

Micro- économie II

Chapitre I : La théorie du comportement du producteur

1/Définition de la production

La production est le processus qui englobe la combinaison de facteurs tels que (la main d'œuvre, les équipements, la terre, les outillages...), de manière à produire des biens et des services. Autrement dit, la production est l'opération ou le processus qui permet de transformer les inputs en outputs.

a/La fonction de production

C'est une relation fonctionnelle par unité de temps entre les inputs et les outputs ; c.-à-d. entre les quantités de facteurs de production utilisés et le volume de la production obtenu. Cette fonction peut être représentée par un tableau, un graphe ou par une expression algébrique.

$$Q_X = f(X_1, X_2, \dots, X_N).$$

Q_X étant le volume de la production par période.

$(X_1, X_2, \dots, X_N)$ représentent les quantités des différents facteurs utilisés dans une période donnée.

b/Caractéristiques de la fonction de production :

-La fonction de production peut prendre plusieurs formes :

$$Q = f(K, L)$$

Les hypothèses de bases sont comme suit :

- La fonction de production et pour des raisons économiques n'a de sens que pour les valeurs positives des inputs et des outputs.
- Les inputs et les outputs sont parfaitement divisibles.
- Les facteurs de production sont substituables.
- Il existe un nombre infini de combinaisons des facteurs de production.
- On considère que la meilleure technologie de la période utilisée.

c-La courte période et la longue période

- La courte période

C'est celle pendant laquelle l'emploi de certains facteurs tels que la main d'œuvre et les matières premières (MP) peuvent être augmentés ou diminués. Tandis que la quantité de certains autres facteurs tels que les machines, les équipements sont fixes.

Durant la période courte, la production peut être augmentée seulement en augmentant les facteurs variables, et cela jusqu'à la capacité maximale donnée par le facteur fixe.

- La longue période

Elle est définie comme celle qui est suffisamment longue pour que tous les facteurs soient modifiables (tous les facteurs sont variables).

2- La fonction de production en période courte

En période courte, on maintient le facteur K comme étant fixe (K^0) et on considère le facteur L comme étant variable.

Considérons les hypothèses suivantes :

-toutes les unités du facteur variable sont équivalentes (c'est l'homogénéité du facteur variable)

- l'état de la technologie ne change pas. Ainsi la fonction de production en courte période prend la forme suivante :

$$P = F(K ; L)$$

Afin d'étudier la relation fonctionnelle entre l'output et le facteur variable. Prenons l'exemple suivant d'un processus de production sur une surface donnée de terre cultivable sur laquelle on ajoute des quantités variables d'un facteur à des quantités fixes(constantes) d'un autre facteur..

Nombre de travailleurs (L)	Produit total (PL)	Productivité moyenne(PM)= Q/L	Productivité marginale (Pm)= $\Delta Q/\Delta L$
0	0	—	—
1	10	10	10
2	24	12	14
3	39	13	15
4	52	13	13
5	61	12,5	9
6	66	11	5
7	66	9,4	0
8	64	8	-2

- Le produit total

C'est la quantité produite du bien qui résulte de la combinaison d'une quantité variable de facteur travail, avec une quantité constante du facteur capital.

- La productivité moyenne

La productivité moyenne du facteur travail mesure l'efficacité du facteur variable et décrit en fonction du facteur variable l'évolution du rapport de la contribution du facteur variable à la production.

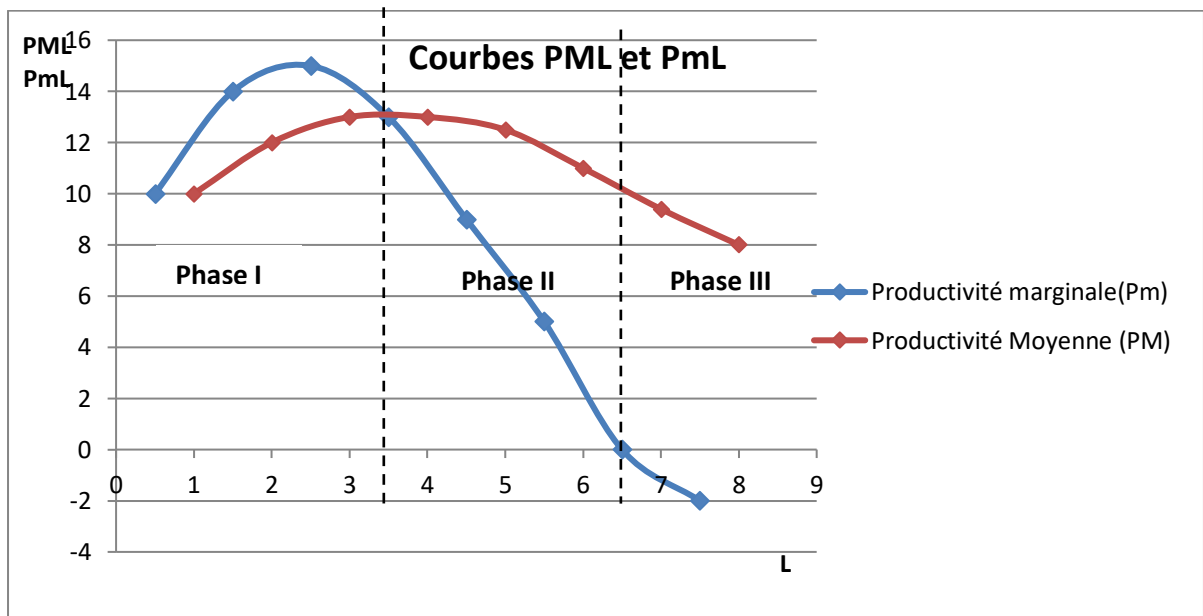
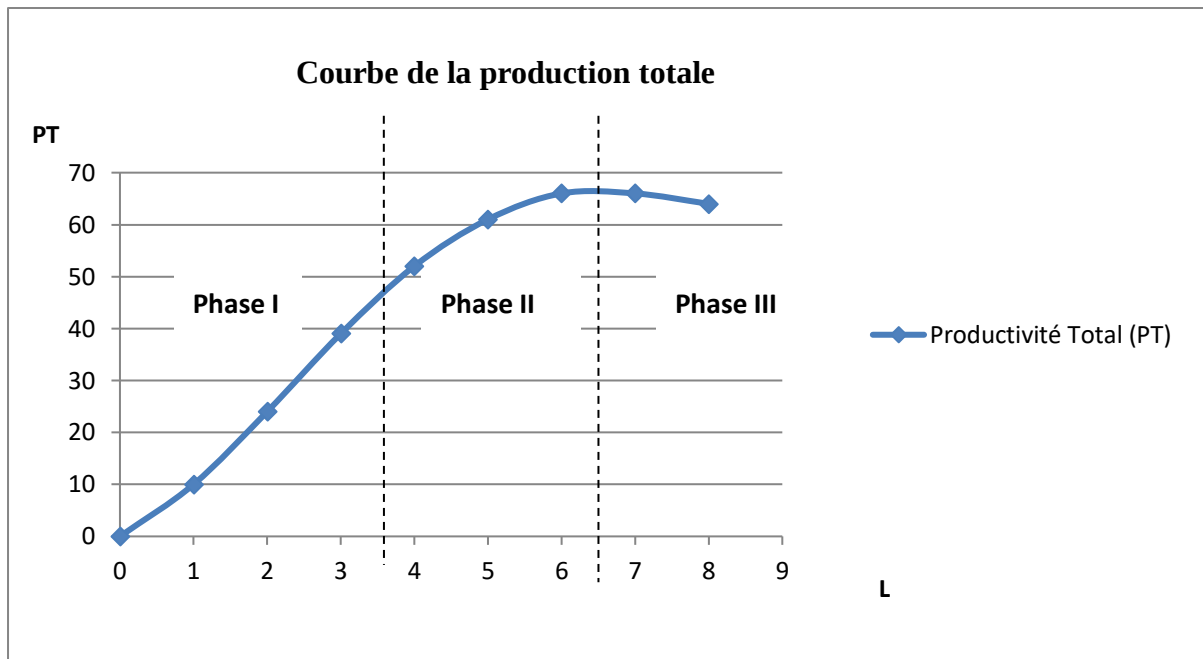
$$PM = \frac{PL}{L} = \frac{Q}{L}$$

- La productivité marginale

La productivité marginale du facteur variable exprime la variation du produit total résultant d'une variation unitaire du facteur travail.

$$P_m = \frac{\Delta PL}{\Delta L} = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$$

La représentation graphique de ces courbes est schématisée dans la figure suivante :



Le tableau et le graphe précédents permettent d'examiner l'efficacité d'utilisation des facteurs de production à travers l'étude des courbes de productivité (délimitation des phases de la production).

- Phase 1

Elle s'étend de l'origine au point A qui représente le maximum de productivité moyenne (PM). Dans cette zone, la courbe du produit marginal (Pm) domine la courbe du produit moyen. Ici l'efficacité de l'utilisation des facteurs de production (fixe et variable) est croissante et le rapport L/K est trop faible, car le facteur variable est sous-utilisé et le facteur fixe est excessif.

Dans cette phase, on a intérêt à augmenter le facteur variable. La zone 1 est une zone inefficace de production.

- Phase 2

Elle s'étend du maximum de la courbe de PM jusqu'au point où Pm est nulle. Ici PM domine Pm. Les combinaisons des facteurs K et L réalisées dans cette zone sont efficaces. La quantité de L n'est pas excessive par rapport à K, puisque le produit total continue à croître. Ici les unités additionnelles du facteur de production diminuent l'efficacité du facteur variable mais augmentent celle du facteur fixe (c'est la zone efficace de production) : PM et Pm des facteurs fixes et variables sont positives.

- Phase 3

Elle est située à droite du point B où la Pm du facteur variable est négative. Les combinaisons techniques ne sont plus efficaces du fait que l'utilisation d'unités additionnelles de L entraîne une diminution de production totale. Cette zone est une zone inefficace de production.

3/La fonction de production à 2 variables (Longue période)

On considère ici que les deux facteurs k et L varient simultanément

a/Définition de l'isoquant

La courbe d'isoquant ou iso produit indique le lieu géométrique des points représentant les combinaisons des deux facteurs K et L qui permettent d'obtenir les mêmes quantités de production.

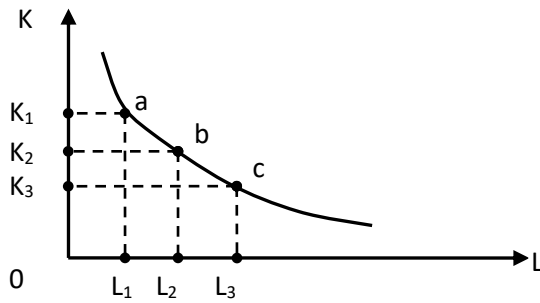
b/Caractéristiques

Ces courbes sont convexes par rapport à l'origine.

Plus on s'éloigne de l'origine plus le volume de production augmente.

Elles ne se coupent pas.

L'ensemble des courbes constitue la carte du producteur.

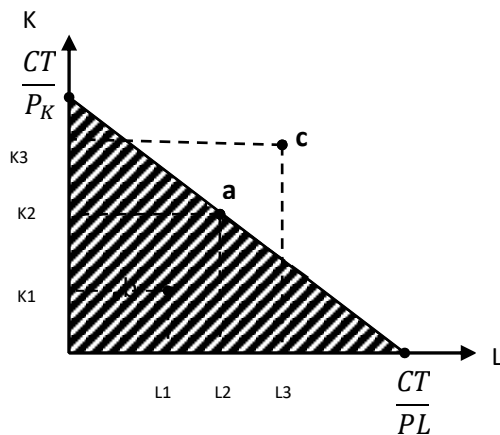


c/Les taux marginal des substitutions technique :(TMST)

$$TMST = -\frac{\Delta K}{\Delta L} = -\frac{K_2 - K_1}{L_2 - L_1}$$

Définition de TMST : taux marginal de substitution technique entre les facteurs Let K, mesure la réduction dans l'utilisation du facteur de production K, lorsque l'autre facteur travail L augmente d'une unité, en maintenant le même niveau de produit total.

d/ La ligne d'iso-coûts (la contrainte budgétaire)



Définition

la ligne d'iso-coût est le lieu géométrique des différentes combinaisons de facteurs (K,L) que l'entreprise peut obtenir sur le marché et le cout total (CT) de n'importe quelle combinaison produite est égale au budget de l'entreprise . L'équation d'iso-coût est :

$$CT = p_K \cdot K + p_L \cdot L$$

$$\text{Si } L=0 \quad K = \frac{CT}{p_K}$$

$$\text{Si } k=0 \quad L = \frac{ct}{pl}$$

Ct= coût total

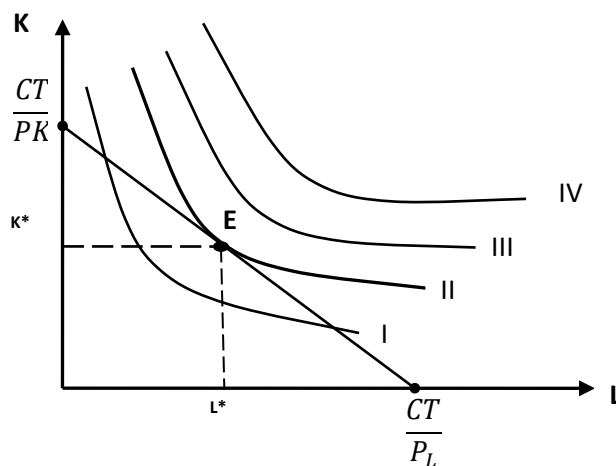
e/ L'équilibre du producteur (représentation graphique)

- ❖ Le producteur a pour objectif de maximiser son output sous la contrainte de son apport total AT ou du coût totale CT.

$$\text{S/C } AT = CT = CL.L + CK.K$$

Graphiquement :

Le point d'équilibre est le point de tangence entre la courbe d'iso-coût et la courbe d'iso-quant la plus élevée possible (graphe précédent).



Le producteur atteint l'équilibre lorsqu'il maximise sa production, compte tenu de son apport totale donné. Autrement dit, un producteur est à l'équilibre quand il atteint l'isoquant le plus élevé étant donné son iso-coût.

Au point de tangente, la valeur absolue de la pente de l'isoquant est égale à la valeur absolue de la pente de l'iso-coût. C'est-à-dire à l'équilibre le Taux Marginal de Substitution

$$\text{Technique TMST}_{L \text{ à } K \text{ à l'optimum}} = \frac{PML}{PMK} = \frac{CL}{CK} \quad \text{ou } \text{TMST}_{L \text{ à } K \text{ à l'optimum}} = \frac{PML}{CL} = \frac{PMK}{CK} =$$

$$\frac{\Delta K}{\Delta L} = \frac{\partial K}{\partial L}$$

Ceci veut dire qu'à l'équilibre la productivité marginale de la dernière unité monétaire dépensée est la même que la productivité marginale perçue de la dernière unité monétaire dépensée en capital. Ceci serait également vrai pour d'autres facteurs, si l'entreprise avait plus de facteurs de production.

❖ **Recherche de l'équilibre du producteur par la méthode algébrique :**
La recherche de la maximisation de la production avec N facteurs de production : Utilisation de la technique du multiplicateur de Lagrange

Soit la fonction de production Q continue et dérivable en tout point :

$$Q = f(K, L)$$

Sous la contrainte du coût total (CT) ou l'apport total (AT).

$$CT \text{ (ou bien AT)} = CK \times QK + CL \times QL$$

Sachant que CK et CL sont les coûts de deux facteurs de production (K et L).

Calcul de l'optimum de production (où de l'équilibre du producteur).

$$Q = f(K, L)$$

$$S/C \text{ CT} = CL \times QL + CK \times QK$$

Utilisation du multiplicateur de LAGRANGE :

$$\text{Max } \mathcal{L}(L, K, \lambda) = f(L, K) + \lambda (CT - CL \times QL - CK \times QK)$$

Où λ est une variable supplémentaire appelée le « Multiplicateur de Lagrange ».

Pour la recherche de l'optimum (maximum ou minimum), de la fonction de production, il faut que les conditions nécessaires de cet optimum soient réalisées. Ces conditions sont obtenues par l'annulation de la différentielle totale primaire de la fonction de L (les conditions du premier ordre).

Les conditions du premier ordre s'inscrivent comme suit :

$$\partial \mathcal{L} / \partial L = \partial F / \partial L - \lambda CL = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$\partial \mathcal{L} / \partial K = \partial F / \partial K - \lambda CK = 0 \dots \dots \dots (2)$$

$$\partial \mathcal{L} / \partial \lambda = CT - CL \times QL - CK \times QK \dots \dots \dots (3)$$

De la première fonction (1) et la deuxième fonction (2), on aura l'équation suivante et qui représente la condition d'équilibre du producteur :

$$(\partial F / \partial L) / (\partial F / \partial K) = \lambda CL / \lambda CK = \partial K / \partial L$$

$$\Rightarrow PML / PMK = CL / CK = TMST \text{ L à K à l'optimum.}$$

$$\text{Ou bien } PML / CL = PMK / CK = TMST \text{ L à K à l'optimum.}$$

Ce résultat signifie que l'allocation optimale du coût de production entre les facteurs est atteinte lorsque la productivité marginale de chaque facteur est la même par unité monétaire dépensée sur chacun des facteurs.

Les conditions suffisantes pour que l'optimum soit au maximum sont basées sur des conditions du 2eme ordre, qui sont obtenues avec la différentielle totale seconde de L et la recherche du déterminant.

Le Déterminant « D » doit être positif, c'est-à-dire $D > 0$.

Exemple : soit une fonction de production $Q = 2K^{1/2}L^{1/4}$. K et L sont les quantités des facteurs de production travail (L) et capital (K). Le coût du capital est de 16um, le coût du travail est de 2 um et l'apport total est de 96um.

1. Déterminer le $TMST_{L \rightarrow K}$ à l'équilibre ?
2. Déterminer l'équilibre du producteur par la méthode de Lagrange ?
3. Faite une représentation graphique de l'équilibre du producteur.

Resolution:

$$1. Q = 2K^{1/2}L^{1/4}$$

$$S/C \quad AT = CT = CL \cdot QL + CK \cdot QK$$

$$96 = 2L + 16K$$

$$\text{Le } TMST_{L \rightarrow K} \text{ à l'équilibre} = \frac{PML}{PMK} = \frac{CL}{CK}$$

On doit en premier lieu déterminer les productivités marginales des deux facteurs de production PML et PMK.

$$PML = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{1}{2} K^{1/2} L^{-3/4}$$

$$PMK = \frac{\partial Q}{\partial K} = K^{-1/2} L^{1/4}$$

$$TMST_{L \rightarrow K} = PML / PMK = \frac{CL}{CK} = \frac{\frac{1}{2}K}{L} = \frac{K}{2L} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

$$\longrightarrow 2L = 8K \longrightarrow L = 4K$$

Pour trouver les quantités d'équilibre, on remplace ceci dans l'équation de l'iso-cout et qui est :

$$AT = CT = CL \cdot QL + CK \cdot QK$$

$$96 = 2L + 16K$$

$$96 - 2(4K) - 16K = 0$$

$$96 - 8K - 16K = 0$$

$$96 - 24K = 0, K = 96/24 = 4 \text{ donc } K = 4$$

$$L = 4K = 4(4) = 16, \text{ donc } L = 16$$

Point d'équilibre $P_e (16, 4)$.

2. L'équilibre du producteur par la méthode de Lagrange

$$\text{Max } Q = 2K^{1/2}L^{1/4}$$

$$\text{S/C } AT = CT = CL \cdot QL + CK \cdot QK$$

$$\text{S/C } 96 = 2L + 16K$$

On intègre la fonction de Lagrange :

$$\mathcal{L}(L, K, \lambda) = 2K^{1/2}L^{1/4} + \lambda(96 - 2L - 16K)$$

On doit en premier lieu, calculer les conditions du premier ordre et qui sont les différentielles totales primaires.

$$\partial \mathcal{L} / \partial L = \frac{1}{2} K^{1/2} L^{-3/4} - 2\lambda = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\partial \mathcal{L} / \partial K = K^{-1/2} L^{1/4} - 16\lambda = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$\partial \mathcal{L} / \partial \lambda = 96 - 2L - 16K = 0 \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{TMST}_{L \text{ à } K} = \text{PML} / \text{PMK} = \frac{CL}{CK} = \frac{\frac{1}{2}K}{L} = \frac{K}{2L} = \frac{2\lambda}{16\lambda} = \frac{1}{8}$$

$$\longrightarrow 2L = 8K \longrightarrow L = 4K$$

Pour trouver les quantités d'équilibre, on remplace ceci dans l'équation de l'iso-cout et qui est l'équation (3) :

$$96 - 2L - 16K = 0$$

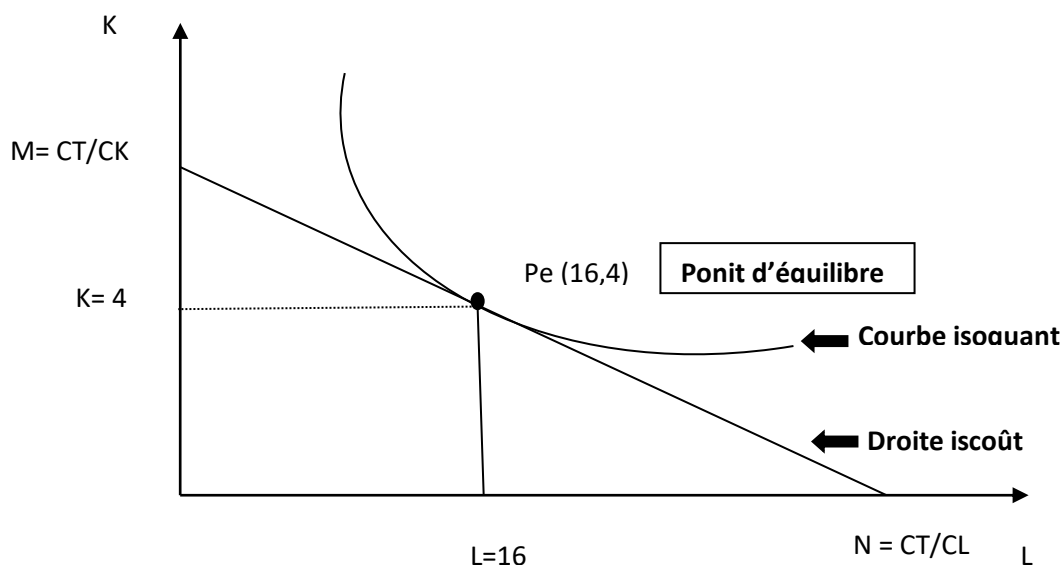
$$96 - 2(4K) - 16K = 0$$

$$96 - 8K - 16K = 0$$

$$96 - 24K = 0, K = 96/24 = 4 \text{ donc } K = 4$$

$$L = 4K = 4(4) = 16, \text{ donc } L = 16 \quad \longrightarrow \quad \text{Point d'équilibre } Pe(16, 4).$$

3. Représentation graphique de l'équilibre du producteur



Pour déterminer la droite de l'iso-coût

Le point M

On suppose que $QL = 0$

$$QK = CT/CL = 96/12$$

$$M(0; 8)$$

Le point N

$$QK = 0$$

$$QL = CT/CL = 96/2 = 48$$

$$N(48; 0)$$

f) La nature des rendements d'échelle

A la période longue, nous étudions la notion de rendements d'échelle. Elle exprime la relation entre l'accroissement des facteurs de production et l'accroissement induit de la production.

Pour montrer comment déterminer le degré d'homogénéité et la nature des rendements d'échelle, prenons comme exemple la fonction Cobb Douglas qui s'écrit comme suit :

$$X = f(L, K) = A L^a K^b$$

Cette fonction est dite homogène de degré (**r**), si en multipliant les variables indépendantes (**K, L**) par une constante (**t**) : coefficient multiplicateur positif, la fonction est multipliée par (**t^r**); (**r**) étant le degré d'homogénéité de la fonction **X**.

C'est en fonction de la valeur de (**r**) que se détermine la nature des rendements d'échelle de la fonction **X**.

Application sur la nature des rendements d'échelle :

Trouvez le degré d'homogénéité et déterminez la nature des rendements d'échelle des fonctions suivantes :

1) $X = F(K, L) = 20k^{5/3} L^{3/5}$

$$F(tK, tL) = 20(tK)^{5/3}(tL)^{3/5} = 20 t^{5/3} K^{5/3} t^{3/5} L^{3/5} = t^{34/15} X$$

Le degré d'homogénéité de la fonction = $r = 34/15 = 2,26$

$r > 1$, donc les rendements d'échelle sont croissants.

2) $X = F(K, L) = K^{1/2} L^{1/3}$

$$F(tK, tL) = (tK)^{1/2}(tL)^{1/3} = t^{1/2} K^{1/2} t^{1/3} L^{1/3} = t^{5/6} X$$

Le degré d'homogénéité de la fonction = $r = 5/6 = 0,83$

$r < 1$, donc les rendements d'échelle sont décroissants.

3) $X = 5k^{1/5} L^{4/5}$

$$F(tK, tL) = (tK)^{1/5} (tL)^{4/5} = t^{1/5} K^{1/5} t^{4/5} L^{4/5} = t^{5/5} X$$

Le degré d'homogénéité de la fonction = $r = 5/5 = 1$

$r=1$, donc les rendements d'échelle sont constants.