FSECG/UMMTO
TRONC COMMUN LMD /Section A et D
Module : Mathématique II

Série de TD 01: Calcul intégral

Exercice 1. Calculer les primitives et intégrales suivantes :

$$\int x^2 - 5x + \frac{4}{x^2}\ dx\ ,\quad \int \frac{2x}{x^2+1} dx\ ,\quad \int \frac{2x+\sqrt{x}}{x} dx,\quad \int_0^1 x^2\ e^{x^3}\ dx,$$

$$\int_5^2 4x^3 (\ x^4 - \tfrac{1}{2}) dx,\quad \int \frac{x^3}{(x^4+6)^2}\ dx$$

Exercice 2. En intégrant par partie calculer :

$$\int x^2 e^x\ \ dx,\quad \int_1^2 lnx\ \ dx,\quad \int x\ ln\ (x+1)\ \ dx,\quad \int_0^1 xe^{-x}\ \ dx\ ,$$

$$\int ln^2 x\, dx$$

Exercice 3. A l'aide d'un changement de variable calculer :

$$\int \frac{dx}{(2x+1)^2}\ ,\quad \int_0^1 \frac{dx}{e^x+1},\quad \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}\ ,\quad \int \frac{\ln x}{x} dx,$$

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx,\quad \int xe^{-x^2}\ \ dx\ ,$$

Exercice 4. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x}{(x-1)^2}$$

1. Déterminer le domaine de définition D_f.
2. Prouver l'existence de trois nombres réels a, b, c tq : $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$
3. En déduire les primitives de *f*.

Dirigé par : M[eur] **MESSAD – AHMED et M**[eur] **BELHITECHE – EL HADI**

Correction série TD N°5 :

Exercice n°1 :

1) $I = \int (x^2 - 5x + \frac{4}{x^2}) dx = \int x^2 dx + \int -5x\, dx + \int \frac{4}{x^2} dx$

$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{4}{x} + C \; ; C \in \mathbb{R}$

En effet : $\frac{4}{x^2}$ est sous la forme de $f(x) = \frac{1}{x^n}$, d'où l'intégrale est égale à $F(x) = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + C \; ; C \in \mathbb{R}$

2) $I = \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln|x^2+1| + C = \ln(x^2+1) + C$ si $(x^2+1>0)$

$f(x)$ est sous la forme de $\frac{u'}{u}$, d'où la primitive est $F(x) = \ln|u| + C$

3) $I = \int \frac{2x + \sqrt{x}}{x} dx = \int \frac{2x}{x} dx + \int \frac{\sqrt{x}}{x} dx = 2\int dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

$\frac{1}{\sqrt{x}}$ est sous la forme de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ dont la primitive $F(x) = 2\sqrt{x}$.

donc : $I = 2x + 2\sqrt{x} + C \; ; C \in \mathbb{R}$

4) $I = \int_0^1 x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 3x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 f(x) dx$

$f(x) = u' e^u$ dont la primitive $F(x) = e^u + C$

donc : $I = \frac{1}{3} \int_0^1 3x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \left[e^{x^3} \right]_0^1 = \frac{e}{3} - \frac{1}{3} = \frac{e-1}{3}$

5) $I = \int_5^2 4x^3 (x^4 - \frac{1}{2}) dx = \int_5^2 f(x) dx$

$f(x) = u' u^n$ dont la primitive $F(x) = \frac{u^{n+1}}{n+1}$

d'où : $I = \int_5^2 4x^3\left(x^4 - \frac{1}{2}\right) dx = -\int_2^5 4x^3\left(x^4 - \frac{1}{2}\right) dx$

$\Rightarrow I = -\left[\frac{1}{2}\left(x^4 - \frac{1}{2}\right)^2\right]_2^5 = -\frac{1}{2}\left[\left(5^4 - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(2^4 - \frac{1}{2}\right)^2\right]$

$I = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1249}{2}\right)^2 - \left(\frac{31}{2}\right)^2\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{1560001 - 961}{2}\right]$

$I = \frac{-1559040}{4} = -389760$

6) $I = \int \frac{x^3}{(x^4+6)^2} dx = \frac{1}{4}\int 4\frac{x^3}{(x^4+6)^2} dx$

$f(x) = \frac{u'}{u^n}$ dont la primitive $F(x) = \frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$

$I = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{(x^4+6)^2} dx = \frac{-1}{(x+6)} + C \; ; \; C \in \mathbb{R}$

Exercice n°2 : Intégration par partie :

1/ $I = \int x^2 e^x dx$ (double intégration par partie)

$\left.\begin{array}{l} u = x^2 \rightarrow u' = 2x \\ v' = e^x \rightarrow v = e^x \end{array}\right\} \Rightarrow I = x^2 e^x \Big| - \int 2x e^x dx$

on pose $J = \int x e^x dx$

$\left.\begin{array}{l} u = x \rightarrow u' = 1 \\ v' = e^x \rightarrow v = e^x \end{array}\right\} \Rightarrow J = x e^x \Big| - \int e^x dx = x e^x - e^x + C_0$

$I = x^2 e^x - 2x e^x - 2e^x + 2C_0 = e^x(x^2 - 2x + 2) + C \; ; \; C \in \mathbb{R}$

2/ $I = \int_1^2 \ln x \, dx$

$\left.\begin{array}{l} u = \ln x \rightarrow u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 \rightarrow v = x \end{array}\right\} \Rightarrow I = x \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{\cancel{x}} \cancel{x} \, dx$

$I = (2\ln 2 - 0) - [x]_1^2 = 2\ln 2 - 2 + 1 = 2\ln 2 - 1.$

3/ $I = \int x \ln(x+1)\, dx$

$u = \ln(x+1) \longrightarrow u' = \frac{1}{x+1}$

$v' = x \longrightarrow v = \frac{1}{2}x^2$

$I = \frac{1}{2}x^2 \ln(x+1) - \int \frac{1}{2}\frac{x^2}{x+1}\, dx$

on pose $J = \int \frac{x^2}{x+1}\, dx$

$\frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2 - 1 + 1}{x+1} = \frac{x^2 - 1}{x+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}} + \frac{1}{(x+1)}$

$\Rightarrow J = (x-1) + \frac{1}{(x+1)}$

$I = \frac{1}{2}x^2 \ln(x+1) - \frac{1}{2}\left[\int (x-1)\, dx + \int \frac{1}{(x+1)}\, dx\right]$

$I = \frac{1}{2}x^2 \ln(x+1) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1|\right] + C_0$

$I = \frac{1}{2}x^2 \ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \ln(x+1) + \frac{C_0}{2}$; si $x+1>0$

$I = \ln(x+1)\left[\frac{1}{2}x^2 + 1\right] - \frac{x^2 - 2x}{4} + C,\quad C \in \mathbb{R},\ x+1>0$

4/ $I = \int_0^1 x e^{-x}\, dx$

$u = x \longrightarrow u' = 1$

$v' = e^{-x} \longrightarrow v = -e^{-x}$ $\Big\}$ $I = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\, dx$

$I = (-e^{-1} + 1) + [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} + 1 - e^{-1} + 1 = -2e^{-1} + 2$

$= 2(-e^{-1} + 1)$

5/ $I = \int (\ln x)^2$

$u = \ln^2 x \longrightarrow u' = \frac{2 \cdot \ln x}{x}$; $v' = 1 \longrightarrow v = x$ $\Big\} I = x \ln^2 x \Big| - \int \frac{2x \ln x}{x} \, dx$

$I = x \ln^2 x - 2 \int \underbrace{\ln x \, dx} \rightarrow$ déjà calculé

$I = x^2 \ln^2 x - 2x(\ln x - 1) + C \;;\; C \in \mathbb{R}.$

Exercice n°3 : Intégration par changement de variable.

1/ $I = \int \frac{dx}{(2x+1)^2}$; on pose $u = 2x+1 \Rightarrow du = 2\, dx$
$\Rightarrow dx = \frac{du}{2}$

$I = \int \frac{2 \, dx}{2(2x+1)^2} = \int \frac{du}{2(u)^2} = \int \frac{u^{-2}}{2} du$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-2+1} u^{-2+1}\right] + C = \frac{1}{2}(-u^{-1}) + C = \frac{-}{2u} + C$

$\Rightarrow I = \frac{-1}{2(2x+1)} + C \;;\; C \in \mathbb{R}$

2/ $I = \int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$; on pose $x = -\ln t \Rightarrow dx = \frac{-1}{t} dt$

si $x = 0 \Rightarrow 0 = -\ln t \Rightarrow e^0 = e^{-\ln t} \Rightarrow 1 = t^{-1} \Rightarrow 1 = \longrightarrow t = 1$

si $x = 1 \Rightarrow 1 = -\ln t \Rightarrow e^1 = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{e^1}$.

$I = \int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} = \int_1^{\frac{1}{e}} \frac{-1 \, dt}{t e^{-\ln t} + 1} = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{-1}{t(\frac{1}{t}) + 1} dt = \cancel{\frac{1}{2} \int_{e^{-1}}^{1} \frac{dt}{t+1}}$

$\cancel{I = \frac{1}{2}(1 - e^{-1}) + C \;;\; C \in \mathbb{R}}$.

$I = \left[\ln|t+1|\right]_{e^{-1}}^{1} = \ln 2 - \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right)$

$I = \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$; on pose $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} dx$

$$I = 2\int_2^3 \frac{dx}{2\sqrt{x+1}} = 2\int_1^{\sqrt{2}} dt = 2\left[t\right]_1^{\sqrt{2}} = 2(\sqrt{2}-1)$$

si : $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1 \Rightarrow x = t^2 - 1$

$x = 2 \Rightarrow t^2 - 1 = 2 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = 1$

$x = 3 \Rightarrow t^2 - 1 = 3 \Rightarrow t^2 = 2 \Rightarrow t = \sqrt{2} = 1,41$

4/ $I = \int \frac{\ln x}{x} dx$; on pose $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$

$$I = \int t\,dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}\ln^2 x + C \;;\; C \in \mathbb{R}$$

5/ $I = \int \frac{1}{x\ln x} dx$; on pose $t(x) = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$

$$I = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln(x)| + C \;;\; C \in \mathbb{R}$$

6/ $I = \int x e^{-x^2} dx$; on pose $t(x) = x^2 \Rightarrow dt = 2x\,dx$

$$I = \frac{1}{2}\int 2x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int e^{-t} dt = \frac{1}{2}\left[-e^{-t}\right] + C$$

$$I = \frac{-e^{-t}}{2} + C = \frac{-e^{-x^2}}{2} + C \;;\; C \in \mathbb{R}$$

Exercice n°4 : $f(x) = \frac{x^3 - 3x}{(x-1)^2}$

1/ $D_f =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

2) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x}{(x-1)^2} = ax + b + \dfrac{c}{(x-1)^2}$

$$f(x) = \frac{(ax+b)(x-1)^2 + c}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{ax^3 + (b-2a)x^2 + (a-2b)x + (b+c)}{(x-1)^2} = \frac{x^3 - 3x}{(x-1)^2}$$

par identification nous avons :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = 0 \\ a - 2b = -3 \\ b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -2 \end{cases}$$

donc $f(x) = x + 2 - \dfrac{2}{(x-1)^2}$

$$I = \int x + 2 - \frac{2}{(x-1)^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{2}{x-1} + C \; ; \; C \in \mathbb{R}.$$

Université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou.
FSESGC
Section : B.
Module : Mathématiques II

Série N01

Exercice 01

Calculer les primitives suivantes

Exercice 02

Calculer les primitives suivantes par intégration par parties.

1. $\int x^2 \ln x \, dx$
2. $\int \ln x \, dx$ puis $\int (\ln x)^2 \, dx$
3. $\int \cos x \exp x \, dx$

Exercice 03

Calculer les primitives suivantes par changement de variable.

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln^3(x)}$$ dx

$$\int x \cdot \sqrt{x^2+1} \cdot dx$$

1. $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} dx$
2. $\int \frac{1}{x \ln x} dx$
3. $\int \frac{1}{3+\exp(-x)} dx$

Exercice 04
Calculer les primitives suivantes par décomposition en éléments simples

$$\int \frac{1}{x \cdot (x+1)} \, dx \qquad \int \frac{2 \cdot x + 3}{x^2 - 5 \cdot x + 6} \, dx$$

Exercice 02

1. $\int x^2 \ln x \, dx$

   Considérons l'intégration par parties avec $u = \ln x$ et $v' = x^2$. On a donc $u' = \frac{1}{x}$ et $v = \frac{x^3}{3}$. Donc

$$\begin{aligned}\int \ln x \times x^2 \, dx &= \int uv' = [uv] - \int u'v \\ &= \left[\ln x \times \frac{x^3}{3}\right] - \int \frac{1}{x} \times \frac{x^3}{3} dx \\ &= \left[\ln x \times \frac{x^3}{3}\right] - \int \frac{x^2}{3} dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c\end{aligned}$$

3. $\int \ln x \, dx$ puis $\int (\ln x)^2 \, dx$

   Pour la primitive $\int \ln x \, dx$, regardons l'intégration par parties avec $u = \ln x$ et $v' = 1$. Donc $u' = \frac{1}{x}$ et $v = x$.

$$\begin{aligned}\int \ln x \, dx &= \int uv' = [uv] - \int u'v \\ &= [\ln x \times x] - \int \frac{1}{x} \times x \, dx \\ &= [\ln x \times x] - \int 1 \, dx \\ &= x \ln x - x + c\end{aligned}$$

   Par la primitive $\int (\ln x)^2 \, dx$ soit l'intégration par parties définie par $u = (\ln x)^2$ et $v' = 1$. Donc $u' = 2\frac{1}{x} \ln x$ et $v = x$.

$$\begin{aligned}\int (\ln x)^2 \, dx &= \int uv' = [uv] - \int u'v \\ &= [x(\ln x)^2] - 2 \int \ln x \, dx \\ &= x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + c\end{aligned}$$

Cette primitive est définie sur $\mathbb{R}$.

2. $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

   En posant le changement de variable $u = \ln x$ on a $x = \exp u$ et $du = \frac{dx}{x}$ on écrit :

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{\ln x} \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + c = \ln |\ln x| + c$$

   Cette primitive est définie sur $]0, 1[$ ou sur $]1, +\infty[$ (la constante peut être différente pour chacun des intervalles).

3. $\int \frac{1}{3+\exp(-x)} dx$

   Soit le changement de variable $u = \exp x$. Alors $x = \ln u$ et $du = \exp x \, dx$ ce qui s'écrit aussi $dx = \frac{du}{u}$.

$$\int \frac{1}{3 + \exp(-x)} dx = \int \frac{1}{3 + \frac{1}{u}} \frac{du}{u} = \int \frac{1}{3u + 1} du = \frac{1}{3} \ln |3u + 1| + c = \frac{1}{3} \ln (3 \exp x + 1) + c$$

   Cette primitive est définie sur $\mathbb{R}$.

Exemple 3 : quelle est la primitive de la fonction suivante ?

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln^3(x)}$$

On effectue le changement de variable suivant :

$$u = \ln(x) \quad \Longrightarrow \quad du = \frac{dx}{x}$$

L'intégrale d'origine devient :

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x \cdot \ln^3(x)} &= \int \frac{du}{u^3} \\
&= -\frac{1}{2 \cdot u^2} \\
&= -\frac{1}{2 \cdot \ln^2(x)}
\end{aligned}$$

$$\int x \cdot \sqrt{x^2+1} \cdot dx$$

On effectue le changement de variable **u(x)** suivant et on en déduit sa dérivée **u'(x)** et sa différentielle **du** :

$$\begin{aligned}
u = \sqrt{x^2+1} \quad &\Longrightarrow \quad u^2 = x^2+1 \\
&\Longrightarrow \quad u' = \frac{du}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \\
&\Longrightarrow \quad du = \frac{x \cdot dx}{\sqrt{x^2+1}}
\end{aligned}$$

L'intégrale d'origine s'écrit :

$$\begin{aligned}
\int x \cdot \sqrt{x^2+1} \cdot dx &= \int x \cdot \sqrt{x^2+1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \cdot dx \\
&= \int (x^2+1) \cdot \frac{x \cdot dx}{\sqrt{x^2+1}} \\
&= \int u^2 \cdot du \\
&= \frac{u^3}{3}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}{3}$$

$$= \frac{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}$$

Mettons au même dénominateur la forme décomposée :

$$R(x) = \frac{a\cdot(x-3)+b\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot(x-3)} = \frac{x\cdot(a+b)-3\cdot a-2\cdot b}{(x-2)\cdot(x-3)}$$

Identifions les coefficients du numérateur :

$$\begin{cases} a+b=2 & \longrightarrow\ b=2-a \\ -3\cdot a-2\cdot b=3 & \longrightarrow\ -3\cdot a-2\cdot(2-a)=3 \end{cases}$$

Après résolution de ce système on trouve les valeurs de **a** et **b** :

$$\begin{cases} a=-7 \\ b=9 \end{cases}$$

On trouve alors la décomposition en éléments simples suivante :

$$R(x) = \frac{-7}{x-2} + \frac{9}{x-3}$$

Et on en déduit la primitive recherchée :

$$\begin{aligned} \int \frac{2\cdot x+3}{x^2-5\cdot x+6}\,dx &= \int\left(\frac{-7}{x-2}+\frac{9}{x-3}\right)\cdot dx \\ &= -7\cdot\int\frac{dx}{x-2}+9\cdot\int\frac{dx}{x-3} \\ &= -7\cdot\ln|x-2|+9\cdot\ln|x-3| \end{aligned}$$

$$\int \frac{2 \cdot x + 3}{x^2 - 5 \cdot x + 6}\, dx$$

Appelons **R(x)** la fraction rationnelle à intégrer :

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2 \cdot x + 3}{x^2 - 5 \cdot x + 6}$$

Les pôles de **R(x)**, c'est-à-dire les racines de **Q(x)**, sont les réels 2 et 3.

Remarque : un article entier du site Gecif.net est consacré à la recherche instantanée des racines d'un polynôme de degré quelconque.

Q(x) se factorise donc ainsi :

$$R(x) = \frac{2 \cdot x + 3}{(x-2) \cdot (x-3)}$$

La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle **R(x)** s'écrit :

$$R(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-3}$$

a et **b** sont deux constantes réelles qu'il nous faut déterminer.

Mettons au même dénominateur la forme décomposée :