

Corrigé du partiel (sections: F, D, J, O, M)
Module: Maths2 (ST)

Exercice 1 (07pts = 1 + 1.5+2,25x2) On considère le système

$$(S) \begin{cases} 4x + 2y + z = 1 \\ -5x - 2y - z = 2 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$$

1. (**01pt**) En utilisant le produit de matrices, le système (S) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. (**1.5pts**) On note par $A := \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice associée à (S). Vérifions si A est inversible. D'après le cours, pour que A soit inversible il suffit que son déterminant soit non nul. Calculons le déterminant de A. Afin de simplifier les calculs, on utilise les propriétés des déterminants:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{L1-2L3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Donc la matrice A est inversible.

3. (**4.5 pts = 2.25 + 2.25**) Résolution du système (S) en utilisant deux méthodes différentes.

Méthode 1, Matrice inverse (2.25pts). On note par:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On peut écrire le système (S) sous la forme

$$AX = b \underset{A \text{ inversible}}{\Leftrightarrow} X = A^{-1}b.$$

Donc pour résoudre le système (S), il suffit de calculer l'inverse de la matrice A et d'après le cours

$$A^{-1} = \frac{\text{com}(A)^t}{\det(A)} = \text{com}(A)^t = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}^t, \quad (\det(A) = 1)$$

où

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad c_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad c_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad c_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad c_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad c_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

D'où

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Méthode 2, Cramer (2.25pts). D'après le cours

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{C_1-C_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \det(A_2) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{C_2-C_3}{=} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \det(A_3) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{L_1-2L_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -5 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Exercice 2 (07pts = 2.5+2.5+2) Calculons les intégrales suivantes

1. **(2.5pts)** En utilisant la division euclidienne de $x^2 + 2x - 3$ par $x - 4$, on obtient:

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 4} = x + 6 + \frac{21}{x - 4}.$$

Donc

$$I_1 = \int \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 4} dx = \int \left(x + 6 + \frac{21}{x - 4} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 6x + 21 \ln(|x - 4|) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

2. **(02.5pts)**

I_2

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x^2 + 1) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{-1}{2} \cos(x^2 + 1) \right)' dx = \left[\frac{-1}{2} \cos(x^2 + 1) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{-\cos(\frac{\pi^2}{4} + 1)}{2} + \frac{\cos(1)}{2}$$

3. (**02 pts**) On remarque que le domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ est le quart d'une couronne. Pour calculer I_3 , on utilise le changement de variables (passage aux coordonnées polaires):

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[& \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) & \mapsto & \phi(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \end{cases}.$$

Ce changement de variables transforme le domaine D en $D' := \phi^{-1}(D)$ tel que

$$D' = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[/ 1 \leq (r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2 \leq 4, r \sin(\theta) \geq 0, r \cos(\theta) \geq 0\},$$

ce qui donne

$$D' = \left\{ (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[/ 1 \leq r^2 \leq 4, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \right\} = [1, 2] \times [0, \frac{\pi}{2}].$$

D'après le cours, le Jacobien de ϕ , $J_\phi = r$ et sous l'intégrale, on remplace x par $r \cos(\theta)$, y par $r \sin(\theta)$, D par D' et $dx dy$ par $r dr d\theta$ et en utilisant Fubini, on obtient:

$$I_3 = \iint_D 2 dx dy \stackrel{\text{C.V.}}{=} \iint_{D'} 2 r dr d\theta \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 2 r dr \right) d\theta = \frac{3\pi}{2}.$$

Exercice 3 (06pts= 4+2) 1. (**4pts = 1.5+1.5+1**) Résolution de l'équation $y' - y = x^2 e^x$

- **Étape 1**, résolution de l'équation sans second membre (homogène) associée: $y' - y = 0$. On a

$$y' - y = 0 \Leftrightarrow y' = y \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = 1 \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \frac{y'}{y} = \ln(|y|) = x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

en prenant l'exponentielle des deux cotés, on obtient

$$|y| = e^x e^c \Leftrightarrow y_h = k e^x, \quad k \in \mathbb{R} \text{ (constante)}$$

est la solution générale de l'équation homogène.

- **Étape 2**. Solution particulière, on utilise la méthode de la variation de la constante: On pose $y_p = z e^x$ (z est la nouvelle fonction inconnue) la dérivée $y'_p = z' e^x + z e^x$. On remplace y_p et y'_p dans l'équation, on obtient $z' e^x + z e^x - z e^x = x^2 e^x \Leftrightarrow z' = x^2$ ce qui donne $z = \frac{x^3}{3} e$, par conséquent

$$y_p = \frac{x^3}{3} e^x$$

- De l'étape (1) et (2), on obtient la solution générale de l'équation

$$y_g = y_h + y_p = k e^x + \frac{x^3}{3} e^x, \quad k \in \mathbb{R}.$$

2. (**2pts**) Résolution de l'équation $y'' + 4y' + y = 0$. Pour résoudre cette équation, il suffit de résoudre l'équation caractéristique associée $x^2 + 4x + 1 = 0$. On a le discriminant $\Delta = 16 - 4 = 12 > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes: $\alpha_1 = -2 + \sqrt{3}$ et $\alpha_2 = -2 - \sqrt{3}$. D'après le cours, la solution générale de l'équation est

$$y_g = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ constantes}.$$