FSECG/UMMTO
TRONC COMMUN LMD
Module : Mathématique II

Série de TD N° 2 : les fonctions à deux variables

Exercice 1.

Déterminer tous les points critiques (les points où $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$) de la fonction

$$f(x,y) = xy(x+y-1).$$

Réponse : comme $f(x,y) = x^2y + xy^2 - xy$, on obtient $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + y^2 - y = y(2x+y-1)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 2xy - x = x(x+2y-1)$ et donc trouver les points critiques de f revient à résoudre le système suivant $\left\{ \begin{array}{l} y(2x+y-1)=0 \\ x(x+2y-1)=0 \end{array} \right\}$. La première équation implique que ou bien $y=0$ ou bien $2x+y-1=0$. Traitons donc ces deux cas.

1. Si $y=0$ la seconde équation devient $x(x-1)=0$ et donc ou bien $x=0$ ou bien $x=1$ et donc nous avons obtenu que $(0,0)$ et $(1,0)$ sont des points singuliers.
2. Si $2x+y-1=0$ la seconde équation impose ou bien $x=0$ ou bien $x+2y-1=0$. Dans le premier cas on obtient $x=0$ et $y=1$ donc $(0,1)$ est un point singulier. Dans le second cas il faut résoudre $\begin{array}{l} 2x+y-1=0 \\ x+2y-1=0 \end{array}$ et on obtient que $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ est un point singulier.

Conclusion : la fonction f admet 4 points critiques et seulement 4 qui sont $(0,0)$, puis $(1,0)$ puis $(0,1)$ puis $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

Exercice 2.

Établir la nature des points critiques de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 3$.

Correction.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3(x^2 - y) = 0 \\ 3(y^2 - x) = 0 \end{cases} \iff (x,y) \in \{(0,0),(1,1)\}.$$

On a deux points critiques : $(0,0)$ et $(1,1)$.

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}, \qquad \text{dét}(H_f(x,y)) = 36xy - 9.$$

$\text{dét}(H_f(0,0)) = -9 < 0$ donc $(0,0)$ est un point-selle ; $\text{dét}(H_f(1,1)) = 27 > 0$ et $\partial_{xx} f(1,1) = 6 > 0$, donc $(1,1)$ est un minimum.

Dirigé par : M[eur] BELHITECHE – EL HADI et M[eur] MESSAD - AHMED