = \frac{\theta_0}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_a}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left[2 \frac{\alpha}{\omega_0} \frac{\omega_a}{\omega_0}\right]^2}} \quad \text{où} \quad \theta_0 = \frac{F_0}{\omega_0^2}$$

$$\tan \psi = \frac{2\alpha\omega_a}{\omega_0^2 - \omega_a^2}$$

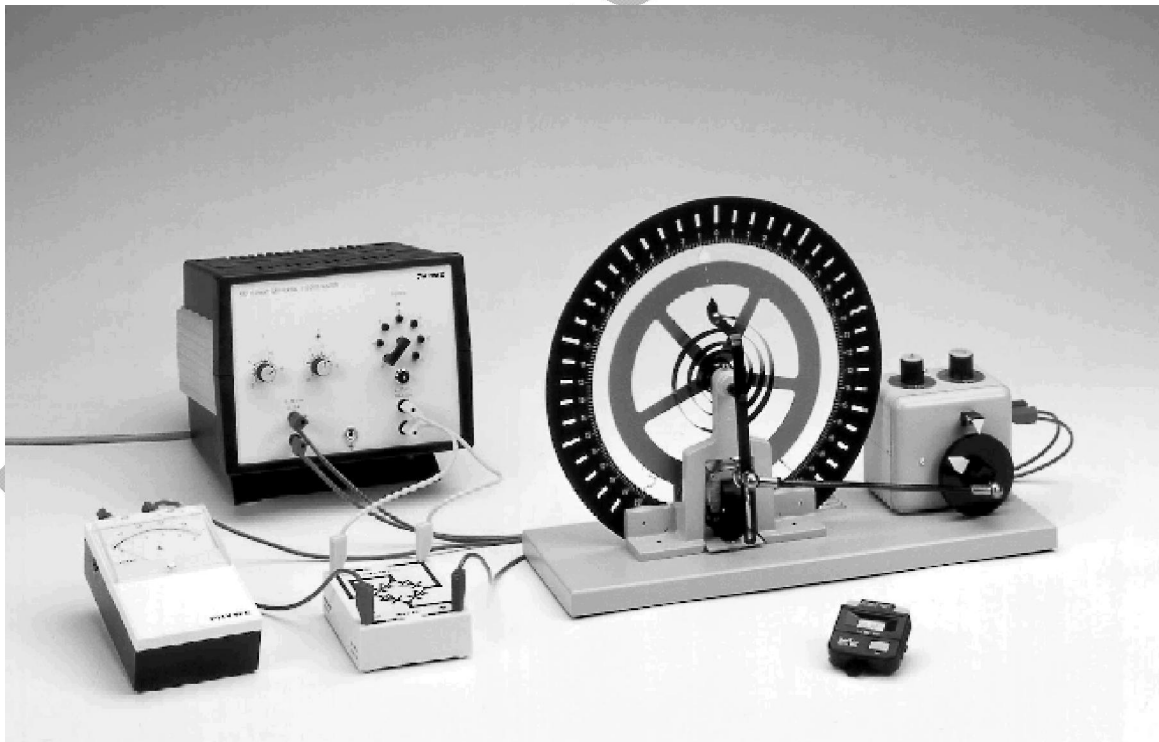
### 3. Exploitation expérimentale

#### 3.1 Matériel utilisé

- Un pendule de torsion selon Pohl
- Une alimentation universelle
- Un pont de diode 30 V AC / 1 A DC
- Un ampèremètre.
- Un chronomètre.
- Divers câbles de connexion.

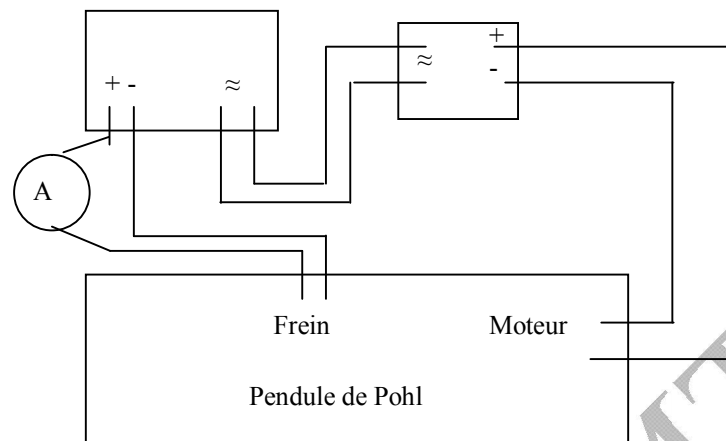
#### 3.2 Montage et mode opératoire

Réaliser le montage conformément à la figure ci-dessous :



Le moteur servant de source de vibrations forcées au pendule de torsion est alimenté à partir de la source variable de l'alimentation universelle puis redressée par un pont diode. Les bornes de la source continue de l'alimentation universelle sont directement reliées au système de frein à courant de Foucault. On place un ampèremètre dans le circuit qui alimente le frein

afin de mesurer l'intensité du courant  $I_F$ . Cette intensité indique le degré de d'amortissement.  $I_F$  ne doit en aucun cas dépasser 1A. On représente sur la figure ci-dessous le schéma du circuit électrique.



### 3.3 Etude du régime libre amorti

- Le moteur d'excitation étant à l'arrêt et le frein à courant de Foucault non alimenté ( $I_F = 0$  A).
- Ecarter le pendule jusqu'à ce qu'il vienne en butée et lâcher sans vitesse initiale.
- Mesurer la période  $T$  des oscillations. (on recommande de mesurer la durée 5 à 10T de 5 à 10 oscillations)
- Relever l'amplitude  $A$  des oscillations toutes les 10 périodes.
- Dresser un tableau de mesure et tracer la courbe  $A = f(t)$ .
- Dédire la constante d'atténuation  $\alpha$  et le décrément logarithmique  $\delta$ .
- Refaire la même manipulation en actionnant le frein à courant de Foucault :  $I_F = 0,25$  A ; 0,40 A ; 0,55 A et 0,90 A. On recommande d'augmenter la fréquence de relevé de la valeur de l'amplitude afin d'avoir suffisamment de points expérimentaux.
- Conclusion

### 3.4 Etude du régime forcé. Visualisation de la résonance

- Le pendule de torsion étant au repos et le frein à courant de Foucault étant non alimenté ( $I_F = 0$  A), allumer le moteur en l'alimentant avec une tension de 15 V.
- Avec le bouton « Grob », diminuer graduellement la vitesse du moteur jusqu'à l'apparition de la résonance (mouvement oscillatoire à amplitude maximale). Et à l'aide du bouton « Fein » faire des réglages fins.
- Relever alors la période  $T_a$  des oscillations (vitesse du moteur) et ainsi que l'amplitude maximale  $\theta_a$ .
- Refaire la même manipulation en régime amorti, c'est à dire à  $I_F = 0,25$  A, 0,40 A, 0,55 A et 0,90 A.
- Dresser un tableau de mesure et comparer  $T_a$  et  $T$  (période des oscillations en régime libre).
- Conclure.



**Travaux pratiques de vibrations et ondes**  
**TP N°3 : Pendule réversible**

**1. Principe et objectifs**

En mesurant les périodes d'oscillations d'un pendule réversible (ie : possédant deux axes de rotation opposés), la valeur de l'accélération de la pesanteur  $g$  peut être déterminée sans connaître ni la masse, ni le moment d'inertie du pendule.

**2. Aperçu théorique**

La durée d'oscillation  $T$  d'un pendule physique ou pendule pesant (Fig.1), oscillant autour de l'axe A avec une faible amplitude, est donnée par :

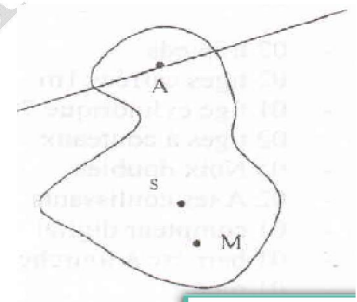
$$T_A = 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{m \cdot s \cdot g}} \quad (1)$$

$J_A$  : Moment d'inertie rapporté à l'axe de rotation A

$m$  : Masse du pendule

$s$  : Distance du point A au centre de gravité S

$g$  : Accélération de la pesanteur



**Fig.1**

On définit la longueur réduite du pendule par

$$l_r = \frac{J_A}{m \cdot s} ; \quad (1) \text{ devient } T_A = 2\pi \sqrt{\frac{l_r}{g}} \quad (2)$$

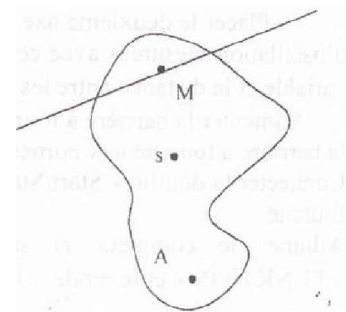
et correspond ainsi formellement à la relation valable pour un pendule mathématique (ou pendule simple) de longueur  $l_r$ . Un pendule physique de longueur réduite  $l_r$  a donc la même durée d'oscillation qu'un pendule mathématique de longueur  $l=l_r$ .

Le point M, situé dans le prolongement de  $\overline{AS}$  à une distance  $l_r$  de l'axe de rotation A est appelé centre d'oscillation.

Montrons que si l'on inverse le pendule de façon à faire passer l'axe de rotation par M (Fig.2), la période des oscillations reste inchangée et que A devient centre d'oscillation (ie :  $A=A'$ ).

La période du pendule physique par rapport à

$$\text{l'axe de rotation M s'écrit : } T_M = 2\pi \sqrt{\frac{J_M}{m \cdot S_M \cdot g}}$$



**Fig.2**

$J_M$  : Moment d'inertie rapporté à l'axe de rotation M

$S_M$  : Distance du point M au centre de gravité S

et la nouvelle longueur réduite est :

$$l'_r = \frac{J_M}{m S_M} = \frac{J_M}{m.(l_r - s)}, \quad (S_M = l_r - s)$$

En remplaçant dans l'expression des longueurs réduites  $J_A$  et  $J_M$  en fonction de  $J_S$ , (théorème de Steiner), on obtient :

$$l_r = \frac{J_S + m s^2}{m.s} = \frac{J_S}{m.s} + s ; \quad (3)$$

et

$$l'_r = \frac{J_S + m.(l_r - s)^2}{m.(l_r - s)} = \frac{J_S}{m.(l_r - s)} + (l_r - s) \quad (4)$$

En remplaçant dans (4)  $l_r$  par son expression (3) :

$$l'_r = \frac{J_S}{m.\left(\frac{J_S}{m.s} + s - s\right)} + \left(\frac{J_S}{m.s} + s - s\right) = s + \frac{J_S}{m.s} = l_r$$

L'égalité des longueurs réduites entraîne l'égalité des périodes d'oscillation autour des axes A et M, périodes aussi égales à celle d'un pendule simple de longueur  $l_r$ .

Cette propriété est exploitée dans ce TP : En faisant varier la position d'un axe de rotation et en mesurant les périodes d'oscillation du pendule relatives aux 2 axes, on déterminera le centre d'oscillation et de ce fait la longueur réduite  $l_r$  du pendule.

### 3. Manipulation

#### 3.1 Matériel utilisé

- 02 trépieds
- 02 tiges carrées 1m
- 01 tige cylindrique 75cm
- 02 tiges à couteaux
- 05 Noix doubles
- 02 Axes coulissants.
- 01 compteur digital
- 01 barrière à fourche
- 01 mètre
- 03 fils électriques

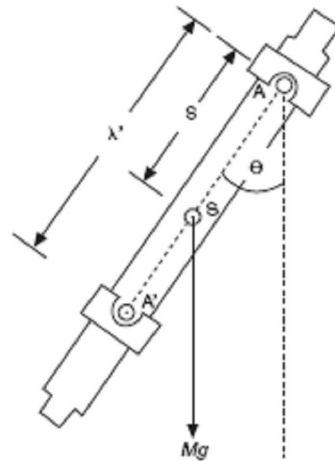


Fig.3

#### 3.2 Montage expérimental

Le montage expérimental est illustré dans la Fig.3. S'assurer que les vis de serrage des noix sont bloqués, et que l'ensemble trépieds + tiges ne bouge pas lorsque le pendule oscille. Vérifier que les couteaux supportant le pendule sont horizontaux et que le plan d'oscillation est parfaitement vertical.

Marquer au crayon un axe coulissant (1) et le fixer à 10 cm d'une extrémité de la tige. Les périodes d'oscillations mesurées avec cet axe de rotation seront notées  $T_1$ .

**Cet axe sera gardé fixe tout au long du TP.**

Placer le deuxième axe coulissant à ~ 8cm de l'autre extrémité de la tige. Les périodes d'oscillation mesurées avec cet axe de rotation seront notées  $T_2$ . La position de cet axe sera variable et la distance entre les deux axes sera notée  $\lambda$ .

Alimenter la barrière à fourche en connectant respectivement les bornes « 5V » et «  $\perp$  » de la barrière à fourche aux bornes rouge et bleue « 5V /1A » du compteur numérique.

Connecter la douille « Start/Stop » du compteur numérique à la borne « Out » de la barrière à fourche.

Allumer le compteur et sélectionner le mode « TIMER » en utilisant le bouton « FUNKTION » et le mode « [ ] » en utilisant le bouton « TRIGGER ».

Vérifier le bon fonctionnement de l'ensemble en coupant deux fois le faisceau lumineux.

Placer la fourche verticalement entre les trépieds de façon que le pendule interrompe le faisceau dans la position d'équilibre, tout en s'assurant que la barrière ne gêne pas les oscillations du pendule. (NB : On mesurera ainsi une demi période)

### 3.3 Mode opératoire

#### Détermination approximative de $l_r$ :

En premier lieu, mesurer la période initiale  $T_1$  du pendule (Axe de rotation : axe (1), axe coulissant (2) à 8 cm de l'extrémité).

Mesurer les périodes  $T_2(\lambda)$  du pendules avec comme axe de rotation l'axe (2). On fera varier la distance  $\lambda$  entre les axes de 34 à 60 cm par pas de 2 cm, en faisant coulisser à chaque fois l'axe (2).

Remplir le Tableau 1, et tracer le graphe  $T_2(\lambda)$ . Déterminer graphiquement les valeurs  $\lambda_a$  et  $\lambda_s$  définies par  $T_1 = T_2(\lambda)$ .  $\lambda_s$  correspondant au cas symétrique (les axes sont équidistants du centre de gravité).  $\lambda_a$  correspond au cas asymétrique et définit donc la longueur réduite du pendule (Nb :  $\lambda_s > \lambda_a$ )

Cependant, dans ce qui précède, on a négligé l'influence des masses des axes coulissants qui modifient légèrement le moment d'inertie du pendule  $J_s$ . On peut s'en rendre compte en mesurant  $T_1(\lambda_a)$ .

#### Détermination précise de $l_r$ :

En gardant toujours l'axe (1) fixe, mesurer alternativement  $T_1(\lambda)$  et  $T_2(\lambda)$  en faisant varier  $\lambda$  de  $\lambda_a - 3\text{cm}$  à  $\lambda_a + 3\text{cm}$ . Remplir le tableau 2. Tracer les courbes correspondantes et déduire graphiquement  $l_r$ , définie par le point d'intersection des deux courbes.

Déduire de la relation (2) la valeur de l'accélération de la pesanteur  $g$ .

En estimant les incertitudes sur  $T$  et  $\lambda_a$ , évaluer l'incertitude sur  $g$ .

Conclure.

**Remarque :** Les périodes doivent être mesurées pour de faible oscillations, sinon on doit prendre en considération la variation de  $T$  en fonction de  $\theta$  :

$$T = 2\pi \left\{ \frac{l}{g} \left( 1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\theta}{2} + \frac{25}{256} \sin^6 \frac{\theta}{2} + \dots \right) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Le tableau suivant donne l'erreur que l'on commet (en fonction de  $\theta$ ) lorsque l'on utilise la formule d'approximation (2) :

Amplitude $\theta$ (°) :	0	2	5	10	20	30
Erreur sur $T$ (%) :	0	0.0076	0.048	0.191	0.764	1.74

## TP N°4 Oscillations libres de pendules couplés

### 1. Principe

Mise en évidence des caractéristiques essentielles d'un système de deux pendules pesants identiques couplés par un ressort. Visualisation des modes propres d'oscillations et du phénomène de battements.

### 2. Aperçu théorique

Considérons deux pendules qui sont couplés par un ressort horizontal de constante de rappel  $k$  à une distance  $a$  de l'axe de rotation. Chaque pendule est constitué d'une masse  $m$  qui peut osciller librement sous l'effet de son poids  $-m\vec{g}$  autour d'un axe. La distance entre le centre de masse du pendule et l'axe de rotation est dénoté par  $l$ . Pour déterminer les équations du mouvement pour les deux pendules, on applique le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}$$

où  $\vec{L}$  est le moment cinétique, et  $\vec{M}$  le moment de force.

Le théorème du moment cinétique projeté sur l'axe de rotation donne en utilisant l'approximation  $\sin\phi = \phi$  et  $\cos\phi = 1$  :

$$I\ddot{\phi}_1 = -mgl\phi_1 - ka^2(\phi_1 - \phi_2)$$

$$I\ddot{\phi}_2 = -mgl\phi_2 + ka^2(\phi_1 - \phi_2)$$

$I = ml^2$  étant le moment d'inertie d'un pendule par rapport à l'axe de rotation. Le moment de force dû au couplage a des signes opposés pour le pendule 1 et pour le pendule 2. Ces équations forment un système d'équations dites couplées, puisque  $\phi_1$  et  $\phi_2$  apparaissent dans chacun de ces deux équations. Pour découpler ces équations on les ajoute et on les soustrait pour obtenir :

$$I(\ddot{\phi}_1 + \ddot{\phi}_2) + mgl(\phi_1 + \phi_2) = 0$$

$$I(\ddot{\phi}_1 - \ddot{\phi}_2) + (mgl + 2ka^2)(\phi_1 - \phi_2) = 0$$

Par le changement de variable  $\alpha = \phi_1 + \phi_2$  et  $\beta = \phi_1 - \phi_2$ , on arrive à deux équations qui ne mélangent plus  $\alpha$  et  $\beta$ ,

$$I\ddot{\alpha} + mgl\alpha = 0$$

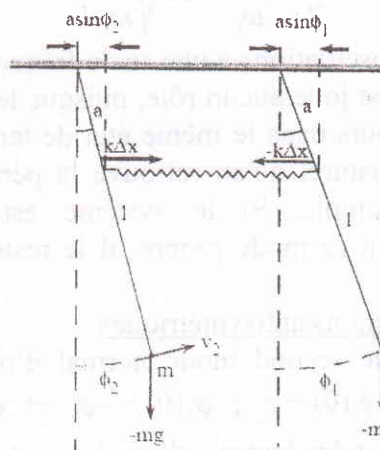
$$I\ddot{\beta} + (mgl + 2ka^2)\beta = 0$$

et dont les solutions sont données par :

$$\alpha(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) \quad \text{avec} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$$

$$\beta(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2) \quad \text{avec} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{mgl + 2ka^2}{I}}$$

$A_1, A_2, \delta_1$  et  $\delta_2$  sont des constantes déterminées par les conditions initiales.





La solution de l'équation du mouvement pour le pendule 1 et 2 est donc de la forme :

$$\phi_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2)$$

$$\phi_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2)$$

Sous certaines conditions initiales, on distingue plusieurs types d'oscillations :

#### Oscillations symétriques :

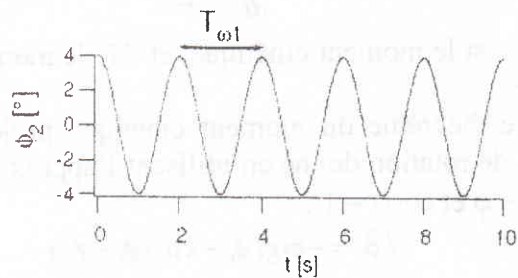
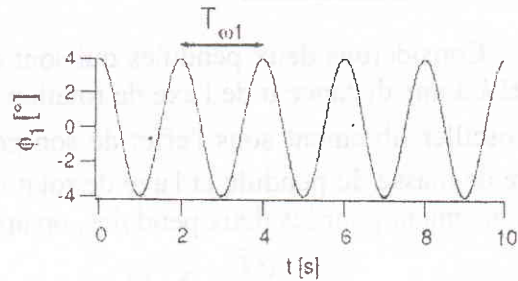
C'est le premier mode normal d'oscillation du système. Il correspond aux conditions initiales :  $\phi_1(0) = \phi_2(0) = \phi_0$  et  $\dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = 0$ . Si elles sont introduites dans les équations précédentes, elles donnent :  $A_1 = \phi_0$  ;  $A_2 = 0$  ;  $\delta_1 = 0$  et  $\delta_2$  indéterminée. Et présentent comme solutions aux mouvements des pendules :

$$\phi_1(t) = \phi_2(t) = \phi_0 \cos \omega_1 t$$

Pour réaliser ce mode de vibration, il suffit que les deux masses soient écartées d'un même angle  $\phi_0$  et lâchées simultanément sans vitesses initiales. Les deux oscillateurs vibrent alors sinusoïdalement, en phase, avec la même amplitude et à la même pulsation  $\omega_1$  correspondant à une période :

$$T_{\omega_1} = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

Il s'agit d'oscillations à une seule fréquence. Le couplage ne joue aucun rôle, puisque le ressort reste toujours dans le même état de tension. Il est alors naturel qu'on retrouve la période du pendule simple. Si le système est excité initialement se mode propre, il le reste par la suite.



#### Oscillations antisymétriques :

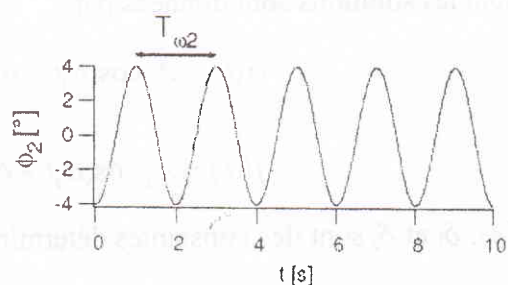
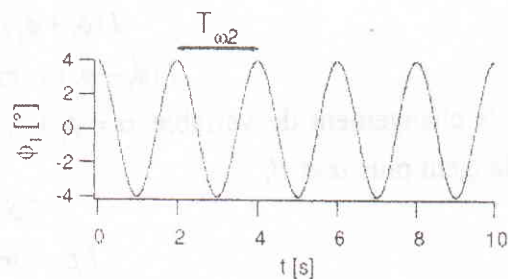
C'est le second mode normal d'oscillation du système. Il correspond aux conditions initiales :  $\phi_1(0) = \phi_0$  ;  $\phi_2(0) = -\phi_0$  et  $\dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = 0$ . Si elles sont introduites dans les équations précédentes, elles donnent :  $A_1 = 0$  ;  $A_2 = \phi_0$  ;  $\delta_1$  indéterminée et  $\delta_2 = 0$ . Et présentent comme solutions aux mouvements des pendules :

$$\phi_1(t) = -\phi_2(t) = \phi_0 \cos \omega_2 t$$

Pour réaliser ce mode de vibration, il suffit que les deux masses soient écartées d'un même angle  $\phi_0$  en sens opposés et lâchées simultanément sans vitesses initiales. Les deux oscillateurs vibrent alors sinusoïdalement, en opposition de phase, avec la même amplitude et à la même pulsation  $\omega_2$  correspondant à une période :

$$T_{\omega_2} = \frac{2\pi}{\omega_2} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl + 2ka^2}}$$

Il s'agit de nouveau d'une oscillation à une seule fréquence, mais le couplage entre les deux pendules résulte en une diminution de la période. Si le système est excité initialement à se mode propre, il le reste par la suite.



### Phénomène de battement :

Pour des conditions initiales quelconques, le mouvement est une combinaison linéaire des modes et pulsations propres. Ainsi, aux conditions initiales  $\phi_1(0) = \phi_0$  ;  $\phi_2(0) = 0$  et  $\dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = 0$ , correspond le mouvement dit des « pendules sympathiques ». Si elles sont introduites dans les équations du mouvement des

pendules, elles donnent :  $A_1 = A_2 = \frac{\phi_0}{2}$  et

$\delta_1 = \delta_2 = 0$ . Et présentent comme solutions :

$$\phi_1(t) = \phi_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right)$$

$$\phi_2(t) = \phi_0 \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right)$$

On observe que l'amplitude d'un des pendules, variant à la fréquence  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ , est modulée par la faible fréquence  $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$ . Le

déphasage de  $\frac{\pi}{2}$  entre le sinus et le cosinus traduit

les battements entre les deux pendules : lorsque un pendule a son amplitude maximale, l'autre est arrêté. L'énergie mécanique passe progressivement à chaque oscillation d'un pendule à l'autre par l'intermédiaire du ressort de couplage, alors que, dans un mode normal, chaque oscillateur conserve son énergie. La période d'oscillation  $\tau$  vaut :

$$\tau = \frac{2\pi}{\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}} = \frac{2T_{\omega_1} T_{\omega_2}}{T_{\omega_1} + T_{\omega_2}}$$

et la période de battement  $T_b$  (qui correspond au temps compris entre trois arrêts consécutifs du même pendule)

$$T_b = \frac{2\pi}{\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}} = \frac{2T_{\omega_1} T_{\omega_2}}{T_{\omega_1} - T_{\omega_2}}$$

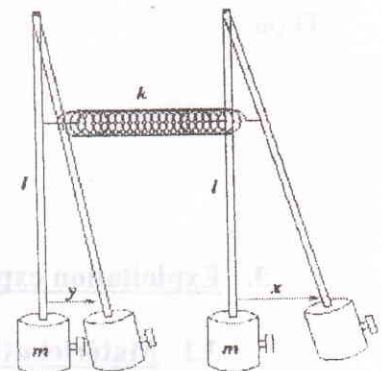
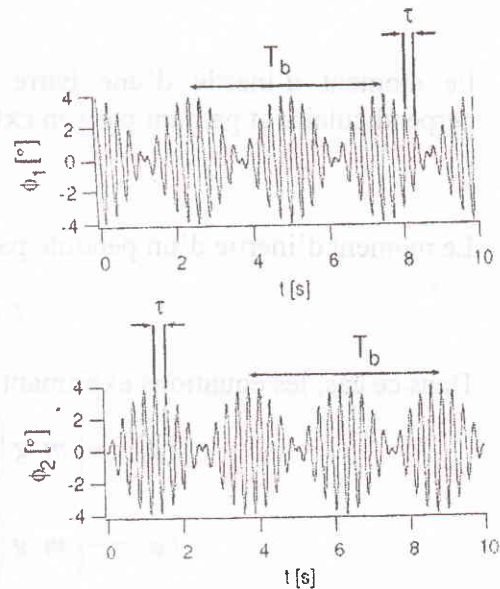
Le couplage des oscillateurs est estimé par une grandeur  $\chi$  appelé coefficient de couplage des oscillateurs. Il est compris entre 0 (oscillateurs indépendants) et 1 (oscillateurs rigidement liés) :

$$\chi = \frac{T_{\omega_1} - T_{\omega_2}}{T_{\omega_1}^2 + T_{\omega_2}^2}$$

### Prise en compte de l'état pendule physique :

L'expression donnée pour  $\phi_1$  et  $\phi_2$  dans les équations précédentes n'est valable que pour un pendule formé par une masse ponctuelle (pendule mathématique). Dans le cas où la masse a une certaine extension spatiale (pendule physique), il faut tenir compte de sa géométrie. Dans notre cas, le pendule est formé par un cylindre creux attaché à une tige métallique,

dont la masse n'est plus négligeable. Donc le centre de masse ne se trouve pas au centre du cylindre creux ! En plus, il faut tenir compte de la contribution de la tige au moment d'inertie





total du pendule. Appliquer le théorème de Steiner séparément au cylindre creux et à la tige métallique. Sommer les deux moments d'inertie partiels pour obtenir le moment d'inertie total du pendule. Pour un cylindre de masse  $m_c$  de rayon  $r$  et de hauteur  $h$ , le moment d'inertie par rapport à un axe passant par le centre de masse et perpendiculaire à son axe de révolution est :

$$I_c = \frac{m_c}{12}(3r^2 + h^2)$$

Le moment d'inertie d'une barre de masse  $m_b$  de longueur  $l_b$  par rapport à un axe perpendiculaire et passant par son extrémité :

$$I_b = \frac{m_b l_b^2}{3}$$

Le moment d'inertie d'un pendule par rapport à l'axe de rotation devient alors :

$$I = I_b + I_c + m_c \left( l - \frac{h}{2} \right)^2$$

Dans ce cas, les équations exprimant le mouvement des pendules doivent être modifiées :

$$I \ddot{\phi}_1 = - \left( m_c g \left( l - \frac{h}{2} \right) + m_b g \frac{l_b}{2} \right) \phi_1 - k a^2 (\phi_1 - \phi_2)$$

$$I \ddot{\phi}_2 = - \left( m_c g \left( l - \frac{h}{2} \right) + m_b g \frac{l_b}{2} \right) \phi_2 + k a^2 (\phi_1 - \phi_2)$$

Et l'expression des périodes propres  $T_{\omega_1}$  et  $T_{\omega_2}$  deviennent :

$$T_{\omega_1} = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{m_c g \left( l - \frac{h}{2} \right) + m_b g \frac{l_b}{2}}}$$

$$T_{\omega_2} = \frac{2\pi}{\omega_2} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{m_c g \left( l - \frac{h}{2} \right) + m_b g \frac{l_b}{2} + 2k a^2}}$$

Détermination de la constante de rappel  $k$  du ressort par la méthode statique :

La méthode consiste à maintenir le deuxième pendule dans la position  $\phi_2$ , pendant qu'on mesure la déviation  $\phi_1$  du pendule 1. Dans le cas statique l'accélération angulaire  $\ddot{\phi}_1 = \ddot{\phi}_2 = 0$ . Des équations du mouvement des pendules, on tire alors

$$- \left( m_c g \left( l - \frac{h}{2} \right) + m_b g \frac{l_b}{2} \right) \phi_1 - k a^2 (\phi_1 - \phi_2) = 0$$

D'où

$$k = \frac{m_c g \left( l - \frac{h}{2} \right) + m_b g \frac{l_b}{2}}{a^2} \frac{\phi_1}{\phi_2 - \phi_1}$$

### 3. Exploitation expérimentale

#### 3.1 Matériel utilisé

- 01 système de pendules couplés fixé sur un support stable. Ce système est composé de deux pendules pesants montés sur un même axe par l'intermédiaire de roulement à bille et d'un ressort pouvant relier les deux pendules à plusieurs niveaux. Chaque pendule est

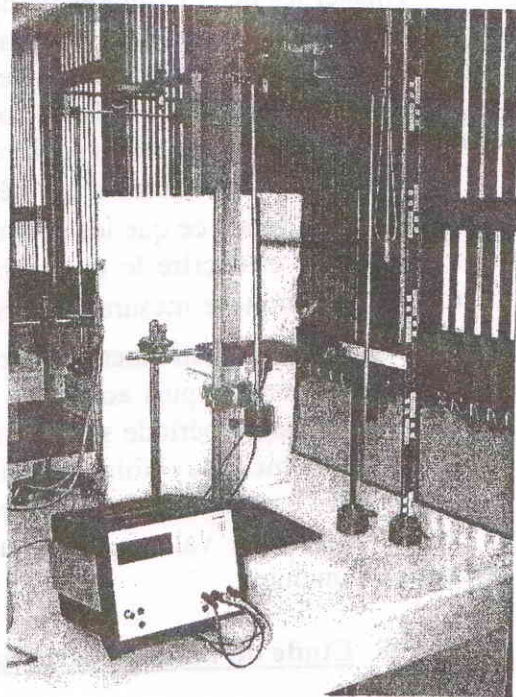
formé d'une tige (longueur  $l_b = 60$  cm ; masse  $m_b = 137$  g) et d'une masse cylindrique (diamètre extérieure  $D = 2r = 5$  cm ; hauteur  $h = 4.5$  cm ; masse  $m_c = 249$  g). On peut varier la longueur des pendules en faisant varier la position  $l$  de la base de la masse sur la tige.

- 01 barrière à fourche montée sur un trépied à l'aide d'une tige carré de 25 cm, d'une tige cylindrique de 25 cm et d'une noix double.
- 02 unités de mesure d'écartement des pendules chacune composée d'une règle graduée montée sur une embase à l'aide d'une tige carré de 25 cm et d'une noix double.
- 01 mètre
- 01 compteur digital
- 03 fils électriques

### 3.2 Montage et mode opératoire

Réaliser le montage conformément à la figure ci-dessous :

La barrière optique à fourche permet de commander électroniquement des compteurs, des horloges et d'autres appareils électroniques. Dans notre cas, elle est raccordée à un compteur numérique à 4 décades réglé à la fonction chronomètre. La diode lumineuse s'allume lorsque la diode photoélectrique est obscurcie. Le récepteur est placé dans un petit orifice pour le protéger des lumières parasites. En un endroit quelconque entre la source de lumière et le récepteur, il suffit d'un corps d'un diamètre efficace de moins de 1 mm pour obscurcir le récepteur et à proximité immédiate de l'orifice du récepteur un diamètre de 0,3 mm suffit. La sensibilité de réponse optimale est réglée automatiquement lors de l'enclenchement de l'appareil et chaque fois que l'on actionne la touche « SET ».



Le mode opératoire de branchement de la barrière optique au compteur numérique à 4 décades réglé à la fonction chronomètre se fait comme suit :

- Visser la tige de 25cm à la barrière à fourche de telle façon que cette barrière montée sur une embase, le faisceau lumineux est verticale.
- Alimenter la barrière à fourche en connectant respectivement les bornes « 5V » et «  $\perp$  » de la barrière à fourche aux bornes rouge et bleu « 5V /1A » du compteur numérique.
- Court-circuiter les douilles supérieures des bornes « Start/Stop » et « Stop » du compteur numérique à 4 décades.
- Connecter l'une de ses douilles court-circuitées à la borne « Out » de la barrière à fourche.
- Allumer le compteur et sélectionner le mode « TIMER » en utilisant le bouton « FUNKTION » et le mode « [ ] » en utilisant le bouton « TRIGGER ».
- Le compteur est apte à prendre des mesures en actionnant le bouton « START ».
- Vérifier le bon fonctionnement de l'ensemble en coupant deux fois le faisceau lumineux.
- La remise à zéro est obtenue en actionnant le bouton « RESET » du compteur.



- Pour mesurer une période actionner une première fois le bouton « START » pour mesurer une première demi période puis actionner une deuxième fois le même bouton « START » et la durée de la deuxième période s'ajoute à la première. Attention, mesurer l'autre demi période mais pas la même deux fois de suite. Ceci corrigera l'éventuelle non équidistance de placement de la barrière à fourche.

Dans toutes les mesures, on veillera à ce que les amplitudes soient suffisamment faibles pour pouvoir utiliser l'approximation  $\sin\phi = \tan\phi = \phi$  ( $\phi \leq 5^\circ$ ).

### 3.3 Détermination de la constante de rappel $k$ du ressort par la méthode statique

Bien ajuster le zéro des échelles aux positions d'équilibre des pendules. Ecarter le pendule à gauche d'un angle  $\phi_1$  et lire l'écartement  $\phi_2$  du pendule à droite. Dresser un tableau de mesures. Tracer la courbe  $\phi_2 - \phi_1 = f(\phi_1)$  et déduire la constante de rappel  $k$  du ressort en utilisant les informations rapportées dans l'aperçu théorique.

### 3.4 Etude du mode symétrique

Ajuster les deux cylindres de façon à ce que les deux pendules aient la même période, fixer la distance de la base de la masse cylindrique à l'axe de rotation à  $l = 60$  cm. Fixer le ressort de couplage à la même distance de l'axe de rotation sur les deux pendules ( $a = 30$  cm). La distance horizontale entre les deux pendules doit être suffisante pour que le ressort ait toujours une certaine tension, la position au repos des pendules n'est pas la verticale.

Ecarter les 2 pendules d'un même angle  $\phi_0$  et les lâchés simultanément sans vitesses initiales. On veillera à ce que les amplitudes soient suffisamment faibles ( $\phi_0 \leq 5^\circ$ ).

Observer et décrire le mouvement des 2 pendules. A l'aide de la barrière optique à fourche et du compteur mesurer la période du mode symétrique  $T_{\omega_1}$  d'un des pendules. Pour mesurer une période actionner une première fois le bouton « START » pour mesurer une première demi période puis actionner une deuxième fois le même bouton « START » et la durée de la deuxième période s'ajoute à la première. Attention, mesurer l'autre demi période mais pas la même deux fois de suite. Ceci corrigera l'éventuelle non équidistance de placement de la barrière à fourche. Etablir plusieurs mesures puis faire une moyenne.

Comparer aux valeurs théoriques (cas du pendule mathématique et cas du pendule physique). Conclure.

### 3.5 Etude du mode antisymétrique

Ecarter les 2 pendules d'un même angle  $\phi_0$  en sens opposées et les lâchés simultanément sans vitesses initiales. On veillera à ce que les amplitudes soient suffisamment faibles ( $\phi_0 \leq 5^\circ$ ).

Observer et décrire le mouvement des 2 pendules. A l'aide de la barrière optique à fourche et du compteur mesurer la période du mode antisymétrique  $T_{\omega_2}$  d'un des pendules. Etablir plusieurs mesures puis faire une moyenne.

Le mode antisymétrique est plus délicat à lancer. Observez bien les pendules pendant quelques secondes avant de lancer l'acquisition : les pendules doivent osciller constamment en opposition de phase.

Comparer aux valeurs théoriques (cas du pendule mathématique et cas du pendule physique). Conclure.

### 3.6 Visualisation du phénomène de battement

Ecarter le pendule de droite d'un angle  $\phi_0$  suffisamment faibles ( $\phi_0 \leq 5^\circ$ ) et lâcher le sans vitesse initiale. Le pendule de gauche est initialement au repos à la position d'équilibre.

Observer et décrire le mouvement des 2 pendules. Tracer les courbes  $\phi_1(t)$  et  $\phi_2(t)$  en faisant apparaître les phénomènes de battement et de modulation.

A l'aide de la barrière optique à fourche et du compteur mesurer la période  $\tau$  des oscillations. Et à l'aide du compteur sans barrière optique, mesurer la période de battement  $T_b$ .

Comparer aux valeurs théoriques (cas du pendule mathématique et cas du pendule physique). Conclure.

### 3.7 Modification du couplage

Refaire les expériences précédentes pour :

$l = 60$  cm et  $a = 40$  cm

$l = 60$  cm et  $a = 50$  cm

$l = 40$  cm et  $a = 30$  cm

$l = 20$  cm et  $a = 10$  cm

Observer et faire des mesures. Lier les conclusions à la valeur du coefficient de couplage  $\chi$ .



**Travaux pratiques de vibrations et ondes**  
**TP N°5 : Résonance de tension d'un circuit RLC série**

**Travaux pratiques de vibrations et ondes**  
**TP N°5 : Résonance de tension d'un circuit RLC série**

**1. Principe**

La résonance est un phénomène qui se produit lorsqu'un système oscillant est excité en régime permanent par un signal périodique dont la fréquence est égale à une fréquence propre du système. Dans ce cas là, l'énergie absorbée par le système est maximale. Les fréquences peuvent être en nombre fini (système à nombre fini de degrés de liberté) ou en nombre infini (suite dénombrable en générale) dans le cas des systèmes avec propagation. L'étude de la résonance d'un système à un degré de liberté peut être effectué en considérant un circuit électrique RLC série. C'est l'objet de ce TP.

**2. Objectifs**

- Etude du courant et de la tension de circuits oscillants RLC série en fonction de la fréquence de l'excitation
- Détermination de la fréquence de résonance, du coefficient de qualité et de la bande passante du circuit.

**3. Aperçu théorique**

On monte en série dans un circuit électrique une résistance  $R$ , une bobine d'inductance  $L$  et un condensateur de capacité  $C$  (circuit RLC série de la figure 1). Ce circuit est alimenté par une source de tension alternative :

$$u = U\sqrt{2} \cos \omega t$$

En utilisant la règle des mailles  $u = u_R + u_L + u_C$ , on obtient l'équation différentielle suivante où  $i$  est l'intensité du courant et  $q$  la charge du condensateur :

$$u = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C}$$

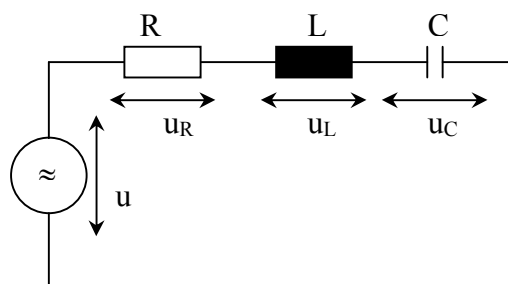


Figure 1 : Circuit RLC série.

Sachant que  $i = \frac{dq}{dt}$ , la résolution suivant  $i$  de cette équation différentielle donne :

$$i = I\sqrt{2} \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\text{avec } I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \text{ et } \tan \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Les variations du courant efficace  $I$  et du déphasage entre le courant et la tension sont rapportés sur les courbes de la figure 2. On peut remarquer que la courbe  $I(\omega)$  n'est pas symétrique par rapport à l'axe vertical passant par  $\omega_0$ .

Pour  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  appelée pulsation de résonance se produit le phénomène de résonance. On observe les caractéristiques suivantes :

- la courbe  $I(\omega)$  présente un maximum d'amplitude égal à  $U/R$
- le déphasage  $\varphi$  est nul
- les termes  $L\omega_0$  et  $1/C\omega_0$  sont égaux et sont souvent grands devant  $R$
- l'impédance du circuit se réduit à la résistance :  $Z = R$
- l'intensité peut être grande si la résistance du circuit est petite car  $I = U/R$
- les tensions efficaces  $U_L$  aux bornes de la bobine et  $U_C$  aux bornes du condensateur peuvent dépasser de beaucoup la tension  $U$  aux bornes du générateur

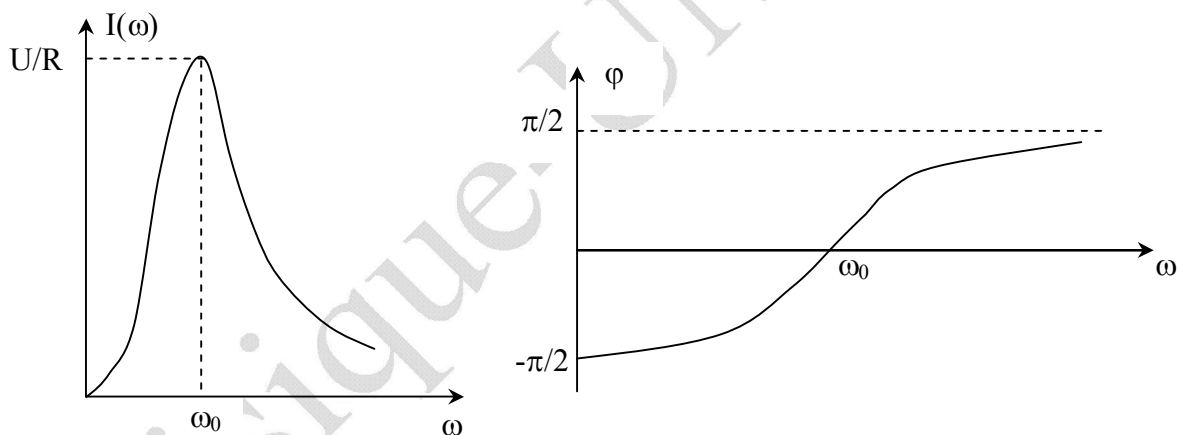


Figure 2 : Intensité  $I$  du courant et déphasage  $\varphi$  en fonction de la fréquence

$$U_L = L\omega_0 I \text{ et } U_C = \frac{I}{C\omega_0}$$

$$\text{d'où } U_L = U_C = QU \text{ avec } Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{C\omega_0 R}$$

$Q$  représente le coefficient de surtension à la résonance et est appelé facteur de qualité. Il peut atteindre des valeurs élevées et entraîner des tensions dangereuses (Il y a danger d'électrocution pour l'imprudent et de claquage des isolants. La résonance est à éviter lorsqu'elle expose à de tels risques).

Le phénomène de résonance est un phénomène général observé notamment en mécanique et en acoustique. Il intervient chaque fois que la fréquence de l'excitateur, fournissant l'énergie, coïncide avec celle de l'oscillateur ou résonateur la recevant. Ses conséquences néfastes, allant de la rupture d'une pièce dans un ensemble mécanique au défaut de fidélité

d'un haut parleur, peuvent être évitées par l'amortissement des oscillations (rôle joué par la résistance  $R$  du circuit RLC).

Afin de chiffrer l'acuité de la résonance (lorsque la courbe de résonance est aiguë) on définit une bande passante de largeur  $B = \omega_2 - \omega_1$  telle que  $\omega_1$  et  $\omega_2$  se situent de part et d'autre de  $\omega_0$  et correspondent à :

$$I(\omega_1) = I(\omega_2) = \frac{I(\omega_0)}{\sqrt{2}}$$

On appelle fréquences de coupure les fréquences  $f_1$  et  $f_2$  correspondants aux pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  :

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} \quad \text{et} \quad f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}$$

#### **4. Manipulation**

##### **4.1. Matériel utilisé**

- 1 bobine de 20 000 spires ayant pour inductance  $L = 8,7$  mH et résistance  $r_L = 20$  k $\Omega$
- 1 Condensateur variable par décades.
- 1 Résistance variable par décades.
- 1 Générateur de fonctions.
- 1 Compteur numérique à 4 décades.
- 1 Multimètre digital.
- 1 Oscilloscope.

##### **4.2. Exercice préliminaire**

En utilisant le circuit de la figure 1 avec  $R = 9$  k $\Omega$ ,  $L = 8,7$  mH et  $C = 0,5$  nF déterminer en se référant à la partie théorique :

- La fréquence de résonance  $f_0$ .
- Le coefficient de qualité  $Q$ .
- Les fréquences de coupures  $f_1$  et  $f_2$ .
- La bande passante  $B$ .
- Vérifier numériquement la relation  $Q = 2\pi f_0/B$

##### **4.3. Mode opératoire préliminaire**

Régler le générateur de fonction de la manière suivante et on garde ce réglage durant toute la séance :

- Brancher le multimètre digital aux bornes de sortie du générateur. Placer ce multimètre en mode mesure de tension continue (DC Voltage).
- Mettre sous tension le générateur fonctionnant en régime sinusoïdal.
- Régler le bouton DC-offset du générateur tel que le multimètre indique  $\pm 0$  volt.
- A l'aide du multimètre mis en mode mesure de tension alternative, régler le générateur à 3V.

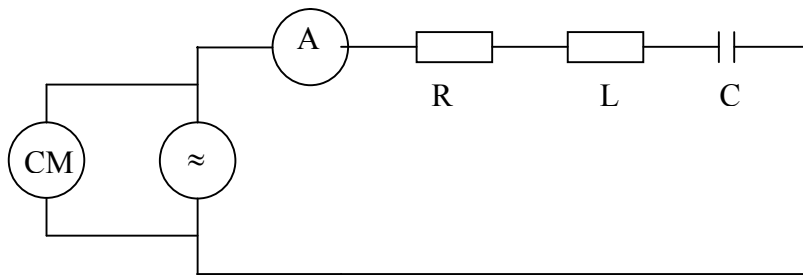
##### **4.4. Intensité du courant en fonction de la fréquence**

Réaliser le montage de la figure 3. Régler la résistance variable à  $R = 9$  k $\Omega$  et le condensateur variable par décade à  $C = 0,5$  nF.

En faisant varier de façon continue la fréquence  $f$  du générateur, observer la variation de l'intensité  $i$  du courant parcourant le circuit. Etablir une analyse de la valeur de  $i$  à la résonance. Déterminer la fréquence de résonance  $f_0$ .

Dresser un tableau de mesures en multipliant les points autour de la résonance et tracer la courbe  $i = f(f)$ . Déduire les fréquences de coupures  $f_1$  et  $f_2$  et la bande passante  $B$ . Comparer aux valeurs théoriques et conclure.

Que se passe-t-il si on varie  $R$ . Conclure.



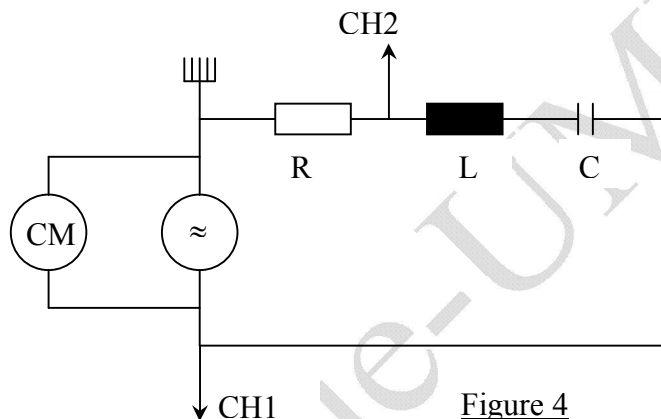
A : Ampèremètre  
CM : Compteur digital  
≈ : Générateur de fonction

Figure 3

#### 4.5. Déphasage de l'intensité du courant par rapport à la tension d'alimentation

Réaliser le montage de la figure 4 en gardant les mêmes réglages que précédemment.

En faisant varier de façon continue la fréquence  $f$  du générateur, observer la variation du déphasage  $\varphi$  entre la tension  $u$  aux bornes du circuit et l'intensité  $i$ . Etablir une conclusion surtout à la résonance.



CM : Compteur digital

Figure 4

#### 4.6. Tension aux bornes du circuit en fonction de la fréquence

Débrancher l'oscilloscope du montage précédent et brancher le multimètre fonctionnant en mode voltmètre aux bornes du générateur. En faisant varier de façon continue la fréquence  $f$  du générateur, observer la variation de la tension  $u$  aux bornes du circuit. Etablir une conclusion surtout à la résonance.

Que se passe-t-il si on varie  $R$ . Conclure.

#### 4.7. Facteur de qualité

Régler le générateur de fonction à la fréquence de résonance  $f_0$ . A l'aide du multimètre mesurer les tensions efficaces  $U$  aux bornes du générateur,  $U_L$  aux bornes de la bobine et  $U_C$  aux bornes du condensateur. Déduire le facteur de qualité et comparer à la valeur théorique (tenir de la résistance interne du générateur).





### 1. But du TP

Le but de la manipulation consiste à montrer qu'une vibration périodique non sinusoïdale représentée par une tension électrique se décompose en une somme de vibrations sinusoïdales.

### 2. Rappels théoriques

#### 2.1. Principe

Soit  $f(t)$  une fonction de période  $T$ . Si elle vérifie certaines conditions mathématiques (pratiquement toujours réalisées en physique), on peut la développer en série de fonctions trigonométriques appelée série de Fourier. On peut écrire  $f(t)$  sous la forme :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt ; a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt ; b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t dt$$

Si  $f(t)$  a une parité déterminée, le développement ci-dessus est particulièrement commode, car :  $b_n = 0$  si  $f(t)$  est paire et  $a_n = 0$  si  $f(t)$  est impaire. De plus, si  $f(t)$  est réelle, les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  sont réels.

#### 2.2. Décomposition d'un signal carré

$$f(t) = -U \text{ pour } -\frac{T}{2} \leq t < 0$$

$$f(t) = U \text{ pour } 0 \leq t \leq \frac{T}{2}$$

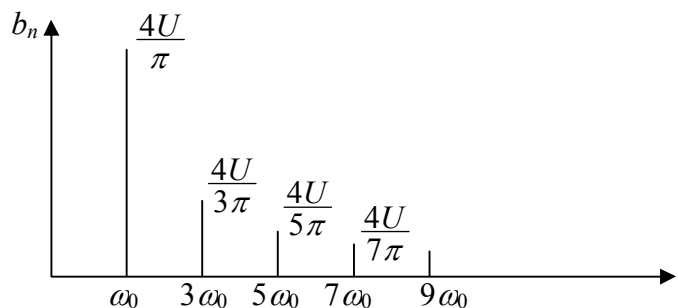
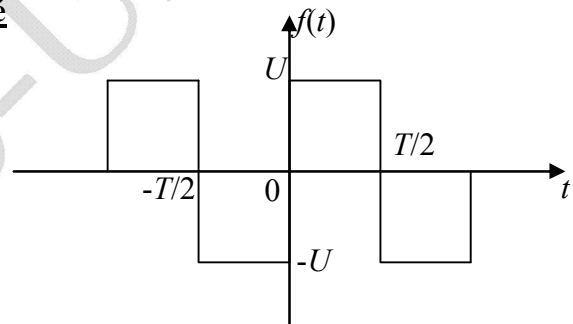
$$f(t) \text{ impaire} \Rightarrow a_n = a_0 = 0$$

$$\text{On trouve } b_{2p+1} = \frac{4U}{(2p+1)\pi}$$

On déduit la composition du signal :

$$f(t) = \frac{4U}{\pi} \sin \omega_0 t + \frac{4U}{3\pi} \sin 3\omega_0 t + \frac{4U}{5\pi} \sin 5\omega_0 t + \dots$$

Le spectre du signal est composé uniquement d'harmoniques impaires. Pour toutes ces harmoniques, la phase initiale et leur amplitudes décroissent en proportion inverse de leur ordre. Le spectre du signal a donc la forme ci-contre.



### 2.3. Décomposition d'un signal triangulaire

$$f(t) = \frac{4U}{T}t \text{ pour } -\frac{T}{4} \leq t < \frac{T}{4}$$

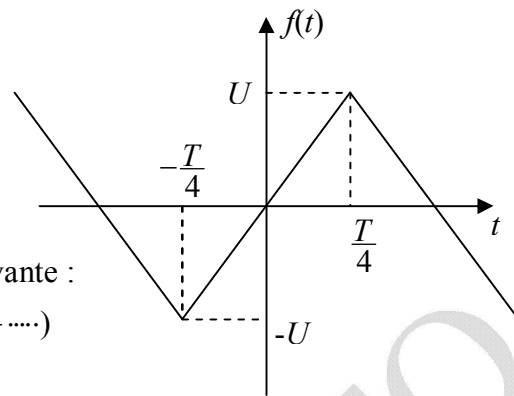
$$f(t) = \frac{4U}{T}\left(\frac{T}{2} - t\right) \text{ pour } \frac{T}{4} \leq t < \frac{3T}{4}$$

$$f(t) \text{ est impaire } \Rightarrow a_n = a_0 = 0$$

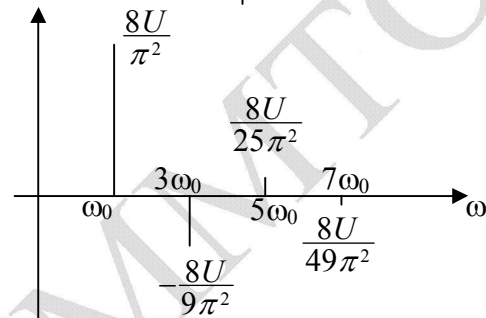
$$b_n = \frac{8U(-1)^p}{(2p+1)^2 \pi^2} \text{ avec } p = 0, 1, 2, \dots$$

La fonction se décompose de la façon suivante :

$$f(t) = \frac{8U}{\pi^2} \left( \sin \omega_0 t - \frac{1}{9} \sin 3 \omega_0 t + \frac{1}{25} \sin 5 \omega_0 t + \dots \right)$$

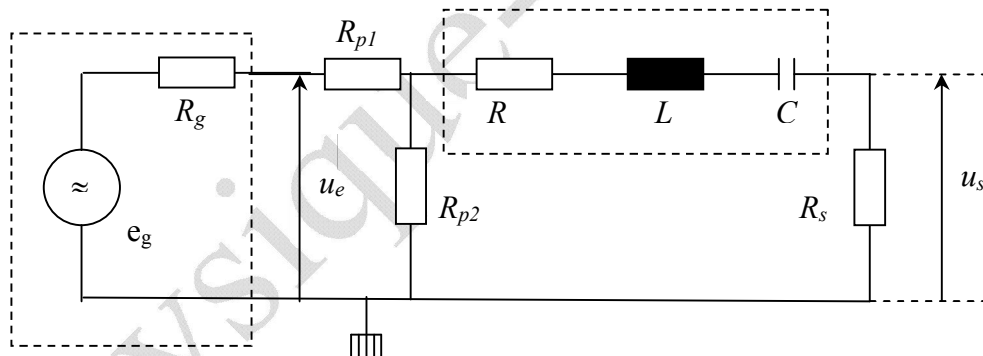


Le spectre du signal est composé d'harmoniques impaires dont les amplitudes décroissent en proportion inverse des carrés de leur ordre et dont les phases sont soit nulles soit égales à signe alterné. Ce spectre peut être représenté de la façon ci-contre



### 2.4. Analyse pratique des signaux

Pour procéder à l'analyse des signaux électriques on peut se servir d'un circuit RLC série accordé à la fréquence de l'harmonique qu'on veut étudier.



$$R_g \text{ symbolise résistance interne du générateur, } Z_{RLC} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

l'impédance du circuit RLC série,  $u_e$  la tension du signal d'entrée (tension à la sortie du générateur) et  $u_s$  la tension du signal à la sortie (tension aux bornes de la résistance de charge  $R_s$ ).

Pour  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , l'impédance du circuit RLC est réelle et prend sa valeur minimale

égale à  $R$ , le courant traversant le circuit RLC et la tension aux bornes de  $R_s$  prennent ainsi leur valeur maximale. On dit que le circuit est en état de résonance.

En état de résonance et si  $u_e$  est sinusoïdale de fréquence  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ , le coefficient de division de tension du circuit s'écrit :

$$\frac{u_s}{u_e} = \frac{R_s R_{p2}}{(R_{p1} + R_{p2})(R + R_s) + R_{p1} R_{p2}}$$

Si  $u_e$  est périodique pouvant être décomposée, le circuit va répondre seulement à la composante de pulsation  $\omega_0$ . C'est à dire que la tension  $u_s$  aux bornes de  $R_s$  va contenir surtout l'harmonique de pulsation  $\omega_0$  qui elle n'est pas atténuée. Ainsi on peut analyser un signal électrique périodique en accordant le circuit RLC aux fréquences des différentes harmoniques composant ce signal.

## 1. Manipulation

### 3.1. Montage expérimental et caractéristiques du circuit

Réaliser le montage électrique ci-dessus. Brancher un oscilloscope de telle façon qu'on puisse observer  $u_e$  sur CH1 et  $u_s$  sur CH2. Ce circuit satisfait aux caractéristiques suivantes :

- Le circuit RLC est composé d'un condensateur variable par décade dont la capacité de départ est fixé à  $C = 110$  nF et d'une bobine de 1600 spires, d'inductance  $L = 50$  mH et de résistance  $R_L = 45$   $\Omega$ . La résistance du circuit RLC est ainsi  $R = R_L$
- Résistance de charge  $R_s$  est de 22  $\Omega$  et les résistances d'entrée et de protection sont  $R_{p1} = 100$   $\Omega$  et  $R_{p2} = 22$   $\Omega$
- Vérifier par calcul que la fréquence de résonance  $f_0 = 2147$  Hz et que le coefficient de division de tension du circuit  $\frac{u_s}{u_e} = 0.0467$

### 3.2. Analyse d'une tension carrée

- Choisir la gamme de fréquence du générateur de 1 à 10kHz, la tension de sortie aussi grande que possible et la forme d'onde sinusoïdale.
- Ajuster  $C$  à 110 nF
- Accorder le générateur à la fréquence de résonance  $f_0$  (la tension  $u_s$  aux bornes de  $R_s$  doit être maximale)
- Choisir la forme d'onde carrée, mesurer son amplitude  $U$  sur la voie CH1 de l'oscilloscope.
- Observer la forme du signal de sortie. Expliquer. Mesurer son amplitude  $U_s$ .
- Dédire l'amplitude de l'harmonique d'entrée  $U_e$  en utilisant la valeur du coefficient de division de tension du circuit.
- Calculer la valeur théorique donnée par le développement de Fourier. Comparer.
- En variant  $C$ , accorder le circuit aux fréquences des harmoniques consécutives  $3f_0$  puis  $5f_0$ . En effet, pour faire varier la fréquence de résonance du circuit  $n$  fois il suffit de varier la capacité  $C$  du condensateur  $1/n^2$  fois. Par exemple, si  $C = 110$  nF la fréquence est  $f_0$ , alors  $C = 110/9$  nF = 12,2 nF correspond à une fréquence de  $3f_0$ .
- Refaire les étapes 5 à 7 de ce présent paragraphe pour chacune des 2 fréquences.
- Représenter les résultats sous forme de tableaux et tirer les conclusions.

### 3.3. Analyse d'une tension triangulaire

Refaire l'étude précédente pour une forme triangulaire du signal délivré par le générateur.