Série de TD n°3/statistique 1/Janvier 2020/ 1 ère année LMD.

Exercice 1 : les deux séries ci-dessous représentent les prix en dinars de deux produits alimentaires dans les points de vente :

Série 1 : 14,2 ; 13,8 ; 14,2 ; 13,9 ; 14.

Série 2 : 14,1 ; 13,8 ; 14,3 ; 15,2 ; 13,5 ; 14.

Calculer le prix modal, médian et moyen pour chaque série.

Exercice 2 : le tableau suivant indique la répartition des journées de travail des éléments d'une brigade de sapeurs- pompiers, selon le nombre d'interventions quotidiennes, au cours d'une année donnée.

Nombre d'interventions	0	1	2	3	4	5
Nombre de jours	100	130	70	35	20	10

Calculer les trois paramètres de tendance centrale.

Exercice 3 : Les chiffres d'affaires annuels en 10^5 DA de 65 petites entreprises sont représentés par le tableau suivant :

Chiffres d'affaires	[8-10[	[10-14[	[14-16[	[16-18[	[18-24[	[24-30[
Effectifs	5	20	14	8	9	9

1-Calculer le mode et la médiane. Interpréter.

2-Calculer le premier quartile, le neuvième décile et le dixième centile.

3-Calculer la moyenne arithmétique par la méthode de changement de variable (avec : $X_0 = 15$, $a = 2$).

4-Représenter graphiquement le mode et la médiane de cette série.

Exercice 4 : Dans une classe de 30 élèves, le groupe des 20 filles a obtenu une moyenne en statistique de 11,5 ; le groupe des 10 garçons a obtenu une moyenne en statistique de 10,4. Calculer la moyenne de la classe.

Exercice 5 : Après correction des copies, la moyenne à l'épreuve de mathématiques des étudiants d'un groupe de TD de première année est égale à 10,66.

1-Si l'enseignant décide d'augmenter la note de chaque copie de deux points, quelle sera la nouvelle moyenne de l'épreuve ?

2-Si l'enseignant décide d'augmenter la note de chaque copie de 10%, quelle sera la nouvelle moyenne de l'épreuve ?

<u>Série de TD n°4/statistique 1/Février 2020/ 1 ère année LMD.</u>

Exercice 1: une entreprise dépense un budget « B » chaque trimestre pour l'achat d'affiches publicitaires.
-Au premier trimestre, le prix de l'affiche était de 350 DA.
-Au deuxième trimestre, le prix de l'affiche était de 380 DA.
-Au troisième trimestre, le prix de l'affiche était de 400 DA.
-Au troisième trimestre, le prix de l'affiche était de 450 DA.

Calculer le prix moyen de l'affiche sur les quatre trimestres.

Exercice 2 : au cours de la période 1994-1999, les exportations du pétrole brut ont évolué de la façon suivante :

Années	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Pourcentage de variation par rapport à l'année précédente	-3,8	-18,3	+14 ,2	-3,1	-1,5	+8,9

1-Calculer le taux annuel moyen de variation au cours de la période 1993-1999.
2-Sachant que le taux moyen d'accroissement des exportations était de 9, 2% par an pendant la période 1969-1982, de 12,4% pendant la période 1982-1993, calculer le taux de variation annuel moyen pour la période 1969-1999.

Exercice 3 : un touriste américain en voyage en France, échange des dollars dans les conditions suivantes :
1000$ contre des euros au taux de 1,30$/€.
2000$ contre des euros au taux de 1,32$ /€.
1500$ contre des euros au taux de 1,35$/€.
-Quel est le taux de change moyen ? Quel type de moyenne ce calcul fait –il intervenir ?

De retour aux USA, il lui reste 400€ qu'il échange dans les conditions suivantes :
300€ contre des dollars au taux de 1,25$/€.
100€ contre des dollars au taux 1,20$/€.
-Quel est le taux de change moyen ? Quel type de moyenne ce calcul fait –il intervenir ?

Le Corrigé de la Série 3.

Exo 1 : M_o, M_e, $\overline{X}$

Série 1 : 14,2 ; 13,8 ; 14,2 ; 13,9 ; 14.

a) Mode : $M_o = 14,2$ DA (la modalité la plus fréquente).

b) Médiane : M_e : pour calculer la médiane, on doit d'abord ranger les données par ordre croissant ou décroissant.

série ordonnée : $\underbrace{13,8 ; 13,9}_{\text{avant}}$; 14 ; $\underbrace{14,2 ; 14,2}_{\text{après}}$.

$N = 5$: chiffre impair $\Rightarrow M_e = \left(\frac{N+1}{2}\right)^{\text{ème}}$ valeur $\Rightarrow M_e = 3^{\text{ème}}$ valeur

$M_e = 14$ DA

c) Moyenne arithmétique $\overline{X}$: $\overline{X} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{14,2 + 13,8 + 14,2 + 13,9 + 14}{5}$

$\overline{X} = 14,02$ DA

Série 2 : 14,1 ; 13,8 ; 14,3 ; 15,2 ; 13,5 ; 14.

a) M_o : Il n'y a pas de mode car toutes les valeurs se répètent de la même façon.

b) M_e ? série ordonnée : 13,5 ; 13,8 ; [14 ; 14,1] ; 14,3 ; 15,2

$N = 6$: chiffre pair donc la médiane correspond à un intervalle médian dont les valeurs sont : $\left[\left(\frac{N}{2}\right)^{\text{ème}} v ; \left(\frac{N}{2}+1\right)^{\text{ème}} v\right] \Leftrightarrow$ $[3^{\text{ème}} v ; 4^{\text{ème}} v] \Leftrightarrow [14 ; 14,1]$ donc $M_e = \frac{14 + 14,1}{2} = 14,0$

c) $\overline{X} = ?$ $\overline{X} = \frac{14,1 + 13,8 + 14,3 + 15,2 + 13,5 + 14}{6} = 14,15$ D

Exo 2 : Variable statistique discrète :

calcul de M_o, M_e et $\overline{X}$:

X_i	n_i	$n_i\nearrow$	$X_i n_i$
0	100	100	0
1	130	230	130
2	070	300	140
3	35	335	105
4	20	355	80
5	10	365	50
TOTAL	365	///	505

a) $M_o = ?$;

Le plus grand effectif est = 130 $\Rightarrow M_o = 1$.

b) $M_e = ?$ $N = 365$ car un chiffre impair donc la médiane correspond à la $\left(\frac{N+1}{2}\right)^{\text{ème}}$ v

$\Rightarrow 183^{\text{ème}}$ valeur $\Rightarrow M_e = 1$ [183 ∈ $n_i\nearrow$ 1 =

c) $\overline{X} = \frac{\sum x_i n_i}{N} = \frac{505}{365} = 1,38 \simeq 1$ intervalle

Ex N°3 : V. S. Continue.

C.A	n_i	a_i	n_{ic}	$n_i\nearrow$	X_i	X_i'	$X_i'n_i$
[8 – 10[	5	2	5	5	9	−3	−15
[10 – 14[	20	4	10	25	12	−1,5	−30
[14 – 16[	14	2	14	39	15	0	0
[16 – 18[	08	2	8	47	17	1	8
[18 – 24[	09	6	3	56	21	3	27
[24 – 30[	09	6	3	65	27	6	54
TOTAL	65	///	///	///	///	///	44

1) M_o et M_e

a) Mode : Les classes sont inégales, il faut calculer d'abord les nic ou fic ou d_i / $n_{ic} = \frac{n_i \times a_0}{a_i}$, $a_0 = 2$ (PGCD des amplitudes)

$$M_o = X_0 + \left[a_i \cdot \frac{(n_{ic\,m_o} - n_{ic\,m_o-1})}{(n_{ic\,m_o} - n_{ic\,m_o-1}) + (n_{ic\,m_o} - n_{ic\,m_o+1})}\right]$$

La classe modale est [14 – 16[(la classe qui a le + grand nic).

$$M_o = 14 + \left[2 \cdot \frac{(14-10)}{(14-10) + (14-8)}\right] \Rightarrow M_o = 14,8 \cdot 10^5 \text{ DA}$$

Le chiffre d'affaires le plus fréquent est $14,8 \cdot 10^5$ DA

b) Le chiffre d'affaires médian : $M_e = ?$, On calcule les $n_i\nearrow$

$$M_e = X_0 + \left[a_i \cdot \frac{\frac{N}{2} - n_i\nearrow_{me-1}}{n_{i\,me}}\right] ; \frac{N}{2} = \frac{65}{2} = 32,5.$$

$32,5 \in n_i\nearrow = 39$ donc la classe médiane est [14 – 16[

$$M_e = 14 + 2\frac{(32,5 - 25)}{14} \Rightarrow M_e = 15,07 \simeq 15 \cdot 10^5 \text{ DA}$$

Cela signifie que 50% des entreprises ont un chiffre d'affaires inférieur à 1500 000 DA et 50% ont un chiffres d'affaires supérieur à 1500 000 DA.

2) Q_1, D_9 et C_{10}. $\qquad Q_1 = x_0 + a_i \dfrac{\left(\frac{N}{4} - n_i \nearrow Q_1 - 1\right)}{n_{Q_1}}$

a) $Q_1 = ?$; $\frac{N}{4} = \frac{65}{4} = 16{,}25 \Rightarrow$ La classe de Q_1 est $[10 - 14[$

$Q_1 = 10 + \left[4 \cdot \dfrac{(16{,}25 - 5)}{20}\right] \Rightarrow Q_1 = 12{,}25 \cdot 10^5$ DA [25% des E/ont un CA inf à 12,25·10^5 DA et 75% ont CA sup]

b) $D_9 = ?$ $\quad D_9 = x_0 + a_i \dfrac{\left(\frac{9 \cdot N}{10} - n_i \nearrow D_9 - 1\right)}{n_{i\,D_9}}$; $\frac{9N}{10} = 58{,}5$

La classe de D_9 : $[24 - 30[$; $D_9 = 24 + 6 \dfrac{(58{,}5 - 56)}{9} \Rightarrow$

$D_9 = 25{,}66 \cdot 10^5$ DA. [90% des E/ ont un CA inf à 25,66·10^5 DA et 10% ont un CA sup à cette valeur]

c) $C_{10} = ?$ $\quad C_{10} = x_0 + a_i \dfrac{\frac{10N}{100} - n_i \nearrow C_{10} - 1}{n_{i\,C_{10}}}$; $\frac{10N}{100} = 6{,}5$

La classe de C_{10} : $[10 - 14[$; $C_{10} = 10 + 4 \dfrac{(6{,}5 - 5)}{20} \Rightarrow$

$C_{10} = 10{,}3 \cdot 10^5$ DA. [10% des E/ ont un CA d'affaires inf à 10,3·10^5 DA et 90% ont un CA sup à cette valeur]

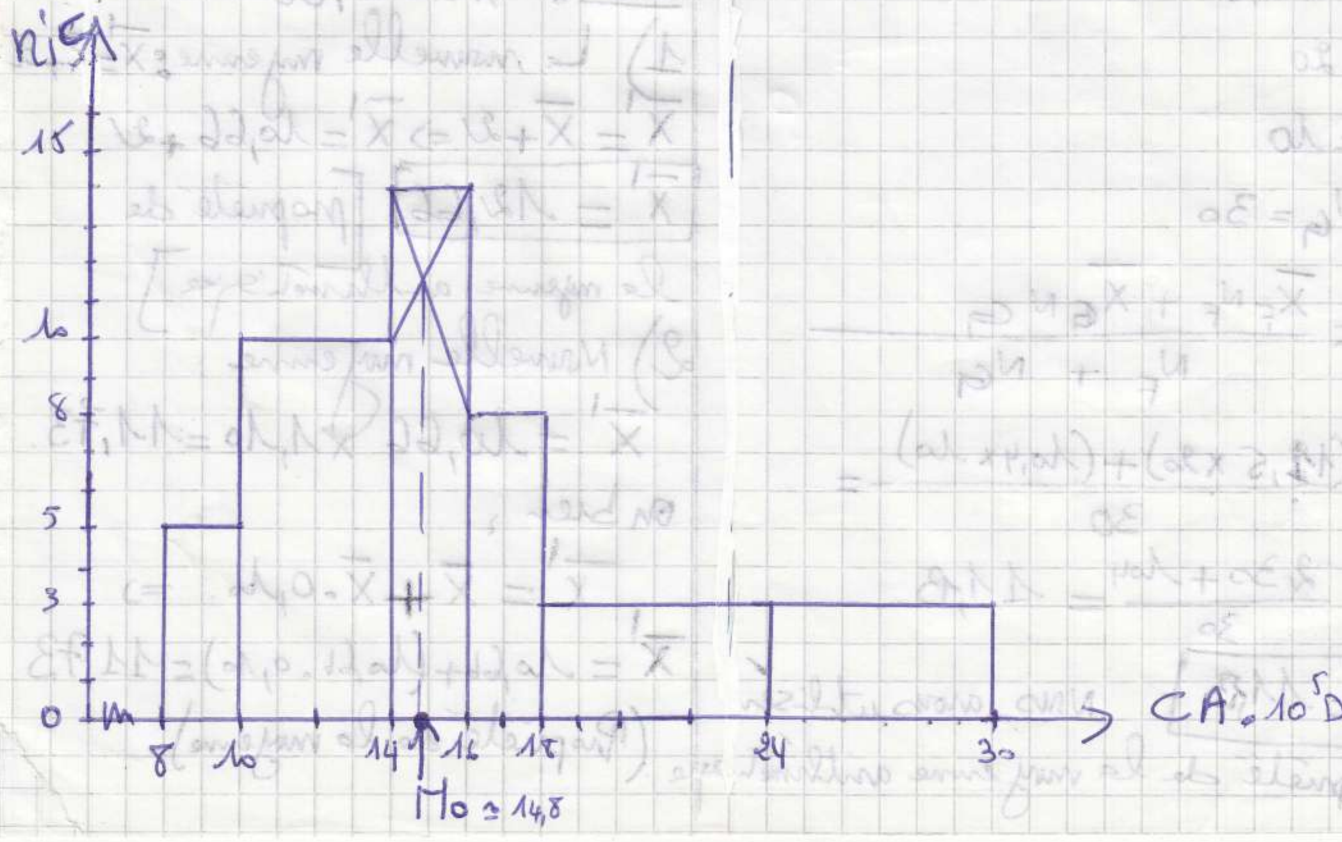
3) La moyenne $\overline{X}$ par la méthode de changement de variable $\left(a = 2,\ x_0 = 15\right)$

$x'_i = \dfrac{x_i - x_0}{a}$, $\overline{X'} = \dfrac{\sum x'_i n_i}{N}$, $\overline{X} = \overline{X'} \cdot a + x_0$

$\overline{X'} = \dfrac{44}{65} = 0{,}679$; $\overline{X} = 0{,}679 \cdot 2 + 15 = 16{,}358 \cdot 10^5$ DA

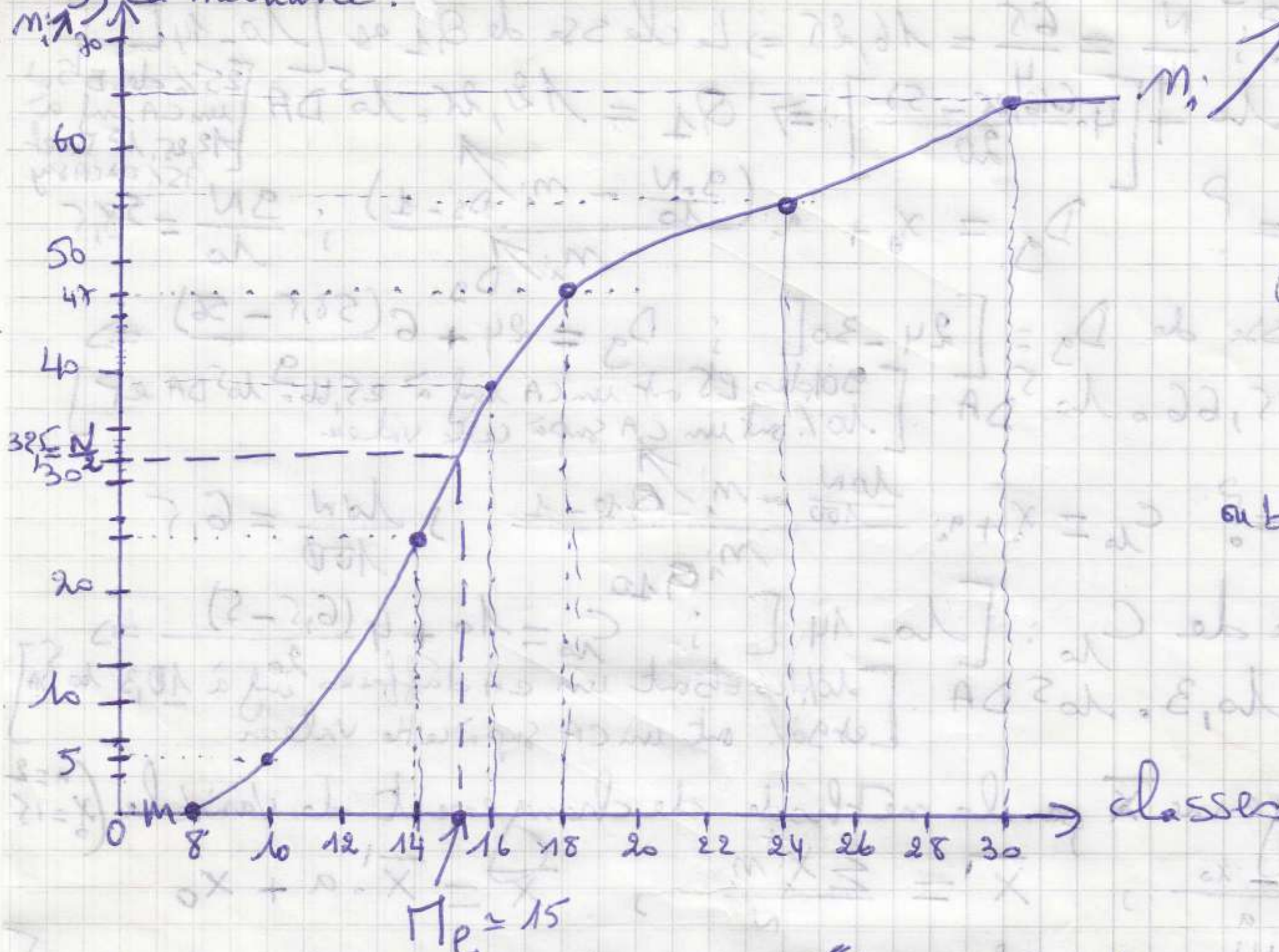
4) R.G du mode et de la médiane :

a) Mode (sur un histogramme).



④

b) La médiane :



Remarque. On peut utiliser les f_i ↗ ou f_i ↓ ou bien les deux

Ex n° 4

$\overline{X} = ?$ (moyenne de la classe)

$\overline{X}_F = 11{,}5$

$\overline{X}_G = 10{,}4$

$N_F = 20$

$N_G = 10$

$N_F + N_G = 30$

$$\overline{X} = \frac{\overline{X}_F N_F + \overline{X}_G N_G}{N_F + N_G}$$

$$\overline{X} = \frac{(11{,}5 \times 20) + (10{,}4 \times 10)}{30} =$$

$$= \frac{230 + 104}{30} = 11{,}13$$

$\boxed{\overline{X} = 11{,}13}$ Nous avons utilisé une propriété de la moyenne arithmétique

« La moyenne des moyennes »

On peut utiliser les f_i

$\overline{X} = \overline{X}_F f_{iF} + \overline{X}_G f_{iG}$

Ex 5 : $\overline{X} = 10{,}66$

1) La nouvelle moyenne : $\overline{X}' = \overline{X} + a$

$\overline{X}' = \overline{X} + 2 \Rightarrow \overline{X}' = 10{,}66 + 2$

$\boxed{\overline{X}' = 12{,}66}$ [propriété de la moyenne arithmétique]

2) Nouvelle moyenne :

$\overline{X}' = 10{,}66 \times 1{,}10 = 11{,}73$.

ou bien :

$\overline{X}' = \overline{X} + \overline{X} \cdot 0{,}10 \Rightarrow$

$\overline{X}' = 10{,}66 + (10{,}66 \cdot 0{,}10) = 11{,}73$

(Propriété de la moyenne).

رقم فوج ج ع.م : .... اللقب : .... الإسم : ....

Nom : .... Prénoms : .... Semestre G.TD.N° ....

Corrigé de la série n°4 (Jan 2020)

Exo N°1 : Px moyen de l'affiche sur les 4 trimestres?

$$\text{Prix moyen de l'affiche} = \frac{\text{Budget total dépensé pour l'achat d'AP}}{\text{Nombre d'affiches achetées.}}$$

F même Budget « B »

$$PMA = \frac{B+B+B+B}{Q_1+Q_2+Q_3+Q_4} = \frac{B+B+B+B}{\frac{B}{P_1}+\frac{B}{P_2}+\frac{B}{P_3}+\frac{B}{P_4}}$$

(B : budget, Q : quantité, P : prix.)

$$= \frac{4\cancel{B}}{\cancel{B}\left(\frac{1}{P_1}+\frac{1}{P_2}+\frac{1}{P_3}+\frac{1}{P_4}\right)} = \frac{4}{\frac{1}{P_1}+\frac{1}{P_2}+\frac{1}{P_3}+\frac{1}{P_4}}$$

Il s'agit d'une moyenne harmonique simple

$$H = \frac{N}{\sum\left(\frac{1}{x_i}\right)}$$

$$PMA = \frac{4}{\frac{1}{350}+\frac{1}{380}+\frac{1}{400}+\frac{1}{450}} = \frac{4}{0{,}0101} \simeq 396 \text{ DA}$$

Exo N°2 : Moyenne géométrique.

1) Taux annuel moyen de Variation de 1993 à 1999.

Pour calculer la moyenne géométrique, il faut transformer les taux d'évolution en valeurs indiciaires

$-3{,}8\% \longrightarrow VI$ (valeur indiciaire) $= 1-0{,}038 = 0{,}962 = 96{,}2$

$-18{,}3\% (-0{,}183) \longrightarrow VI = 1-0{,}183 = 0{,}817$ ou $81{,}7$

$+14{,}2\% (+0{,}142) \longrightarrow VI = 1+0{,}142 = 1{,}142$ ou $114{,}2$

$-3{,}1\% (-0{,}031) \longrightarrow VI = 1-0{,}031 = 0{,}969$ ou $96{,}9$

$-1{,}5\% (-0{,}015) \longrightarrow VI = 1-0{,}015 = 0{,}985$ ou $98{,}5$

$+8{,}9\% (-0{,}089) \longrightarrow VI = 1+0{,}089 = 1{,}089$ ou $108{,}9$

C'est une moyenne géométrique simple:

$$G = \sqrt[N]{\prod x_i}$$

$$G = \sqrt[6]{0{,}962 \times 0{,}817 \times 1{,}142 \times 0{,}969 \times 0{,}985 \times 1{,}089}$$

$$G = \sqrt[6]{0{,}932934427} = 0{,}988 \text{ (VI)}$$

1

Taux moyen : $T\Pi = (G-1) \times 100 \Rightarrow T\Pi = (0,988 - 1) \times 100$

$T\Pi = -1,2\%$ soit une baisse de 1,2% par an.

$n_1 = 13$ 2) 1969 – 1982 → 9,2% → $V_I = 1 + 0,092 = 1,092$

$n_2 = 11$ → 1982 – 1993 → 12,4% (0,124) → $V_I = 1 + 0,124 = 1,124$

$n_3 = 6$ → 1993 – 1999 → −1,2% (−0,012) → $V_I = 1 - 0,012 = 0,988$

Il s'agit d'une moyenne géométrique pondérée :

$$G = \sqrt[N]{\prod x_i^{n_i}} = \sqrt[30]{(1,092)^{13} \times (1,124)^{11} \times (0,988)^{6}}$$

$G = 1,082$; $T\Pi = (G-1) \times 100 \Rightarrow T\Pi = (1,082 - 1) \times 100$

$T\Pi = 8,2\%$ soit une hausse de 8,2% par an

Ex 3

1) Le taux de change moyen = $\dfrac{\text{Le montant total en \$ échangé}}{\text{Le montant total en € reçu}}$

S_1, S_2, S_3 : Montants en \$; Π_1, Π_2, Π_3 : Montants en € ; t_1, t_2, t_3 : les taux respectifs

$$TCM_{\$/€} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3}$$ (sachant que $\Pi_1 = \frac{S_1}{t_1}$; $\Pi_2 = \frac{S_2}{t_2}$; $\Pi_3 = \frac{S_3}{t_3}$)

$t\ \$ \to 1\ €$; $S_1\ \$ \to \Pi_1\ €$; $\Pi_1 = \frac{S_1}{t_1}$

$$TC\Pi = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{\frac{S_1}{t_1} + \frac{S_2}{t_2} + \frac{S_3}{t_3}} = H$$ ⇒ C'est une moyenne harmonique pondérée.

$$H = \frac{N}{\sum \left(\frac{n_i}{x_i}\right)}$$

$$TC\Pi = \frac{1000 + 2000 + 1500}{\frac{1000}{1,30} + \frac{2000}{1,32} + \frac{1500}{1,35}} = 1,32\ \$/€$$

2) $$TC\Pi = \frac{\text{Mt total en \$}}{\text{Mt total en €}} = \frac{S_1 + S_2}{\Pi_1 + \Pi_2} = \frac{(\Pi_1 t_1) + (\Pi_2 t_2)}{\Pi_1 + \Pi_2}$$

$$TC\Pi = \frac{(300 \times 1,25) + (100 \times 1,20)}{300 + 100} = \frac{375 + 120}{400} = 1,2375\ \$/€$$

Il s'agit d'une moyenne arithmétique pondérée

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i n_i}{N}$$

(2)