Corrigé type.

EX01 [1] Faux : la matrice est nulle est l'élément neutre de l'addition matricielle. (0,5)

[2] Faux : le format de la matrice rectangulaire est le nombre de ses lignes et celui de ses colonnes aussi. (0,5)

[3] Faux : c'est la matrice singulière qui a deux colonnes identiques donc un déterminant nul. (0,5)

[4] Faux : la règle de Sarrus est propre aux matrices carrées d'ordre 3 seulement. (0,5)

2

EX02 (1) $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \boxed{0}$ (0,5)

$a_{12} = 0 + 1 = \boxed{1}$

$a_{32} = 0 + 1 = \boxed{1}$

$a_{21} = 0 + 1 = \boxed{1}$

$a_{23} = 1 + 0 = \boxed{1}$

$$A_{(3,3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ (0,5)

1

(2) Sa matrice opposée est : (0,5) $-A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (0,5)

(3) • $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} = [0 + 1 + 1] - [0 + 0 + 0] = \boxed{2}$ (0,5)

1,5

• $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ (0,5) par théorème donc $|A^{-1}| = \dfrac{1}{2}$ (0,5)

(4) $A^2 = A \cdot A$ (0,5) le produit est défini, la règle L x C (0,5)

• $$A^2 = \begin{pmatrix} (0\ 1\ 1)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} & (0\ 1\ 1)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} & (0\ 1\ 1)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \\ (1\ 0\ 1)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} & (1\ 0\ 1)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} & (1\ 0\ 1)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \\ (1\ 1\ 0)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} & (1\ 1\ 0)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} & (1\ 1\ 0)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0+1+1) & (0+0+1) & 1 \\ (0+0+1) & (1+0+1) & 1 \\ (0+1+0) & 1+0+0 & 2 \end{pmatrix}$$ (0,5) (0,25)

7

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ (0,25)

• $$A^2 - A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ (0,25)

$$= \begin{pmatrix} (2-0-2) & (1-1-0) & (1-1-0) \\ (1-1-0) & (2-0-2) & (1-1-0) \\ (1-1-0) & (1-1-0) & (2-0-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_{M}$$ (0,25) (0,25) matrice nulle (0,5)

(5) $A^2 - A - 2I_3 = 0 \Leftrightarrow A^2 - A = 2I_3$ (0,5)

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(A^2 - A) = I_3$ (0,5) $\Leftrightarrow \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}A = I_3$ (0,5)

$\Leftrightarrow A\left[\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I\right] = I_3$

$$A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I_3 \quad (0,5)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (1) \ \cancel{0,5}$$

8

Exo 3 ①
$$\begin{cases} x - y + z = 7 \\ 4x - 2y + z = 3 \\ 2x - y + 5z = 2 \end{cases} \quad (0,5)$$

② $$A \cdot X = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (0,5)$$ $|A| = 9 \neq 0$

La solution unique par la méthode de Pivot de Gauss et $X = B^*$ (0,5)

$$[A \mid I \mid B] \xrightarrow[\text{élimination sur les lignes}]{\text{Gauss}} [I \mid A^{-1} \mid B^*]$$

$$T_0 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1^0 \\ L_2^0 \\ L_3^0 \end{array} \quad (0,5)$$

Pivot

$$T_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & -3 & -4 & 1 & 0 & -25 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & -12 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1^1 = L_1^0 \text{ (ligne pivote)} \\ L_2^1 = L_2^0 - 4L_1^1 \\ L_3^1 = L_3^0 - 2L_1^1 \end{array} \quad (1,5)$$

Pivot

$$T_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{11}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{4}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{25}{2} \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1^2 = L_1^1 + L_2^2 \\ L_2^2 = L_2^1\left(\frac{1}{2}\right) \text{ (ligne pivote)} \\ L_3^2 = L_3^1 - L_2^2 \end{array} \quad (1,5)$$

Pi

$$T_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{49}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -2 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{37}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1^3 = L_1^2 + \frac{1}{2}L_3^3 \\ L_2^3 = L_2^2 + \frac{3}{2}L_3^3 \\ L_3^3 = L_3^2\left(\frac{2}{9}\right) \text{ (ligne pivote)} \end{array} \quad (1,5)$$

I_3 $\qquad A^{-1}$ $\qquad B^*$

Donc la solution unique du système est
$$\begin{cases} x = -\frac{49}{2} \quad (0,5) \\ y = -\frac{37}{2} \quad (0,5) \\ z = \frac{1}{\ldots} \quad (0,5) \end{cases}$$