partie 2 (6 point)

EX01 : (3 point) (45 min) $U = \frac{1}{2} x^{2} y^{\frac{1}{2}}$ $P_x = 40^{DA}$ $P_y = 20$ $R = 1600^{DA}$

1) pour déterminer un équilibre, ce consommateur doit résoudre le programme de maximisation sous contrainte suivant :

$$\begin{cases} \text{maximiser } U = \frac{1}{2} x^{2} y^{\frac{1}{2}} \\ \text{Sous contrainte que : } 40x + 20y = 1600 \end{cases}$$

utilisons la méthode de lagrange :

1ère étape : $L(x, y, \lambda) = U + \lambda(40x + 20y = 1600)$

$$= \frac{1}{2} x^{2} y^{\frac{1}{2}} + \lambda(1600 - 40x - 20y = 0)$$

2ème étape : $\frac{\partial L}{\partial x} = x y^{\frac{1}{2}} - 40\lambda$ $\quad \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{4} x^{2} y^{-\frac{1}{2}} - 20\lambda$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1600 - 40x - 20y$$

(1,5)

3ème étape : $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ $\quad x y^{\frac{1}{2}} - 40\lambda = 0$ --- (1)

$\frac{\partial L}{\partial y} = 0$ $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{4} x^{2} y^{-\frac{1}{2}} - 20\lambda = 0$ - (2)

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$ $\quad 1600 - 40x - 20y = 0$ - (3)

4ème étape : $\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{x y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{4} x^{2} y^{-\frac{1}{2}}} = \frac{40\lambda}{20\lambda} \Leftrightarrow \frac{y}{\frac{x}{4}} = 2$

$\Leftrightarrow \frac{4y}{x} = 2$

$\Leftrightarrow 4y = 2x$

$\Leftrightarrow y = \frac{2x}{4}$ (0,5)

$\boxed{y = \frac{x}{2}}$ qu'on remplace dans (3)

$1600 - 40x - 20\left(\frac{x}{2}\right) = \cancel{1600}$ $\Leftrightarrow 1600 - 40x - 10x = 0$

$\Leftrightarrow 1600 - 50x = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{160\cancel{0}}{5\cancel{0}} = 32$

$y = \frac{x}{2} \Leftrightarrow y = \frac{32}{2} = 16$

Le panier de biens qui permet à ce consommateur de maximiser son niveau de satisfaction dans ces conditions est $M(32; 16)$ (0,5)

Le niveau de satisfaction maximal est $U = \frac{1}{2}(32)^{2}(16)^{\frac{1}{2}}$ (0,5)

$U = \frac{1}{2}(1024) \cdot 4$