Chapitre IV :

Intégrales et

Primitives

Dans tout le chapitre, a et b sont deux réels d'un intervalle I bornes incluses tels que $a \leq b$.

I Primitives

I.1 Définitions

Définition 1
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle primitive de f sur I toute fonction F définie et dérivable sur I vérifiant

$$F'(x) = f(x) \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1
Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2$.

- La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^3$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ puisque $F'(x) = f(x)$.
- La fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = x^3 + 2$ est aussi une primitive de f sur $\mathbb{R}$ puisque $G'(x) = f(x)$.

Exemple 2
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$, alors la fonction F définie sur R par $F(x) = \sqrt{x^2+3} + \pi$ est une primitive de f.

- On calcule F', la dérivée de F et on vérifie que l'on obtient f :
- $F'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} + 0 = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}} = f(x)$.

Propriété 1
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, k un réel, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ fixés.

- Si f est dérivable sur I, alors f possède au moins une primitive sur I.
- Si f admet une primitive F sur I, les primitives de f sont les fonctions du type $F(x) + k$
- Si f est dérivable sur I, il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Exemple 3

- Les fonctions $F_0(x) = \dfrac{1}{4}x^4$, $F_1(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + 1$, $F_2(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + 2$, ... , $F_k(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + k$ avec $k \in \mathbb{R}$ sont toutes des primitives de la fonctions f.
- Cependant, il n'existe qu'une unique primitive F de f vérifiant $F(0) = 1$: il s'agit de F_1.

I.2 Calculs de primitives

L'objet de ce paragraphe est de présenter quelques techniques simples permettant l'obtention de primitives de fonctions données sur un intervalle déterminé.

I.2.1 Primitives des fonctions usuelles

La lecture du tableau des primitive se fait en lisant celui des dérivées « à l'envers ».
Les fonctions f suivantes sont définies, dérivables sur l'intervalle I, n est un entier relatif différent de -1.

$f(x)$	une primitive $F(x)$	conditions
0	k	$I=\mathbb{R}$
a	ax	$I=\mathbb{R}$
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$I=\mathbb{R}$ si $n>0$ $I=\mathbb{R}^*$ si $n<0$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x}$	$I=\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$I=\mathbb{R}_+^*$
$\cos x$	$\sin x$	$I=\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$I=\mathbb{R}$
e^x	e^x	$I=\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln x$	$I=\mathbb{R}_+^*$

Remarque 1
Pour obtenir toutes les primitives d'une fonction f donnée, il suffit de rajouter une constante.

Exemple 4

- Une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^8$ est $F(x)=\dfrac{1}{9}\,x^9$.
- Une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=\dfrac{1}{x^8}$ est $F(x)=-\dfrac{1}{7\,x^7}$.

I.2.2 Opérations sur les primitives

u et v sont des fonctions de primitives U et V sur un intervalle I.

Tableau des opérations sur les primitives :

Forme de la fonction	Une primitive	Conditions
$u+v$	$U+V$	
$k\times u$	$k\times U$	
$u'\ u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	$n\in\mathbb{N}$
$\dfrac{u'}{u^n}$	$-\dfrac{1}{(n-1)\ u^{n-1}}$	$n\in\mathbb{N}^*$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u(x)>0$
$u'\cos u$	$\sin u$	
$u'\sin u$	$-\cos u$	
$u'e^u$	e^u	
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln u$	$u(x)>0$

Exemple 5
On cherche à déterminer dans chacun des cas suivant une primitive F de le fonction f sur l'intervalle I :

- $f(x)=4x^2$ et $I=\mathbb{R}$: $F(x)=4\times\dfrac{x^3}{3}=\dfrac{4x^3}{3}$.
- $f(x)=2x(x^2-1)^5$ et $I=\mathbb{R}$: $f(x)=(x^2-1)'(x^2-1)^5$ donc $F(x)=\dfrac{(x-1)^6}{6}$.

- $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{3x-6}}$ et $x > 2$: $f(x) = \dfrac{(3x-6)'}{\sqrt{3x-6}}$ donc $F(x) = 2\sqrt{3x-6}$.
- $f(x) = 2x + 2\cos(2x) - 6\sin(3x-1)$ et $I = \mathbb{R}$: $f(x) = 2x + (2x)'\cos(2x) - 2(3x-1)'\sin(3x-1)$ donc $F(x) = x^2 + \sin(2x) + 2\cos(3x-1)$.
- $f(x) = -9\ e^{-3x-1}$ et $I = \mathbb{R}$: $f(x) = 3(-3x-1)'e^{-3x-1}$ donc : $F(x) = 3\ e^{-3x-1}$.
- $f(x) = \dfrac{4x-2}{x^2-x+3}$ et $I = \mathbb{R}$: $f(x) = \dfrac{2(x^2-x+3)'}{x^2-x+3}$ donc : $F(x) = 2\ln(x^2-x+3)$.

II Intégrale d'une fonction

Définition 2
On appelle intégrale de f sur $[\ a\ ;\ b\ ]$ le nombre réel $F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I. Il est noté

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a).$$

Exemple 6
Calcul de l'intégrale : $\displaystyle\int_2^3 x\ dx$:

- Une primitive de $f(x) = x$ est $F(x) = \dfrac{x^2}{2}$.
- donc, $\displaystyle\int_2^3 x\ dx = F(3) - F(2) = \frac{9}{2} - \frac{4}{2} = \frac{5}{2}$.

Remarque 2

- L'intégrale d'une fonction f sur $[\ a\ ;\ b\ ]$ est indépendante du choix de la primitive F.
- On note aussi $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.
- Dans l'écriture $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$, la variable x est « muette », ce qui signifie que $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b f(t)\ dt = \ldots$
  Le dx ou dt détermine la variable par rapport à laquelle on intègre la fonction : x, ou t.

IV Propriétés de l'intégrale

IV.1 Relation de Chasles

Propriété 3
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $c \in [\ a\ ;\ b\ ]$, alors

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx.$$

IV.2 Linéarité

Propriété 4
Soient $f, g : [\ a\ ;\ b\ ] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et λ un réel, alors :

- $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx.$
- $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\ dx = \lambda \int_a^b f(x)\ dx.$

Exemple 10
Calcul de l'intégrale : $I = \displaystyle\int_1^2 \left(6x + \frac{5}{x}\right) dx$:

- $I = 3\displaystyle\int_1^2 2x\ dx + 5\int_1^2 \frac{1}{x}\ dx$
- $I = 3\ \left[x^2\right]_1^2 + 5\ \left[\ln x\right]_1^2$
- $I = 3(4-1) + 5(\ln 2 - \ln 1)$
- $I = 9 + 5\ln 2.$

IV.3 Inégalités

Propriété 5
Soient $f, g : [\ a\ ;\ b\ ] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables.

- Inégalité : si, pour tout $x \in [\ a\ ;\ b\ ]$, on a $f(x) \leq g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx$.
- Positivité : si, pour tout $x \in [\ a\ ;\ b\ ]$, on a $f(x) \geq 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \geq 0$.
- Valeur absolue : $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx$.

ATTENTION !
La réciproque de la positivité n'est pas forcément vraie, on peut avoit $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$ sans avoir f positive sur $[\ a\ ;\ b\ ]$:

- $\displaystyle\int_0^3 (2x-1)\ dx = [x^2 - x]_0^3 = 6$. Donc, $\displaystyle\int_0^3 (2x-1)\ dx \geq 0$.
- Cependant, la fonction $x \to 2x-1$ n'est pas positive sur $[\ 0\ ;\ 3\ ]$.

V Méthodes de calcul d'intégrales

V.1 Intégration par partie

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. La dérivée du produit uv est

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \text{d'où} \qquad u'v = (uv)' - uv'.$$

On peut donc énoncer la propriété suivante :

Propriété 8
Si a et b sont deux éléments de I, on a alors

$$\int_a^b u'(x)v(x)\ dx = \int_a^b (uv)'(x)\ dx - \int_a^b u(x)v'(x)\ dx.$$

soit encore, si on choisit uv comme primitive de $(uv)'$,

$$\int_a^b u'(x)v(x)\ dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\ dx.$$

Exemple 12
On désire calculer l'intégrale $I = \int_0^1 xe^x\ dx$.

- On pose $\begin{cases} u'(x) = e^x \\ v(x) = x \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u(x) = e^x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$.
- Donc : $\int_0^1 xe^x\ dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\ dx = (1e^1 - 0\ e^0) - [e^x]_0^1 = e - e + 1 = 1.$

V.2 Changement de variables

V.2.1 Changement de variable du type $x \to x + \beta$

Propriété 9
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle du type $[a+\beta, b+\beta]$ où a, b et $\beta \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$, alors

$$\int_a^b f(x+\beta)\ dx = \int_{a+\beta}^{b+\beta} f(t)\ dt.$$

Exemple 13
On se propose de calculer l'intégrale $I = \int_{-3}^{-2} (x+3)^2\ dx$.

- On peut faire le calcul directement en remarquant qu'une primitive de $(x+3)^2$ sur $[-3\ , -2\ ]$ est $\frac{1}{3}(x+3)^3$.
- On peut également effectuer une translation de vecteur $3\,\overrightarrow{i}$ de manière à effectuer un calcul plus simple :
$I = \int_{-3}^{-2} (x+3)^2\ dx = \int_0^1 t^2\ dt = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$

V.2.2 Changement de variable du type $x \to \alpha x$ lorsque $\alpha \neq 0$

Propriété 10
Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[\ \alpha a\ ,\ \alpha b\ ]$, où $\alpha \neq 0$, alors

$$\int_a^b f(\alpha x)\ dx = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a}^{\alpha b} f(x)\ dx.$$

Exemple 14
On se propose de calculer $I = \int_0^1 e^{2x}\ dx$:

- $I = \int_0^1 e^{2x}\ dx = \frac{1}{2}\int_0^2 e^t\ dt = \frac{1}{2}\left[e^t\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right).$

V.2.3 Cas général : changement de variable du type $x \to \varphi(x)$

Propriété 11
Soit φ une fonction dérivable sur un intervalle $I = [\, a \,,\, b \,]$ dont la dérivée est dérivable sur I.
Pour toute fonction f définie et continue sur l'intervalle $f(I)$, on a :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\ dx = \int_a^b f\left[\varphi(t)\right] \varphi'(t)\ dt.$$

Exemple 15
Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ en posant $t = \sqrt{x}$, ce qui équivaut à $x = t^2 = \varphi(t)$:

- On calcule les nouvelles bornes d'intégration :
  Pour $x \in [\,1\,,\,4\,]$, on obtient $t \in [\,1\,,\,2\,]$
- On exprime l'expression à intégrer par rapport à la nouvelle variable : on a
  $\displaystyle\frac{1}{x+\sqrt{x}}\ dx = \frac{1}{\varphi(t)+\sqrt{\varphi(t)}}\varphi'(t)\ dt = \frac{1}{t^2+t} \times 2t\ dt.$
- donc :

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{dx}{x+\sqrt{x}} &= \int_1^2 \frac{2t\ dt}{t^2+t} \\ &= 2\int_1^2 \frac{1}{t+1}\ dt \\ &= 2\left[\ \ln(1+t)\ \right]_1^2 \\ &= 2(\ln 3 - \ln 2) \\ &= 2\ln\left(\tfrac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

Chapitre V :

Les Fonctions à deux Variables

Fonctions de plusieurs variables

1 Définition et exemples

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n),\ x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$.

$(x_1, x_2, ..., x_n)$ est dit n-uplet, en géométrie on dit un point de $\mathbb{R}^n$ il est vu aussi comme un vecteur.

Définition 1 *Une fonction numérique de n variables réelles est une application f d'une partie D de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note*

$$\begin{aligned} f : D &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, ..., x_n) &\mapsto f(x_1, x_2, ..., x_n) \end{aligned}$$

Ou bien

$$\begin{aligned} f : D &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \quad \text{ou } x = (x_1, x_2, ..., x_n) \end{aligned}$$

Exemple 1

1) $f(x, y) = x^3 + xy - y^2$, $D = \mathbb{R}^2$.

2) $g(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$, $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

3) La fonction surface $= xy$, volume $= xyz$.

4) L'allométrie est l'étude des échelles de relations entre une partie du corps et le corps dans son ensemble. Une relation allométrique entre la masse (M) et la longueur (L) du corps des poissons à la forme

$$M = aL^b$$

4) La fonction résistance d'un montage en parallèle de deux résistances x et y est donnée par

$$\frac{xy}{x + y}$$

2 Fonctions de deux variables

2.1 Domaine de définition

Le domaine de définition d'une fonction $f(x, y)$, noté D_f, est l'ensemble

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \in \mathbb{R}\}.$$

En général, pour déterminer D_f on passe par les étapes suivantes :

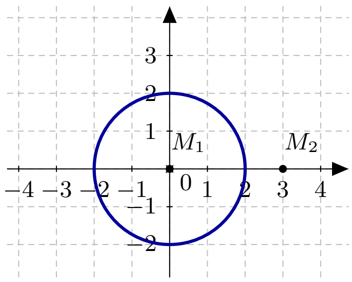
1) Ecriture du domaine.

2) Détermination des frontières.

3)Représentation graphique et détermination des régions qui constituent D_f en utilisant des points particuliers situés dans les régions.

Exemple 2

$$f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$



1) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 4 - x^2 - y^2 \geq 0\}$.

2) Détermination des frontières :

$4-x^2-y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 2^2$, cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $r = 2$.

3) Le cercle divise le plan en deux régions, prenons deux points quelconques de ces deux régions. $M_1 = (0,0)$ et $M_2 = (3,0)$

Pour M_1 on a $4 - 0^2 - 0^2 \geq 0$

Pour M_2 on a $4 - 3^2 - 0^2 < 0$

Donc $D_f =$ intérieur du cercle.

2.2 Limite et continuité

1. **Limite en $(0,0)$:**

Pour calculer $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, la première étape consiste à remplacer x par 0 et y par 0, si on trouve un nombre ou ∞ c'est bon. Si on trouve une forme indéterminée alors il faut faire le changement de variable en coordonnées polaires suivant :

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

θ contrôle la direction, et donc :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

Ou bien poser $y = tx$, ici t contrôle la direction, et alors

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x, tx).$$

• Si la limite ne dépend pas de θ (ou t) et est finie on dit qu'elle existe.

• Si elle dépend de θ (ou t) ou bien n'est pas finie on dit qu'elle n'existe pas.

Exemple 3 ....

2. **Limite en (x_0, y_0) :**

On pose $X = x - x_0$ et $Y = y - y_0$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(X,Y)\to(0,0)} f(X + x_0, Y + y_0).$$

Exemple 4 ....

3. **Limite en (x_0, ∞) :**
   On pose $X = x - x_0$, $Y = 1/y$.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,\infty)} f(x,y) = \lim_{(X,Y)\to(0,0)} f(X + x_0, 1/Y).$$

Exemple 5 ....

4. **Limite en** (∞, ∞) :
   On pose :$X = 1/x$ et $Y = 1/y$.

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} f(x,y) = \lim_{(X,Y)\to(0,0)} f(1/X, 1/Y).$$

Exemple 6 ....

Continuité : f est continue en (x_0, y_0) si :

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0).$$

Exemple 7 ....

2.3 Dérivées partielles

On commence par donner la définition pour le cas général.

Définition 2 *La dérivée partielle de la fonction à n variables $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ par rapport à la variable x_k (où $k = 1, ..., n$), est la dérivée de la fonction*

$$x_k \mapsto f(x_1, x_2, ..., x_k, ..., x_n)$$

de la variable x_k, en considérant toutes les autres variables x_j comme des constantes (ou paramètres) .
Cette dérivée partielle de f par rapport à x_k reste une fonction à n variables et elle est notée

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}$$

Exemple 8 ....

Exemple 9 ....

Exemple 10 ....

Maintenant on donne la définition des dérivées partielles secondes pour une fonction à deux variables.

Définition 3 *Les dérivées partielles secondes de la fonction à deux variables $f(x,y)$ sont les dérivées partielles des fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. On énumère quatre :*

1) la dérivée partielle seconde par rapport à x notée

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

2) la dérivée partielle seconde par rapport à y notée

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

3) la dérivée partielle seconde par rapport à x et puis y notée

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

4) la dérivée partielle seconde par rapport à y et puis x notée

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Exemple 11 ....

Theorem 1 *Si en un point (x, y) les dérivées secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont continues, alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

2.4 Points critiques et extremums

Définition 4 *Un point critique pour une fonction f à deux variables est un couple (x, y) vérifiant*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Définition 5 *Un point (x_0, y_0) est un maximum local de f, s'il existe un intervalle $]a, b[$ tel que,*

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall x, y \in]a, b[\,.$$

Définition 6 *Un point (x_0, y_0) est un minimum local de f, s'il existe un intervalle $]a, b[$ tel que,*

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \quad \forall x, y \in]a, b[\,.$$

Theorem 2 *Si une fonction f admet un minimum ou un maximum local en un point (x, y), alors ce point est un point critique.*

Theorem 3 *Soit* (x_0, y_0) *un point critique d'une fonction à deux variables* f*, on note :*

$$R = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \ \ S = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \ \ T = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

et

$$W = RT - S^2.$$

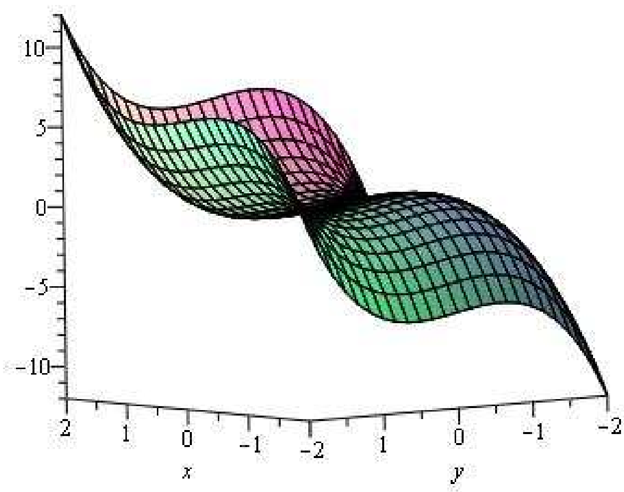
Alors

1) *Si en* (x_0, y_0) *on a* $W > 0$*,* f *admet en* (x_0, y_0) *un maximum si* $R < 0$ *et un minimum si* $R > 0$.
2) *Si en* (x_0, y_0) *on a* $W < 0$*,* f *n'admet pas d'extremum en* (x_0, y_0)*. On parle de point selle.*
3) *Si en* (x_0, y_0) *on a* $W = 0$*, on ne peut pas conclure.*

Exemple 12 *Etudier l'existence d'extremums de la fonction*

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y.$$

On a : ....



Extremums de $\boldsymbol{f(x, y) = x^3 + y^3 - x - y}$

Chapitre VI :

Les Matrices

I. Notion de matrice

I.1. Définition : On appelle **MATRICE** de dimension *n x p* un tableau rectangulaire de nombres comportant n lignes et p colonnes. Ces nombres sont appelés **COEFFICIENTS** de la matrice.

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \leftarrow ligne\ 2 \\ \\ \leftarrow ligne\ n \end{array} \\ \begin{array}{cccc} & \uparrow & & \uparrow \\ & colonne\ 2 & & colonne\ p \end{array} & \end{array}$$

I.2. Notations

- Les coefficients s'écrivent sans "séparation" verticale ou horizontale contrairement aux tableaux que vous connaissez. La matrice est "encadrée" par des parenthèses (ou des crochets dans certains exercices).
- Le coefficient de la i éme ligne et de la jéme colonne est noté a_{ij}
- La matrice A se note aussi$(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le P}}$. Autrement dit, A est la matrice des coefficients a_{ij}.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \text{ est une matrice de 3 lignes et 4 colonnes.}$$

$$a_{13} = -1 \text{ et } a_{31} = \sqrt{2}.$$

I.3. Matrices particulières

I.3.1. Matrice colonne (vecteur-colonne)

Ce sont les matrices à une colonne $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ . \\ a_{n1} \end{pmatrix}$

I.3.2. Matrice ligne (vecteur-ligne)

Ce sont les matrices à une ligne $(a_{11}\ \ a_{12}\ \ldots\ a_{1n})$

I.3.3. Matrice carrée

Une matrice ayant le même nombre de lignes et de colonnes (matrice $m\times m$) est appelée matrice carrée. Les coefficients ayant même indice de ligne et de colonne s'appellent les coefficients diagonaux.

Soit $B = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & -1 & 0 \\ -1 & \mathbf{-7} & 0 \\ \sqrt{5} & 0 & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$, la diagonale de B est la suite des éléments en gras.

I.3.4. Matrices triangulaires inférieures

Ce sont les matrices carrées dont tous les coefficients strictement au dessus de la diagonale (c'est-à-dire d'indices ij avec j > i) sont nuls. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

I.3.5. Matrices triangulaires supérieures

Ce sont les matrices carrées dont tous les coefficients strictement au dessous de la diagonale (c'est-à-dire d'indices ij avec j < i) sont nuls. Par exemple :

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

I.3.6. Matrices diagonales

Ce sont les matrices carrées à la fois triangulaires supérieures et triangulaires inférieures. Les seuls coefficients pouvant être non nuls sont donc ceux de la diagonale. Par exemple :

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

I.3.7. Matrices scalaires

Ce sont les matrices diagonales dont tous les coefficients diagonaux sont égaux. Par exemple : $\begin{pmatrix}\pi&0&0&0\\0&\pi&0&0\\0&0&\pi&0\\0&0&0&\pi\end{pmatrix}$.

I.3.8. Matrice identité

C'est la matrice scalaire dont tous les coefficients diagonaux valent 1. On note $\mathbf{I_n}$ la matrice identité d'ordre n. Par exemple :

$$I_4 = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

I.3.9. Matrice nulle

C'est la matrice non nécessairement carrée dont tous les coefficients sont nuls. On la note $0_{n,p}$ ou $0_{n\,p}$ si elle a n lignes et p colonnes, 0 s'il n'y a pas d'ambigüité. Par exemple : $0_{23} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

II. Calcul matricielle

II.1. Transposée d'une matrice

Soit A une matrice n × p. La transposée de la matrice A est la matrice p × n notée ${}^{T}A$ dont les lignes sont les colonnes de A et les colonnes sont les lignes de A

Exemple

Soit D la matrice $\begin{pmatrix}4&6&-1\\-2&1&0\end{pmatrix}$. La transposée de D est la matrice : ${}^{T}D = \begin{pmatrix}4&-2\\6&1\\-1&0\end{pmatrix}$

II.2. Egalité de deux matrices

Soit A et B deux matrices ayant le même nombre de lignes et de colonnes, c'est à dire la même dimension, on dit que A = B si tous les éléments de A sont égaux aux éléments correspondants de B.

Exemple

On donne : $E = \begin{pmatrix}2x+3&5\\3&-2y-4\end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix}-1&5\\3&5\end{pmatrix}$

Déterminons x et y pour que les deux matrices E et F soient égales.

$$E = F \Longleftrightarrow \begin{cases}2x+3=-1\\-2y-4=5\end{cases}, \text{ ce qui se produit si et seulement si } \begin{cases}x=-2\\y=-\dfrac{9}{2}\end{cases}$$

II.3. Addition de matrices

Soit M et N deux matrices ayant le même nombre de lignes et de colonnes. La somme des matrices M et N est la matrice de même dimension que M et N, dont chaque élément est la somme des éléments correspondants de M et N.

Exemples

1.

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

2.

Soit A et B les matrices définies par : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$.

L'opposée de B est $-B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ et la différence de A et B est : $A - B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

II.4. Multiplication par un réel

Soit M une matrice quelconque et λ un réel. Le produit de M par λ est la matrice de même dimension que M et dont chaque élément est le produit de λ par l'élément correspondant de M.

Exemple

Soit $M = \begin{pmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \Re$ alors : $\lambda M = \begin{pmatrix} 4\lambda & a\lambda \\ b\lambda & -\lambda \end{pmatrix}$

II.4. Propriétés

On admettra les propriétés suivantes :

Soit A,B et C, trois matrices ayant la même dimension, λ et λ_0 deux réels.

$A + B = B + A$ qui caractérise la commutativité de l'addition matricielle

$(A + B)+C = A + (B + C)$ qui caractérise l'associativité de l'addition matricielle

$$\left.\begin{array}{l} \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B \\ (\lambda + \lambda_0)A = \lambda A + \lambda_0 A \\ \lambda(\lambda_0 A) = (\lambda\lambda_0)A \end{array}\right\} \textit{qui} \text{ caractérise la distribution matricielle}$$

Exemple

On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

Soit X une matrice 2×2 telle que $2X + 3A = B$. Déterminer la matrice X.

$2X = B - 3A$. En multipliant les matrices $2X$ et $B - 3A$ par 1/2, on obtient : $X = 1/2(B - 3A)$

On obtient donc : $X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Finalement : $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

III. Produit de matrices

III.1. Produit d'une matrice par un vecteur-colonne (par une matrice $n\times 1$)

On peut effectuer le produit d'une matrice à p colonnes (quelque soit le nombre n de lignes) par un vecteur-colonne à n lignes. Le résultat est alors un vecteur-colonne à n lignes.

Exemple 1

Soit une matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ -1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ et un vecteur-colonne $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Le produit AV est le vecteur-colonne : $AV = \begin{pmatrix} 2x + 4y - 5z \\ -x + 6y + 3z \end{pmatrix}$

Exemple 2

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 0 \times (-2) + (-3) \times 3 \\ (-2) \times 1 + 1 \times (-2) + 3 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

III.2. Produit d'un vecteur-ligne (matrice 1 × *p*) par une matrice

On peut effectuer le produit d'un vecteur-ligne à p colonnes par une matrice à n lignes (quelque soit le nombre p de colonnes). Le résultat est alors un vecteur ligne à p colonnes.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 3 + (-2) \times 2 + 4 \times (-2) & 1 \times (-1) + (-2) \times 0 + 4 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 15 \end{pmatrix}$$

III.3. Produit matriciel

Soit A une matrice $n \times p$ et B une matrice $p \times m$. On peut effectuer le produit d'une matrice à n lignes et p colonnes par une matrice à p lignes et m colonnes. On appelle produit $A \times B$ la matrice de dimension $n \times m$ obtenue en multipliant chaque ligne de A par chaque colonne de B. Plus précisément, le coefficient de la $i$ème ligne et de la $j$ième colonne de $A \times B$ est obtenu en multipliant la $i$ème ligne de A par la $j$ième colonne de B.

$$C = A \times B \Rightarrow \sum_{i=1}^{p} a_{ik} \times b_{kj}$$

Exemple 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Calculons $C = A \times B$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 \times 2 + 1 \times 1 & 2 \times 4 + 1 \times (-2) & 2 \times 6 + 1 \times 3 & 2 \times (-1) + 1 \times 5 \\ 4 \times 2 + 3 \times 1 & 4 \times 4 + 3 \times (-2) & 4 \times 6 + 3 \times 3 & 4 \times (-1) + 3 \times 5 \\ (-1) \times 2 + (-2) \times 1 & (-1) \times 4 + (-2) \times (-2) & (-1) \times 6 + (-2) \times 3 & (-1) \times (-1) + (-2) \times 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 6 & 15 & 3 \\ 11 & 10 & 33 & 11 \\ -4 & 0 & -12 & -9 \end{pmatrix}$$

Il faut que A ait autant de colonnes que B de lignes pour que le calcul soit possible. Dans ce cas, le produit A × B a autant de lignes que A et autant de colonnes que B. La matrice C a 3 lignes comme A et 4 colonnes comme B.

Remarque. ***Le produit de matrices n'est pas commutatif****, c'est à dire que si A et B sont deux matrices quelconques, en général A × B ≠B × A. En effet, le nombre de lignes et de colonnes des matrices A et B peuvent permettre d'effectuer le produit AB mais pas nécessairement le produit BA. De plus, même dans le cas où les deux produits existent, généralement AB n'est pas égal à BA.*

Exemple 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

On peut faire le produit $A \times B$ car le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. Par contre on ne peut pas faire le produit $B \times A$ car le nombre de colonnes de B n'est pas égal au nombre de lignes de A.

Exemple 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Cette fois-ci, contrairement à l'exemple précédent, les deux produits $A \times B$ et $B \times A$ sont définis :

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 \times (-1) + (-1) \times 2 & 2 \times 1 + (-1) \times 3 \\ 0 \times (-1) + 3 \times 2 & 0 \times 1 + 3 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} (-1) \times 2 + 1 \times 0 & (-1) \times (-1) + 1 \times 3 \\ 2 \times 2) + 3 \times 0 & 2 \times (-1) + 3 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

III.3.1. Remarque

– *La matrice identité joue pour le produit matriciel un rôle similaire au nombre 1 pour le produit des nombres réels.*

– *En supposant que les dimensions permettent le produit, on a A × In = In × A = A.*

III.3.2. Propriétés

On admettra les propriétés suivantes :

Soit *A*, *B* et *C*, trois matrices réelles ; si les opérations indiquées existent, alors on admettra les égalités suivantes :

$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ distributivité à gauche de la multiplication des matrices sur l'addition

$(A + B) \times C = A \times C + B \times C$ distributivité à droite de la multiplication des matrices sur l'addition

$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ associativité de la multiplication

III.3.3. Définition

Soit A une matrice carrée d'ordre n. Soit p un entier naturel non nul. On note *Ap* la matrice définie par : $A_p = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{\text{p fois la matrice A}}$

Attention ! ! ! Le calcul de A^2, par exemple, ne consiste pas à élever les éléments de A au carré !

Exemple

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. On a alors : $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 \\ 3^2 & 4^2 \end{pmatrix}$

IV. Déterminant d'une matrice

À toute matrice carrée A correspond une valeur appelée le déterminant de A que l'on dénote par det (A) ou encore |A|

IV. 1. Calcul du déterminant pour une matrice 2x2

Considérons la matrice A de dimension 2 x 2 : $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Le déterminant de la matrice A est définie par la relation

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Exemple

Soit A une matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = 1 \times (-4) - 2 \times (-2) = -4 + 4 = 0$$

IV.2. Définition d'un mineur

Soit A une matrice carrée de rang 3 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

Le mineur M_{12} est le déterminant de la matrice obtenue en éliminant la 1ère rangée et la 2eme colonne de A c'est-à-dire

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 5.3 - 3.8 = 15 - 24 = -9$$

Le mineur M_{22} est le déterminant de la matrice obtenue en éliminant la 2éme rangée et la 2éme colonne de A c'est-à-dire

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 2.3 - 4.8 = 6 - 32 = -26$$

IV. 3. Définition d'un cofacteur

Le cofacteur C_{ij} d'une matrice A est défini par la relation $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Vous constaterez que le cofacteur et le mineur ont toujours la même valeur numérique, à l'exception parfois de leur signe.

Considérons à nouveau $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -1.(-9) = 9$; $C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 1.(-26) = -26$

Le mineur M_{12} et le cofacteur C_{12}, sont de signes différents par contre, le mineur M_{22} et le cofacteur C_{22}, sont identiques.

Évaluer le déterminant d'une matrice 3x 3 sera maintenant possible. Nous procéderons en réduisant celui-ci en une série de déterminants 2 x 2, pour lesquels le calcul est nettement plus facile. Ce processus est appelé **une expansion par cofacteurs**.

IV.4. méthode de calcul des déterminants

- Octroyer à chacun des éléments un signe +/- en suivant la règle suivante : on associe un signe positif à la position a_{11} , puis on alterne les signes en se déplaçant horizontalement ou verticalement.
- Choisir une rangée ou une colonne de A (si possible, il est plus rapide de choisir la rangée ou la colonne de A contenant le plus grand nombre de zéros)…
- Multiplier chacun des éléments a_{ij} de la rangée (ou colonne) choisie par son mineur correspondant, i.e. le déterminant qu'il reste lorsqu'on élimine la rangée et la colonne dans lesquelles se trouve a_{ij}.
- Faire la somme ou la différence de ces résultats selon le signe accordé aux éléments lors de la première étape

Exemple

Soit donc la matrice A à laquelle on octroie un signe +/- selon la règle décrite plus tôt. $A = \begin{pmatrix} 2^+ & 1^- & 3^+ \\ 1^- & 0^+ & 2^- \\ 2^+ & 0^- & -2^+ \end{pmatrix}$

- Choisissons la 2éme colonne qui possède plus d'éléments nuls
- Nous multiplions ensuite chaque élément par son mineur correspondant :

$$det\ A = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (0)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (0)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

V. Matrices inversibles

Rappel : L'inverse d'un nombre réel α non nul est le nombre $\frac{1}{\alpha}$; il est défini par la relation $\alpha \times \frac{1}{\alpha} = 1$ où 1 est l'élément neutre de la multiplication.

Définition : Soit A une matrice carrée d'ordre n. On dit que la matrice A est inversible s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que : $A \times B = I_n$ **,** alors B est unique et est appelée **l'inverse de la matrice A** et se note $\boldsymbol{A^{-1}}$**.**

Avec: $\boldsymbol{A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n}$.

V.1. Matrice inverse

L'inverse d'une matrice A s'écrit sous la forme :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^{t}\mathrm{com}A = \frac{1}{\det A}\,{}^{t}C = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & \ddots & & C_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & \cdots & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Où : **det(*A*) est le déterminant de *A***

C = com(A) = $\breve{A}$ est la comatrice (la matrice des cofacteurs) de *A*

^{t}C est la matrice transposée de *C*.

Remarque : la comatrice (la matrice des cofacteurs) de *A* est obtenue en utilisant le processus de l'expansion par cofacteurs

V.2. Théorème : Soit A une matrice carrée d'ordre n. si $\det A \neq 0$, alors A admet une matrice inverse A^{-1}

Exemple $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

On fixe la première ligne

$$det\ A = (1)\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + (7)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 24 - 84 - 140 = -198$$

$det\ A \neq 0$ donc A admet une matrice inverse A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times {}^{t}\tilde{A}$$

$$\text{Matrice des cofacteurs : } \to \tilde{A} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \to \tilde{A} = \begin{vmatrix} 24 & 28 & -20 \\ -18 & -29 & 15 \\ -4 & 6 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\text{Transposée de la matrice des cofacteurs } \Rightarrow \tilde{A}' = \begin{bmatrix} 24 & -18 & -4 \\ 28 & -29 & 6 \\ -20 & 15 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{198} \times \begin{pmatrix} 24 & -18 & -4 \\ 28 & -29 & 6 \\ -20 & 15 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-8}{66} & \frac{6}{66} & \frac{2}{99} \\ \frac{-14}{99} & \frac{29}{198} & \frac{-2}{66} \\ \frac{10}{99} & \frac{-5}{66} & \frac{1}{99} \end{pmatrix}$$

Remarque : Une matrice non inversible (ie det A=0) est également appelée **MATRICE SINGULIÈRE**.

Exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ $\det(A) = 1 \times (-4) - 2 \times (-2) = -4 + 4 = 0$

$\det(A) = 0$ donc la matrice A n'est pas inversible.

V.I. Écriture matricielle d'un système d'équations linéaires

A est une matrice carrée qui admet une matrice inverse A^{-1}. Le système d'équations linéaires dont l'écriture matricielle est $A \times X = B$ admet une solution unique ; elle s'obtient en calculant $X = A^{-1} \times B$

Démonstration : Si A est inversible :

$$A \times B = C \leftrightarrow A^{-1} \times A \times B = A^{-1} \times C \leftrightarrow I_n \times B = A^{-1} \times C \leftrightarrow B = A^{-1} \times C$$

Exemple : Résolvons le système $(S) \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$.

(S) peut s'écrire sous la forme de l'égalité matricielle suivante : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

En posant A= $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 2 \times (-1) - 1 \times 1 = -2 - 1 = -3 \neq 0$. Donc la matrice A est inversible et

$A^{-1} = \frac{-1}{3} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$

Donc :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \times 3 + \frac{1}{3} \times 2 \\ \frac{1}{3} \times 3 - \frac{2}{3} \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

Le couple $\left\{\frac{5}{3}; \frac{-1}{3}\right\}$ est l'unique solution de système (S)