Introduction :

Pour l'étude des phénomènes économiques et sociaux, on a souvent besoin de décrire les variations de grandeurs simple (par exemple le prix du blé, la production du mais, l'exportation d'automobile). Ces comparaisons dans le temps et dans l'espace, se font généralement en effectuant le rapport des grandeurs considérées : on parle alors d'indices statistiques élémentaires. Mais il est encore plus important d'être en mesure de suivre les évolutions de grandeurs complexes (le niveau général des prix, la production industrielle, les exportations, etc.). Celles –ci peuvent être résumées par telles ou telles caractéristiques de tendance centrale des indices élémentaires qui leur correspondent : on parle alors d'indices synthétiques.

I/ Les indices élémentaires ou simples :

1-Définition :

Un indice simple noté $I_{t/0}$ de la grandeur G est le rapport de la valeur G_t, prise par la grandeur à l'époque t, à la valeur G_0 prise à la date 0, soit : $I_{t/0} = \frac{Gt}{G0} \times 100$.

Cet indice exprime donc la variation ou l'évolution de la grandeur G entre deux dates t et 0.
La date t est la date finale (courante), la date 0 est la date de référence ou de base.
Dans le cas de comparaison géographique ou comparaison dans l'espace, on note l'indice de la région A par rapport à la région B : $I_{A/B}$. $I_{A/B} = \frac{GA}{GB} \times 100$.
B : région de référence ; A : région courante.

Applications :

a/ Indice dans le temps : le prix d'un litre d'huile est passé de 250 DA à 400 DA entre 2005 et 2008. L'indice du prix d'huile de l'année courante (2008) par rapport à l'année de base (2005) est :

$I_{p2008/2005} = \frac{\text{prix en 2008}}{\text{prix en 2005}} \times 100 = \frac{400}{250} \times 100 = 160$ ($I_{p2008/2005}$ =1,60 ou 160). Cela signifie que le prix a été multiplié par 1,60 entre 2005 et 2008 ou bien le prix a augmenté de 60% [(1,60-1) ×100] entre 2005 et 2008, c-à-d en calculant le taux d'évolution ou le taux de croissance.

b/Indice dans l'espace : la densité de la population au KM^2 en 2003 est de 416H/ KM^2 sur l'ensemble de la wilaya de Tizi-Ouzou (WTO) et de 1319 H/ KM^2 pour la commune de Tizi-Ouzou (CTO). L'indice de la densité de la commune, la wilaya étant choisie comme la base est égal à :

$I_{CTO/WTO} = \frac{1319}{416} = 3,17$ =317%. La densité de la commune représente 3,17 fois celle de la wilaya.

Remarque : on peut calculer l'indice de la densité de la wilaya en prenant comme base la commune.

2/Les propriétés des indices élémentaires :

a/La circularité ou la transférabilité : elle s'exprime de la manière suivante :

$I_{t/0} = I_{t/t-1} \times I_{t-1/t-2} \times I_{t-2/t-3} \times \ldots\ldots \times I_{2/1} \times I_{1/0}$

Ceci est aussi appelé le principe d'enchainement des indices.

Exemple : le chiffre d'affaires (CA) d'une entreprise a augmenté de 30% de 2010 à 2011 et diminué de 15% de 2011 à 2012. Le CA a-t-il diminué ou augmenté de 2010 à 2012 ?

Réponse :

On a $I_{11/10}$ = 100+30=130, $I_{12/11}$ = 100-15=85 et on cherche $I_{12/10}$ par la propriété de la circularité.

$I_{12/10} = I_{12/11} \times I_{11/10} = 0{,}85 \times 1{,}30 = 1{,}105$. Le CA a augmenté de [(1,105-1) x100] = 10,5 % de 2010 à 2012.

b/ La réversibilité : elle s'exprime de la manière suivante : $I_{0/t} = \frac{1}{It/0}$

Exemple :

Si le prix d'un produit augmente de 20% de 2010 à 2012, calculer $I^p_{2010/2012}$.

***Réponse* :**

On a $I^p_{12/10}$ = 1,20 ou 120 et on cherche $I^p_{10/12}$ par la propriété de réversibilité.

$I^p_{10/12} = 1/ I^p_{12/10} = 1/ 1{,}20 = 0{,}83$. Cela veut dire que le prix de 2010 est inférieur à celui de 2012 de 17% soit [(0,83-1) x100]

c/L'identité: elle s'exprime de la manière suivante : $I_{0/0} = I_{t/t} = 1$ ou 100

Remarque : il est possible de calculer les indices élémentaires de prix, de quantité, de valeur et de pouvoir d'achat.

$I_{valeur} = I_{prix} \times I_{quantité}$

$I_{pouvoir\ d'achat} = \frac{1}{Iprix}$

Exemple 1 :

Soit P et Q les prix et quantités d'un produit vendu par une entreprise. Si le prix de ce produit a augmenté de 60% de 2000 à 2010 et si les quantités vendues ont diminué de 50% de 2000 à 2010, quelle est l'évolution des recettes de 2000 à 2010 ?

Réponse :

$I^v_{10/00} = I^P_{10/00} \times I^Q_{10/00} = 1{,}60 \times 0{,}50 = 0{,}8$ soit une baisse des recettes (valeur) de 20% [(0,80-1) ×100

Exemple 2 : si les prix augmentent de 10%, comment varie le pouvoir d'achat ?

Réponse :

$I_{pouvoir\ d'achat} = \frac{1}{Iprix}$; $I_p = 1+0{,}10 = 1{,}10$. $I_{pouvoir\ d'achat} = \frac{1}{1{,}10} = 0{,}9090$. Cela veut dire que le pouvoir d'achat baisse de 9,1% [(0,9090-1) ×100]

II/ Les indices synthétiques:

1/ Définition:

Un indice synthétique se définit comme un rapport de grandeurs complexes. Il est utilisé pour comparer des grandeurs complexes. Une grandeur complexe est une somme ou une agrégation de grandeurs simples.
Exemples : le blé et le mais sont des grandeurs simples. La production agricole est une grandeur complexe.
On distingue les indices synthétiques de valeur, de prix et de quantité. De même qu'il existe trois types d'indice synthétiques, on trouve trois formules pour les calculer : les formules de Laspeyres, de Paasche et de Fisher.

2/ L'indice de Laspeyres : c'est une moyenne arithmétique des indices élémentaires pondérés par les coefficients budgétaires α_0^j(coefficients de pondération) de la date ou période de base (0).
α_0^j est une fréquence relative. Elle représente l'importance du constituant j dans la grandeur complexe.
Exemple : la part dans la dépense totale de viande des ménages de chaque article entrant dans la catégorie de viande : le bœuf, le veau, le mouton, le cheval, le poulet, le chameau et le lapin.

$$\alpha_0^j = \frac{P_0^j.Q_0^j}{\sum P_0^j.Q_0^j} \text{ ou } \alpha_0^j = \frac{P_0.Q_0}{\sum P_0.Q_0}$$

$P_0^j.Q_0^j$: Valeur du produit j à l'année de base.
$\sum P_0^j.Q_0^j$: Total des valeurs des produits.
-L'indice de Laspeyres des prix : $L^P_{t/0}=\sum \alpha_0^j.I^P_{t/0}$. Cette formule est appelée « formule de définition ». Après simplification, on obtient la formule suivante : $L^P_{t/0}=\frac{\Sigma P_t.Q_0}{\Sigma P_0.Q_0}$ (formule simplifiée).

-L'indice de Laspeyres des quantités : $L^Q_{t/0}=\sum \alpha_0^j.I^Q_{t/0}$ (formule de définition) ou
$L^Q_{t/0}=\frac{\Sigma P_0.Q_t}{\Sigma P_0.Q_0}$ (formule simplifiée).
Remarque : dans le cas où les coefficients budgétaires sont exprimés en pourcentage, la formule de définition devient : $L^P_{t/0}=\sum \alpha_0^j.\ I^P_{t/0}/100$. (Laspeyres des prix).
$L^Q_{t/0}=\sum \alpha_0^j.\ I^Q_{t/0}/100$ (Laspeyres des quantités).

3/L'indice de Paasche : c'est une moyenne harmonique des indices élémentaire pondérés par les coefficients budgétaires α^j_t de l'année courante.

$$\alpha_t^j = \frac{P_t^j.Q_t^j}{\sum P_t^j.Q_t^j} \text{ ou } \alpha_t^j = \frac{P_t.Q_t}{\Sigma P_t.Q_t}$$

-L'indice de Paasche des prix : $P^{P}_{t/0}= \frac{\sum \alpha_t^j}{\sum \alpha_t^j \cdot \frac{1}{IPt/0}} = \frac{1}{\sum \alpha_t^j \cdot \frac{1}{IPt/0}}$ (formule de définition). Après simplification, on obtient la formule suivante : $P^{P}_{t/0}= \frac{\Sigma P_t.Q_t}{\Sigma P_0.Q_t}$ (formule simplifiée).

-L'indice de Paasche des quantités : $P^{Q}_{t/0}= \frac{1}{\sum \alpha_t^j \cdot \frac{1}{IQt/0}}$ (formule de définition) ou bien

$P^{Q}_{t/0}= \frac{\Sigma P_t.Q_t}{\Sigma P_t.Q_0}$ (formule simplifiée).

4) L'indice de Fisher :

L'indice de Fisher est la moyenne géométrique simple des indices de Laspeyres et de Paasche.

-L'indice de Fisher des prix : $F^{P}= \sqrt{L^P.P^P}$

-L'indice de Fisher des quantités : $F^{Q}= \sqrt{L^Q.P^Q}$

5) L'indice des valeurs globales ($I^{VG}_{t/0}$) :

Nous avons calculé, précédemment, les indices de prix et de quantités de Laspeyres, de Paasche et de Fisher, avec des formules différentes. Par contre, les indices de valeur globales de Laspeyres, de Paasche et de Fisher se calculent tous de la même manière. Autrement dit

$$I^{VG}_{t/0} = \frac{\Sigma P_t.Q_t}{\Sigma P_0.Q_0} \times 100$$

Remarque :

On peut aussi calculer l'indice des valeurs globales comme suit :

$I^{VG}_{t/0}=L^{P}_{t/0} . P^{Q}_{t/0} = L^{Q}_{t/0} . P^{P}_{t/0}$

Exercice d'application :

Un responsable d'approvisionnement de rayon a relevé, au cours de deux années, les quantités et les prix de trois produits « A », « B » et « C » et a établi le tableau suivant :

Année	Articles	Quantités (kg)	Prix (DA)	Valeurs. (Quantité x Prix)
2000	A	15	10	150
	B	20	5	100
	C	25	8	200
2005	A	25	12	300
	B	25	6	150
	C	35	15	525

Questions :

1. Calculer les indices des prix de Laspeyres et de Paasche par les formules de définition et par les formules simplifiées.
2. Calculer les indices des quantités de Laspeyres et de Paasche par les formules de définition et par les formules simplifiées.
3. Calculer les indices de Fisher des prix et des quantités
4. Calculer l'indice des valeurs globales et vérifier que $I^{VG}_{t/0}=L^{P}_{t/0} \cdot P^{Q}_{t/0} = L^{Q}_{t/0} \cdot P^{P}_{t/0}$

1/Calcul des indices des prix :

	P_0	Q_0	P_t	Q_t	$P_0.Q_0$	α^j_0	$P_0.Q_t$	$P_t.Q_0$	$P_t.Q_t$	α^j_t	$I^P_{t/0}$	$I^P_{0/t}$	$I^Q_{t/0}$	$I^Q_{0/t}$
A	10	15	12	25	150	0,33	250	180	300	0,31	1,2	0,83	1,66	0,60
B	5	20	6	25	100	0,22	125	120	150	0,15	1,2	0,83	1,25	0,80
C	8	25	15	35	200	0,45	280	375	525	0,54	1,87	0,53	1,4	0,71
Σ	/	/	/	/	450	1	655	675	975	1	/	/	/	/

A/L'indice de Laspeyres des prix :

-Formule de définition :

$$L^{P}_{t/0}=\sum \alpha_0^j \cdot I^{P}_{t/0} \Rightarrow L^{P}_{2005/2000}=(0{,}33.1{,}2)+(0{,}22.1{,}2)+(0{,}45.1{,}87)\approx 1.5 \text{ ou } 150$$

- Formule simplifiée :

$$L^{P}_{t/0}=\frac{\Sigma P_t.Q_0}{\Sigma P_0.Q_0} \Rightarrow L^{P}_{2005/2000}=\frac{675}{450}=1{,}5 \text{ ou } 150$$

Soit une augmentation des prix des trois (3) produits de 50%, entre 2000 et 2005.

B) *Indice de Paasche des prix*

- Formule de définition :

$$P^{P}_{t/0}=\frac{1}{\sum \alpha_t^j \cdot \frac{1}{IPt/0}} \Rightarrow P^{P}_{2005/2000}=\frac{1}{(0{,}31.0{,}83)+(0.15.0{,}83)+(0{,}54.0{,}53)}\approx 1.49 \text{ ou } 149$$

-Formule simplifiée :

$$P^{P}_{t/0}=\frac{\Sigma P_t.Q_t}{\Sigma P_0.Q_t} \Rightarrow P^{P}_{2005/2000}=\frac{975}{655}\approx 1.49 \text{ ou } 149$$

Soit une augmentation des prix des trois (3) produits, de près de 49%, entre 2000 et 2005.

<u>2/Indices des quantités :</u>

***A/L'indice de* Laspeyres des quantités:**

-Formule de définition :

$$L^{Q}_{t/0}=\sum \alpha_0^j \cdot I^{Q}_{t/0} \Rightarrow L^{Q}_{2005/2000}=(0{,}33.1{,}66)+(0{,}22.1{,}25)+(0{,}45.1{,}4)=1{,}45 \text{ ou } 145$$

-Formule simplifiée)

$$L^Q_{t/0} = \frac{\Sigma P_0.Q_t}{\Sigma P_0.Q_0} \Rightarrow L^Q_{2005/2000} = \frac{655}{450} = 1.45 \text{ ou } 145$$

Soit une augmentation des quantités demandées des trois (3) produits de 45%, entre 2000 et 2005.

B/ L'indice de Paasche des quantités :

-Formule de définition :

$$P^Q_{t/0} = \frac{1}{\Sigma \alpha^j_t . \frac{1}{IQt/0}} \Rightarrow P^Q_{2005/2000} = \frac{1}{(0{,}31.0{,}60)+(0{,}15.0{,}80)+(0{,}54.0{,}71)} = 1{,}44 \text{ ou } 144$$

-Formule simplifiée:

$$P^Q_{t/0} = \frac{\Sigma P_t.Q_t}{\Sigma P_t.Q_0} \Rightarrow P^Q_{2005/2000} = \frac{975}{675} = 1{,}44 \text{ ou } 144$$

Soit une augmentation des quantités demandées des trois (3) produits de 44%, entre 2000 et 2005.

3/Indices de Fisher :

A/Fisher des prix

$$F^P = \sqrt{L^P.P^P} \Rightarrow F^P = \sqrt{1{,}5.1{,}49} = 1{,}495 \text{ ou } 149{,}5$$

Soit une augmentation des prix des trois (3) produits, de près de 49%, entre 2000 et 2005.

B/Fisher des quantités

$$F^Q = \sqrt{L^Q.P^Q} \Rightarrow F^Q = \sqrt{1{,}45.1.44} = 1{,}445 \text{ ou } 144{,}5$$

Soit une augmentation des quantités demandées des trois (3) produits de 44,5%, entre 2000 et 2005.

4/Indices des valeurs globales :

$$I^{VG}_{t/0} = \frac{\Sigma P_t.Q_t}{\Sigma P_0.Q_0} = \frac{975}{450} = 2{,}16$$

On vérifie par ailleurs que :

$L^P_{t/0} . P^Q_{t/0} = L^Q_{t/0} . P^P_{t/0} = I^{VG}_{t/0} \Rightarrow (1{,}5.\ 1{,}44) = (1{,}45.\ 1{,}49) = 2{,}16$

Soit une augmentation de la valeur (dépenses) des trois (3) produits de 116% entre 2000 et 2005.