



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mouloud MAMMERI Tizi-Ouzou
Département de mathématiques

Résumé de thèse

Doctorant : DJEBID Ali.

Encadrant : Pr. OUKACHA Brahim.

Intitulé de la thèse : Symétries dans les problèmes d'optimisation.

Résumé :

La présence de la symétrie dans la programmation mathématique en général et dans la programmation non linéaire en nombres entiers mixtes en particulier, entraîne une augmentation significative de la taille de l'espace de recherche. Par conséquent, elle provoque un accroissement du temps de calcul des méthodes de résolution exactes, notamment celles de type branch-and-bound. Face à cette problématique, la littérature propose plusieurs méthodes visant à exploiter ces symétries afin de réduire le temps de calcul et l'espace mémoire. Parmi les approches les plus répandues figurent les techniques de reformulation, qui consistent à introduire des contraintes de rupture de symétrie dans la formulation du problème étudié. Lorsque ces contraintes sont ajoutées avant le début du processus de résolution, on parle d'exploitation statique des symétries. En revanche, leur intégration au cours du processus de résolution correspond à une exploitation dynamique.

Dans cette thèse, nous étudions les techniques d'exploitation statique et dynamique des symétries, appliquées aux problèmes de programmation non linéaire en nombres entiers mixtes. Elles reposent sur la détection du groupe de formulation. Ce dernier peut être identifié soit en exploitant les propriétés structurelles du problème étudié, soit en transformant la formulation en un graphe acyclique dirigé dont le groupe d'automorphismes correspond au groupe de formulation du programme mathématique. À partir de ce groupe, des contraintes de rupture de symétrie sont générées de manière statique ou dynamique. En s'assurant qu'au moins une solution optimale est préservée.

Nous avons ensuite étudié l'exploitation des symétries dans deux problèmes d'optimisation. Le premier concerne le problème d'emballage de cercles égaux, tandis que le second porte sur le nombre maximal de sphères pouvant être adjacentes à une sphère centrale. Pour chacun de ces problèmes, nous avons identifié le groupe de formulation, ainsi que l'ensemble des contraintes de ruptures de symétries associées à des permutations de ce groupe. Nous avons également comparé les résultats numériques obtenus à partir des formulations originales et de celles issues de la reformulation. Afin d'évaluer l'impact de l'exploitation des symétries sur les performances des algorithmes de résolution.

Notre contribution principale porte sur l'exploitation des symétries dans le problème d'emballage de sphères identiques dans un cube unitaire, formulé comme un programme non linéaire en nombres entiers mixtes et résolu à l'aide du solveur Couenne, basé sur la méthode spatial branch-and-bound. Dans un premier temps, nous avons identifié le groupe de formulation du problème, ce qui a permis de détecter les symétries présentes. Ensuite, nous avons proposé un nouvel ensemble de contraintes de rupture de symétrie et démontré leur validité théorique. Enfin, nous avons confirmé l'efficacité de ces contraintes au moyen de simulations numériques.

Mots clés : Contraintes de rupture de symétrie; Symétrie dans la programmation mathématique; Exploitation des symétries; Emballage de sphères.

Abstract:

The presence of symmetries in mathematical programs in general and mixed integer non-linear programs in particular, leads to a significant increase in the size of the search space. Consequently, this results in greater computation times for exact solution methods, particularly those of the branch-and-bound type. In response to this problem, the literature proposes several techniques that aim to exploit these symmetries to reduce computation time and memory space. Among the most common approaches are reformulation techniques, which involve introducing symmetry-breaking constraints to the original formulation. When these constraints are added before the start of the solution process, this is referred to as static exploitation of symmetries. Conversely, their integration during the solution process corresponds to dynamic exploitation.

In this thesis, we investigate techniques for breaking symmetries, both static and dynamic, applied to mixed-integer non-linear programming problems. We have studied methods for the static and automatic detection of symmetries, applied to the root or to each node of the search tree. These methods rely on the identification of the permutation of the formulation group. The formulation group can be identified either by exploiting the structural properties of the problem under study or by transforming the formulation into a directed acyclic graph whose automorphism group corresponds to the formulation group of the mathematical program. From there, symmetry-breaking constraints are generated, either statically or automatically, while ensuring that at least one optimal solution is preserved.

We then applied these techniques for exploiting symmetry to two widely studied problems. The first concerns the problem of packing equal circles, while the second concerns the maximum number of identical spheres that can be adjacent to a central sphere. For each of these problems, we identified the formulation group and the set of associated symmetry-breaking constraints. We then compared the numerical results obtained from the original formulations with those derived from the reformulation in order to assess the impact of exploiting symmetries on solution performance.

Our main contribution concerns the study of symmetries in the problem of packing identical spheres into a unit cube, formulated as a mixed-integer non-linear programming problem and solved using the Couenne solver, which is based on the spatial branch-and-bound method. Firstly, we identified the formulation group of the problem, which enabled us to detect the symmetries present. Next, we proposed a new set of symmetry-breaking constraints and demonstrated their theoretical validity. Finally, we confirmed the effectiveness of these constraints through numerical simulations.

Keywords: Symmetry breaking constraints; Symmetry in mathematical programming; Exploiting symmetry; Spheres packing.