

Corrigé du partiel d'Analyse 1 (Sujet N°1)

Exercice N°1(12 pts)

I) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{7u_n+4}{3u_n+3}, n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 0 \end{cases}$.

a) Montrons que, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 2$.

On raisonne par récurrence

On a $u_0 = 0$ donc on a $0 \leq u_0 \leq 2$.

(02 pts)

La propriété est vraie pour $n = 0$.

Supposons que $0 \leq u_n \leq 2$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 2$

On a $u_n \geq 0$, donc $7u_n + 4 > 0$ et $3u_n + 3 > 0$, d'où $u_{n+1} = \frac{7u_n+4}{3u_n+3} > 0$.

Par ailleurs on $u_{n+1} - 2 = \frac{7u_n+4}{3u_n+3} - 2 = \frac{u_n-2}{3u_n+3} \leq 0$ d'où $u_{n+1} \leq 2$.

Donc $0 \leq u_{n+1} \leq 2$. La propriété est vraie à l'ordre $n + 1$, elle est donc vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{7u_n+4}{3u_n+3} - u_n = \frac{-3u_n^2+4u_n+4}{3u_n+3} = \frac{-3(u_n+2/3)(u_n-2)}{3u_n+3}$$

Comme $0 \leq u_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$, alors $\frac{-3(u_n+2/3)(u_n-2)}{3u_n+3} \geq 0$

(02 pts)

D'où on a $u_{n+1} - u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

On déduit alors que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

c) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 2, elle est donc convergente vers $\sup_{n \geq 0} u_n$.

Soit $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. On a $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7u_n+4}{3u_n+3} = \frac{7l+4}{3l+3}$ (02 pts)

$$l = \frac{7l+4}{3l+3} \Leftrightarrow 3l^2 + 3l = 7l + 4 \Leftrightarrow 3l^2 - 4l - 4 = 0, \text{ ce qui donne } l = -\frac{2}{3} \text{ où } l = 2$$

Comme $u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ on a $l = 2$.

d) $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 2, elle est donc convergente vers $\sup_{n \geq 0} u_n$.

Or on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$, donc $\sup A = \sup_{n \geq 0} u_n = 2$.

(02 pts)

On a aussi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante donc minorée par $u_0 = 0$. A est minoré par $u_0 = 0$, et puisque $0 \in A$ donc on a $\inf A = 0$.

$$\text{II) } u_n = 1 + \frac{\cos 1}{3} + \frac{\cos 2}{3^2} + \dots + \frac{\cos n}{3^n} = \sum_{k=0}^n \frac{\cos k}{3^k}.$$

Montrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy

$\forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon)$ tel que $\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, p \geq q \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$, pour $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $p > q$

$$u_p - u_q = \sum_{k=0}^p \frac{\cos k}{3^k} - \sum_{k=0}^q \frac{\cos k}{3^k} = \frac{\cos(q+1)}{3^{q+1}} + \frac{\cos(q+2)}{3^{q+2}} + \dots + \frac{\cos p}{3^p} = \sum_{k=q+1}^p \frac{\cos k}{3^k}.$$

$$|u_p - u_q| = \left| \frac{\cos(q+1)}{3^{q+1}} + \frac{\cos(q+2)}{3^{q+2}} + \dots + \frac{\cos p}{3^p} \right| = \left| \sum_{k=q+1}^p \frac{\cos k}{3^k} \right|$$

Donc on a en utilisant l'inégalité triangulaire

(03,5 pts)

$$\begin{aligned} |u_p - u_q| &\leq \left| \frac{\cos(q+1)}{3^{q+1}} \right| + \left| \frac{\cos(q+2)}{3^{q+2}} \right| + \dots + \left| \frac{\cos p}{3^p} \right| \\ &= \frac{|\cos(q+1)|}{3^{q+1}} + \frac{|\cos(q+2)|}{3^{q+2}} + \dots + \frac{|\cos p|}{3^p} = \sum_{k=q+1}^p \frac{|\cos k|}{3^k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |u_p - u_q| &\leq \frac{1}{3^{q+1}} + \frac{1}{3^{q+2}} + \dots + \frac{1}{3^p} = \frac{1}{3^{q+1}} \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^{p-q-1}} \right) = \frac{1}{3^{q+1}} \frac{1 - \frac{1}{3^{p-q}}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{2 \times 3^q} \left(1 - \frac{1}{3^{p-q}} \right) < \frac{1}{3^q} \end{aligned}$$

Pour avoir $|u_p - u_q| < \varepsilon$ il suffit que $\frac{1}{3^q} < \varepsilon$.

$$\frac{1}{3^q} < \varepsilon \Leftrightarrow 3^q > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \ln(3^q) > \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \Leftrightarrow q \ln 3 > -\ln \varepsilon \Leftrightarrow q > -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 3}.$$

Il existe un entier $n(\varepsilon)$, ($n(\varepsilon)$ est le plus petit entier supérieur ou égal à $-\frac{\ln \varepsilon}{\ln 3}$)

$$n(\varepsilon) = \begin{cases} 0, & -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 3} < 0 \\ \left[-\frac{\ln \varepsilon}{\ln 3}\right] + 1, & -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 3} \geq 0 \end{cases}.$$

On a donc $\exists n(\varepsilon)$ tel que $\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, p \geq q \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon$.

On déduit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, elle est donc convergente.

(0,5 pt)

Exercice N°2 (08 pts)

1)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x-1)}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ a^2 + a - 1 & \text{si } x = 1, a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1°) Déterminons les valeurs de a pour lesquelles f est continue en $x = 1$.

Pour que f soit continue en $x = 1$, il faut que et il suffit que, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$.

On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et on a aussi $x \rightarrow 1 \Leftrightarrow x - 1 \rightarrow 0$. On conclut que :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = 1.$$

(02 pts)

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 1 = a^2 + a - 1 \Leftrightarrow a^2 + a - 2 = 0.$$

La résolution de cette équation de degré 2 donne $a = -2, a = 1$.

Pour que f soit continue en $x = 1$, il faut que et il suffit que, $a = -2$ où $a = 1$

$$2^\circ) \text{ Pour } a = 0 \text{ on a : } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x-1)}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

On a pour $x \neq 1$ $x \mapsto \sin(x-1)$ et $x \mapsto x-1$ sont continues, donc f est continue sur $\mathbb{R} - \{1\}$ comme quotient de deux fonctions continues.

(01 pt)

$$\text{En } x = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = 1 \text{ et } f(1) = -1$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1) = -1$ donc f est discontinue en $x = 1$.

II) $f(x) = |x|^n \sin\left(\frac{1}{|x|^m}\right), n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}^*.$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow |x| \rightarrow 0^+ \Rightarrow |x|^n \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x|^n \sin\left(\frac{1}{|x|^m}\right) = 0$$

car $\sin\left(\frac{1}{|x|^m}\right)$ est bornée et $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^n = 0$. Donc f est prolongable par continuité au point $x = 0$ et admet comme prolongement la fonction :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} |x|^n \sin\left(\frac{1}{|x|^m}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (01 \text{ pts})$$

Pour $n = 0, m \neq 0$ on a : $f(x) = \sin\left(\frac{1}{|x|^m}\right)$, pour $x \neq 0$, dans ce cas f n'admet pas de limite au point $x = 0$, f n'est donc pas prolongeable par continuité au point $x = 0$. (01 pts)

Pour $n = 0, m = 0$ on a : $f(x) = \sin(1)$ pour $x \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin 1 = \sin 1$

dans ce cas, f admet un prolongement par continuité au point $x = 0$,

$$\tilde{f}(x) = \sin 1, x \in \mathbb{R}. \quad (01 \text{ pt})$$

III) Montrons que l'équation $\ln(x + 2) = -x$ admet au moins une racine dans $]-1, 0[$

Soit la fonction g définie par $g(x) = \ln(x + 2) + x, x \in [-1, 0]$.

On a :

1. g est continue sur $[-1, 0]$ (02 pts)

2. $g(-1) = \ln(-1 + 2) - 1 = \ln 1 - 1 = -1 < 0, g(0) = \ln(2) + 0 = \ln 2 > 0, g(-1)g(0) < 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires on a :

$$\exists c \in]-1, 0[\text{ tel que : } g(c) = \ln(c + 2) + c = 0$$

$$g(c) = \ln(c + 2) + c = 0 \Leftrightarrow \ln(c + 2) = -c.$$
